41 95-53

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und **Hans Rohrbach**

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, O. Haupt,
G. Köthe, W. Schmeidler

Band 191

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1953

MATH
NMI
J8264
v.191-194

Archiv-Nr. 180353
Satz von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Druck von Buchkunst, Berlin W 35
Printed in Germany

Nov. 12, 1956
B.P.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 191

Seite

Aumann, Georg, Über Hüllen- und Kernbildungen auf Verbänden 50

Blaschke, W., Zur topologischen Differentialgeometrie 153

Buckel, Walter, Eine Kennzeichnung des Systems aller Kreise mit nichtverschwindendem Radius der euklidischen Ebene 13

— —, Eine Kennzeichnung des Systems aller nichtzerfallenden Kegelschnitte der projektiven Ebene 165

Dürbaum, Hansjürgen siehe **Kowalsky, Hans-Joachim**

Hirzebruch, Friedrich, Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen 110

Kappos, Demetrios A., Erweiterung von Maßverbänden 97

Köthe, Gottfried, Dualität in der Funktionentheorie 30

Kowalsky, Hans-Joachim und **Hansjürgen Dürbaum,** Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien 135

Krull, Wolfgang, Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffs 54

Künneth, Hermann, Eine Kennzeichnung lokal konvexer Kurven 158

Nöbeling, Georg, Limitentheorie in topologischen Vereinen und Verbänden 125

Pauc, Christian, Ableitungsbasen, Prätopologie und starker Vitalischer Satz 69

Richert, Hans-Egon, Aus der additiven Primzahltheorie 179

Roquette, Peter, Arithmetischer Beweis der Riemannschen Vermutung in Kongruenzfunktionenkörpern beliebigen Geschlechts 199

Schubert, Horst, Zur Differenzierbarkeit der Abbildungen von Punktmengen des euklidischen Raumes 1

Specht, Wilhelm, Eine mathematische Frage der Strahlentherapie 92

Tietze, Heinrich, Über die Glaisher'sche Verallgemeinerung eines Euler'schen Satzes über Partitionen 64

Ausgabedaten der Hefte von Bd. 191

Heft 1/2 ausgegeben am 31. Mai 1953

Heft 3/4 ausgegeben am 15. Juni 1953

Zur Differenzierbarkeit der Abbildungen von Punktmengen des euklidischen Raumes.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Horst Schubert* in Heidelberg.

Einleitung.

Sei $f(P)$ eine Funktion, die auf einer Punktmenge $\mathfrak{B}$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes R^n definiert ist. Differenzierbarkeit von $f(P)$ in einem Punkte P_0 von $\mathfrak{B}$ bedeutet, daß $f(P)$ in einer Umgebung von P_0 linear approximiert werden kann. In einem inneren Punkte P_0 von $\mathfrak{B}$ wird diese Approximation auf eindeutige Weise hergestellt durch das vollständige Differential. Dieses kann als Linearform aufgefaßt werden, die durch das Skalarprodukt der Vektoren des R^n mit dem Gradienten von $f(P)$ in P_0 gebildet wird. Diese Linearform soll als Ableitung von $f(P)$ in P_0 bezeichnet werden. Ist $P_0 \in \mathfrak{B}$ Randpunkt von $\mathfrak{B}$, so entsteht beim Versuch, einen Gradienten bzw. eine Ableitung von $f(P)$ zu definieren, die Schwierigkeit, daß im allgemeinen Gradient bzw. Ableitung durch die Forderung der linearen Approximation nicht eindeutig festzulegen sind, und zwar dann nicht, wenn die Halbtangenten von $\mathfrak{B}$ in P_0 (das Kontigent im Sinne Bouligands) in einem echten linearen Unterraum des R^n enthalten sind. Es erscheint jedoch wünschenswert, insbesondere um höhere Ableitungen definieren zu können, auch in diesem Falle zu einer eindeutigen Festlegung der Ableitung zu gelangen.

Die Forderungen, die man an eine solche Festlegung stellen wird, sind:

1. Die Ableitung ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.
2. Es gelten die üblichen Differentiationsregeln.
3. Die Ableitung ist bereits bestimmt durch den linearen Raum kleinster Dimension, der $\mathfrak{B}$ umfaßt.

Um den Anschluß an die Differentialgeometrie herzustellen, kann man zu diesen Forderungen hinzunehmen:

4. Ist $\mathfrak{B}$ eine eingebettete Riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist der Gradient Tangentialvektor der Mannigfaltigkeit.

Es kann diesen Forderungen auf zweierlei Weise genügt werden: Entweder dadurch, daß man die Ableitung von $f(P)$ in P_0 als Linearform auffaßt, die nur auf demjenigen linearen Raum $T(P_0, \mathfrak{B})$ kleinster Dimension definiert ist, der die Halbtangenten von $\mathfrak{B}$ in P_0 enthält, oder dadurch, daß man unter der Ableitung eine Linearform des n-dimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{R}^n$ versteht, welche alle Normalenvektoren von $\mathfrak{B}$ in P_0 annulliert (§ 2). Die erste Möglichkeit bereitet Schwierigkeiten bei der Definition höherer Ableitungen. Zunächst kann sich bei allgemeinen Punktmengen die Dimension von $T(P, \mathfrak{B})$ mit P ändern. Selbst wenn man dies ausschließen wollte, bleibt die Schwierigkeit, daß eine „Parallelverschiebung", d. h. eine von P abhängige lineare Abbildung der Räume $T(P, \mathfrak{B})$ aufeinander, definiert werden müßte, um die ersten Ableitungen zueinander in Beziehung

zu setzen. Diese Schwierigkeiten entfallen, wenn man die Ableitung als im $\mathfrak{R}^n$ definierte Linearform auffaßt.

Dieser Vorgang für (numerische) Funktionen überträgt sich ohne weiteres auf Abbildungen der Punktmenge $\mathfrak{B} < R^n$ in einen euklidischen Raum R^m, nur daß hier als Ableitung im Punkte nicht eine Linearform des $\mathfrak{R}^n$, sondern eine lineare Abbildung des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$ erscheint (§ 3).

Die Tatsache, daß die Gesamtheit der linearen bzw. multilinearen Abbildungen eines euklidischen Raumes in einen anderen wieder einen euklidischen Raum bildet, ermöglicht die koordinatenfreie Definition höherer Ableitungen (§ 4). Beispielsweise erhält man als Ableitung einer auf $\mathfrak{B}$ differenzierbaren Funktion $f(P)$ eine Abbildung von $\mathfrak{B}$ in den Raum der Linearformen des $\mathfrak{R}^n$. Die Ableitung dieser Abbildung, eine im allgemeinen nicht symmetrische Bilinearform des $\mathfrak{R}^n$, ist die zweite Ableitung von $f(P)$. Falls $\mathfrak{B}$ eine eingebettete Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, ergibt sich durch Reduktion dieser Bilinearform auf den Tangentialraum von $\mathfrak{B}$ gerade die zweite kovariante Ableitung von $f(P)$. Während also unter den beiden oben angegebenen Möglichkeiten zur eindeutigen Festlegung der Ableitung die erste die Existenz einer Parallelverschiebung zur Definition höherer Ableitungen erfordert, ergibt die zweite Möglichkeit gerade einen Weg, kovariante Ableitung und Parallelverschiebung zu definieren.

§ 1. Tangential- und Normalenräume.

1. Bezüglich der Notation treffen wir folgende Vereinbarungen:

Sind P und Q zwei Punkte des n-dimensionalen euklidischen Raumes R^n, so bezeichne $\overrightarrow{PQ}$ den Vektor, der von P aus abgetragen den Endpunkt Q besitzt, und $\overline{PQ}$ die Entfernung von P und Q, also $\overline{PQ} = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$. Unter Projektionen sollen stets orthogonale Projektionen verstanden werden. Im $R^{n+m} = R^n \times R^m$ bezeichnen wir die Punkte durch $\{P, Q\}$, wobei $P \in R^n$, $Q \in R^m$ ist. Entsprechend wird für Vektoren verfahren.

2. Sei $\mathfrak{B}$ eine Punktmenge im R^n. Für $P_0 \in \mathfrak{B}$, $P \in \mathfrak{B}$, $P \neq P_0$ heiße $\overrightarrow{P_0 P}$ *Sekante* von $\mathfrak{B}$, der Einheitsvektor $\overline{P_0 P}^{-1} \cdot \overrightarrow{P_0 P}$ *normierte Sekante.*

Sei $P_0 \in \mathfrak{B}$. Falls ein Vektor $\mathfrak{n}$ so beschaffen ist, daß für jede Folge von Punkten P_k aus $\mathfrak{B}$, für welche $P_k \neq P_0$ und $\lim P_k = P_0$ ist, das Skalarprodukt

$$\left(\mathfrak{n}, \frac{\overrightarrow{P_0 P_k}}{\overline{P_0 P_k}}\right)$$

nach Null konvergiert, so heiße $\mathfrak{n}$ *Normale* von $\mathfrak{B}$ in P_0. Ist P_0 isolierter Punkt von $\mathfrak{B}$, so ist jeder Vektor des R^n Normale von $\mathfrak{B}$ in P_0. Die Normalen von $\mathfrak{B}$ in P_0 bilden offenbar einen linearen Raum, den *Normalenraum* von $\mathfrak{B}$ in P_0, der mit $\mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B})$ bezeichnet werde.

3. Wenn für eine Folge $P_k \to P_0$ von Punkten $P_k \neq P_0$ aus $\mathfrak{B}$ die normierten Sekanten $\overline{P_0 P_k}^{-1} \cdot \overrightarrow{P_0 P_k}$ gegen einen Vektor $\mathfrak{v}$ konvergieren, so sagen wir, daß die Folge P_k in P_0 *mit der Richtung* $\mathfrak{v}$ *mündet* und daß $\mathfrak{v}$ *mögliche Richtung* von $\mathfrak{B}$ in P_0 ist. Jede solche mögliche Richtung ist also Richtungsvektor einer Halbtangente von $\mathfrak{B}$ in P_0 und umgekehrt. Der lineare Raum, der von den möglichen Richtungen von $\mathfrak{B}$ in P_0 aufgespannt wird, heiße *Tangentialraum* von $\mathfrak{B}$ in P_0 und werde mit $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ bezeichnet.

Es gilt:

Hilfssatz 1. *Der Normalenraum* $\mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B})$ *und der Tangentialraum* $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ *sind orthogonale Supplemente bezüglich des* $\mathfrak{R}^n$.

Beweis. Nach Definition ist $\mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B})$ orthogonal zu allen möglichen Richtungen von $\mathfrak{B}$ in P_0 und damit zu $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$. Es ist noch zu zeigen: Ist ein Vektor $\mathfrak{n}$ orthogonal zu allen möglichen Richtungen von $\mathfrak{B}$ in P_0, so ist $\mathfrak{n}$ Normale von $\mathfrak{B}$ in P_0.

Wäre dies nicht der Fall, so existierte eine Folge $P_k \to P_0$ von Punkten $P_k \neq P_0$ aus $\mathfrak{B}$, für welche

$$(1) \qquad \left(\mathfrak{n}, \frac{\overrightarrow{P_0 P_k}}{\overline{P_0 P_k}}\right)$$

nicht nach Null konvergierte. Es gäbe dann eine Teilfolge P'_k der Folge P_k, für welche der Betrag des Skalarproduktes (1) eine positive untere Schranke, etwa ε, besäße. Wegen der Kompaktheit der Richtungen (Einheitsvektoren) im R^n enthielte aber die Folge P'_k eine Teilfolge P''_k, für welche die normierten Sekanten

$$\frac{\overrightarrow{P_0 P''_k}}{\overline{P_0 P''_k}}$$

konvergierten, etwa gegen den Vektor $\mathfrak{v}$. Es wäre dann $\mathfrak{v}$ mögliche Richtung von $\mathfrak{B}$ in P_0 und

$$|(\mathfrak{n}, \mathfrak{v})| \geqq \varepsilon > 0$$

im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{n}$ orthogonal zu allen möglichen Richtungen von $\mathfrak{B}$ in P_0 sein sollte.

4. Sei $\mathfrak{G}$ eine Punktmenge im $R^n \times R^m$, $\mathfrak{B}$ die Projektion von $\mathfrak{G}$ in den R^n. Ferner sei $\{P_0, Q_0\} \in \mathfrak{G}$. Dann gilt

Hilfssatz 2. *Ist $\mathfrak{n}$ Normale von $\mathfrak{B}$ in P_0 bezüglich des R^n, so ist $\{\mathfrak{n}, \vec{0}\}$ Normale von $\mathfrak{G}$ in $\{P_0, Q_0\}$.*

Beweis. Sei $\{P_k, Q_k\}$ eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{G}$ mit $\{P_k, Q_k\} \neq \{P_0, Q_0\}$ und $\lim \{P_k, Q_k\} = \{P_0, Q_0\}$. Für diejenigen Punkte dieser Folge, für welche $P_k = P_0$ ist, gilt offenbar

$$\left(\{\mathfrak{n}, \vec{0}\}, \frac{\{\overrightarrow{P_0 P_k}, \overrightarrow{Q_0 Q_k}\}}{[\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{Q_0 Q_k}^2]^{\frac{1}{2}}}\right) = 0.$$

Es kann daher im weiteren von der Folge $\{P_k, Q_k\}$ angenommen werden, daß stets $P_k \neq P_0$ ist. Nach Wahl von $\mathfrak{n}$ gilt dann

$$\lim \left(\mathfrak{n}, \frac{\overrightarrow{P_0 P_k}}{\overline{P_0 P_k}}\right) = 0.$$

Wegen $\overline{P_0 P_k}^2 \leqq \overline{P_0 P_k}^2 + \overline{Q_0 Q_k}^2$ folgt daraus die Behauptung

$$\lim \left(\{\mathfrak{n}, \vec{0}\}, \frac{\{\overrightarrow{P_0 P_k}, \overrightarrow{Q_0 Q_k}\}}{[\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{Q_0 Q_k}^2]^{\frac{1}{2}}}\right) = 0.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt unmittelbar:

Hilfssatz 3. *Die Projektion von $\mathfrak{T}(\{P_0, Q_0\}, \mathfrak{G})$ in den R^n ist in $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ enthalten.*

§ 2. Differenzierbarkeit von Funktionen.

1. Sei $\mathfrak{B}$ eine Punktmenge im R^n, $y = f(P)$ eine auf $\mathfrak{B}$ definierte Funktion. Der Graph $\mathfrak{G}$ von $f(P)$ im $R^n \times R^1$ ist die Menge der Punkte $\{P, f(P)\}$ mit $P \in \mathfrak{B}$. In $R^n \times R^1$ bezeichnen wir den zweiten Faktor auch als y-Achse.

Wenn $\mathfrak{a}$ ein Vektor des R^n ist und P die Punkte des R^n durchläuft, so stellt

$$(2) \qquad y(P) = f(P_0) + (\mathfrak{a}, \overrightarrow{P_0 P}) \qquad (P_0 \in \mathfrak{B})$$

die Gleichung einer Hyperebene im $R^n \times R^1$ durch den Punkt $\{P_0, f(P_0)\}$ dar. Es sei nun im weiteren P_0 Häufungspunkt von $\mathfrak{B}$. Ist dann die Hyperebene (2) so beschaffen, daß für $P \in \mathfrak{B}$, $P \neq P_0$ gilt

$$(3) \qquad \lim_{P \to P_0} \frac{y(P) - f(P)}{\overline{P_0 P}} = \lim_{P \to P_0} \frac{(\mathfrak{a}, \overrightarrow{P_0 P}) - f(P) + f(P_0)}{\overline{P_0 P}} = 0,$$

so soll sie in $\{P_0, f(P)\}$ *berührende Hyperebene* des Graphs $\mathfrak{G}$ heißen. Im Falle, daß mindestens eine solche berührende Hyperebene existiert, heißt $f(P)$ bei Haupt u. Aumann[1]) schwach differenzierbar in P_0 bzw. mindestens differenzierbar bei Haupt, Aumann und Pauc[2]), während von Differenzierbarkeit schlechthin gesprochen wird, wenn es genau eine solche berührende Hyperebene gibt. Wir wollen im folgenden bereits bei Existenz von mindestens einer berührenden Hyperebene sagen, daß $f(P)$ in P_0 *differenzierbar* ist.

2. Um zu einer Festlegung des Gradienten zu gelangen, untersuchen wir, welche Vektoren $\mathfrak{a}$ in (2) zugelassen sind, wenn (2) eine berührende Hyperebene darstellen soll.

Sei $f(P)$ in P_0 differenzierbar und (2) die Gleichung einer in $\{P_0, f(P_0)\}$ berührenden Hyperebene des Graphs. Dann ist $f(P)$ in P_0 stetig, wie aus (2), (3) folgt, und es ist der Vektor $\{\mathfrak{a}, -1\}$ Normale der Hyperebene (2). Er ist auch Normale von $\mathfrak{G}$ im Punkte $\{P_0, f(P_0)\}$. Für das Skalarprodukt von $\{\mathfrak{a}, -1\}$ mit den normierten Sekanten des Graphs:

$$\frac{\{\overrightarrow{P_0P}, f(P) - f(P_0)\}}{[\overline{P_0P}^2 + (f(P) - f(P_0))^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad (P \neq P_0)$$

gilt nämlich

$$\lim_{P \to P_0} \frac{(\mathfrak{a}, \overrightarrow{P_0P}) - f(P) + f(P_0)}{[\overline{P_0P}^2 + (f(P) - f(P_0))^2]^{\frac{1}{2}}} = 0, \tag{4}$$

wie unmittelbar aus (3) folgt.

Sei nun umgekehrt $f(P)$ in P_0 stetig und $\{\mathfrak{a}, -1\}$ Normale von $\mathfrak{G}$ in $\{P_0, f(P_0)\}$. Dann ist (2) die Gleichung einer in $\{P_0, f(P_0)\}$ berührenden Hyperebene des Graphs.

Zum Beweise ist zu zeigen, daß (3) aus (4) folgt. Dies ergibt sich daraus, daß man wegen der Stetigkeit von $f(P)$ in P_0 jede Folge $P_k \to P_0$ mit $P_k \in \mathfrak{B}$, $P_k \neq P_0$ durch Projektion einer gegen $\{P_0, f(P_0)\}$ konvergierten Folge $\{P_k, f(P_k)\}$ erhält, und daraus, daß für keine der betrachteten Folgen P_k

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\overline{P_0P_k}}{[\overline{P_0P_k}^2 + (f(P_k) - f(P_0))^2]^{\frac{1}{2}}} = 0 \tag{5}$$

gelten kann. Würde nämlich (5) für eine solche Folge P_k gelten, so wäre wegen $(\mathfrak{a}, \overrightarrow{P_0P_k})^2 \leqq (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \cdot \overline{P_0P_k}^2$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(\mathfrak{a}, \overrightarrow{P_0P_k})}{[\overline{P_0P_k}^2 + (f(P_k) - f(P_0))^2]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

und damit wegen (4)

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(P_k) - f(P_0)}{[\overline{P_0P_k}^2 + (f(P_k) - f(P))^2]^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

woraus unmittelbar ein Widerspruch zu (5) folgt.

Nach dem Vorangehenden ist die Differenzierbarkeit von $f(P)$ in P_0 gleichwertig damit, daß $f(P)$ in P_0 stetig ist und daß der Graph von $f(P)$ in $\{P_0, f(P_0)\}$ eine Normale der Gestalt $\{\mathfrak{a}, -1\}$ besitzt.

3. Sei nun $f(P)$ in P_0 differenzierbar und seien $\{\mathfrak{a}, -1\}$ und $\{\mathfrak{b}, -1\}$ zwei Normalen von $\mathfrak{G}$ in $\{P_0, f(P_0)\}$. Dann gelten (3), (4) und die entsprechenden Gleichungen mit $\mathfrak{b}$ statt $\mathfrak{a}$. Daraus folgt: Für $P \to P_0$, $P \in \mathfrak{B}$, $P \neq P_0$ gilt

$$\lim_{P \to P_0} \frac{(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}, \overrightarrow{P_0P})}{\overline{P_0P}} = 0,$$

---

[1]) *O. Haupt* u. *G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung 2, 1. Aufl. Berlin 1938.

[2]) *Haupt, Aumann* u. *Pauc*, Differential- und Integralrechnung 2, 2. Aufl. Berlin 1950.

d. h. es ist $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ Normale von $\mathfrak{B}$ in P_0. Ist umgekehrt $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ Normale von $\mathfrak{B}$ in P_0 und $\{\mathfrak{a}, -1\}$ Normale von $\mathfrak{G}$ in $\{P_0, f(P_0)\}$, so ist auch $\{\mathfrak{b}, -1\}$ Normale von $\mathfrak{G}$ in $\{P_0, f(P_0)\}$ wegen Hilfssatz 2[3]). Nunmehr folgt wegen Hilfssatz 1 unmittelbar:

Ist $f(P)$ in P_0 differenzierbar, so gibt es genau eine Normale $\{\mathfrak{a}, -1\}$ von G in $\{P_0, f(P_0)\}$, für welche der Vektor $\mathfrak{a}$ dem Tangentialraum von $\mathfrak{B}$ in P_0 angehört. Der so bestimmte Vektor $\mathfrak{a}$ soll *Gradient* von $f(P)$ in P_0 heißen.

Diese Definition des Gradienten stimmt mit der üblichen überein, falls P_0 innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist.

4. Wir hatten bisher angenommen, daß P_0 Häufungspunkt von $\mathfrak{B}$ ist. Wenn P_0 isolierter Punkt von $\mathfrak{B}$ ist, so besteht der Tangentialraum von $\mathfrak{B}$ in P_0 nur aus dem Nullvektor $\vec{0}$ des R^n, und es ist $\{\vec{0}, -1\}$ Normale von $\mathfrak{G}$ in $\{P_0, f(P)\}$. Auch in diesem Falle bezeichnen wir $f(P)$ als differenzierbar in P_0 und verstehen unter dem Gradienten den Vektor $\vec{0}$.

5. Die Differenzierbarkeit von $f(P)$ in P_0 erwies sich (auch falls P_0 isolierter Punkt von $\mathfrak{B}$ ist) als gleichwertig damit, daß $f(P)$ in P_0 stetig ist und daß eine Normale der Gestalt $\{\mathfrak{a}, -1\}$ an den Graphen $\mathfrak{G}$ in $\{P_0, f(P_0)\}$ existiert. Berücksichtigt man noch, daß wegen Hilfssatz 1 die Existenz einer solchen Normalen gleichbedeutend damit ist, daß $\{\vec{0}, 1\}$ nicht dem Tangentialraum von $\mathfrak{G}$ in $\{P_0, f(P)\}$ angehört, so kann die Differenzierbarkeit folgendermaßen definiert werden:

Die Funktion $f(P)$ heißt im Punkte P_0 ihres Definitionsbereiches $\mathfrak{B} < R^n$ differenzierbar, wenn sie in P_0 stetig ist und wenn im $R^n \times R^1$ der Tangentialraum an den Graph von $f(P)$ im Punkte $\{P_0, f(P_0)\}$ den Vektor $\{\vec{0}, 1\}$ nicht enthält.

6. Man bestätigt leicht[4]): Sind $f(P)$ und $g(P)$ auf derselben Punktmenge $\mathfrak{B} < R^n$ definiert und in $P_0 \in \mathfrak{B}$ differenzierbar, so sind auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ in P_0 differenzierbar und für die Gradienten in P_0 gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f \pm g) &= \operatorname{grad} f \pm \operatorname{grad} g \\ \operatorname{grad}(f \cdot g) &= g \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{grad} g. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus (3): Mündet eine Folge von Punkten P_k aus $\mathfrak{B}$ in P_0 mit der Richtung $\mathfrak{v}$, so ist

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f(P_k) - f(P_0)}{\overline{P_0 P}} = (\operatorname{grad} f, \mathfrak{v})_{P=P_0}, \tag{6}$$

und in P_0 ist grad f Normale der Niveaufläche $f(P) = f(P_0)$, d. h. der Menge derjenigen Punkte von $\mathfrak{B}$, für welche $f(P) = f(P_0)$ ist.

7. Sei wieder $f(P)$ auf $\mathfrak{B} < R^n$ definiert und in $P_0 \in \mathfrak{B}$ differenzierbar. $\mathfrak{D}$ sei eine Punktmenge, für welche gilt: $P_0 \in \mathfrak{D} < \mathfrak{B}$. Betrachtet man $f(P)$ nun nur als auf $\mathfrak{D}$ definiert, so ist diese Funktion ebenfalls in P_0 differenzierbar. Dies folgt aus der Definition der Differenzierbarkeit in Nr. 5, wenn man berücksichtigt, daß der Graph von $f(P)$ mit $\mathfrak{D}$ als Definitionsbereich enthalten ist im Graphen für den Definitionsbereich $\mathfrak{B}$ und Entsprechendes für die Tangentialräume beider Graphen im Punkte $\{P_0, f(P_0)\}$ gilt (vgl. § 1, Nr. 3). Bezeichnen wir die Gradienten in P_0 mit $\operatorname{grad}_{\mathfrak{B}} f$ bzw. $\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} f$, je nachdem $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{D}$ als Definitionsbereich von $f(P)$ angenommen wird, so ist $\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} f$ die Projektion von $\operatorname{grad}_{\mathfrak{B}} f$ in den Tangentialraum von $\mathfrak{D}$ in P_0. Wegen $\mathfrak{D} < \mathfrak{B}$ sind nämlich nach Nr. 2 die Vektoren $\{\operatorname{grad}_{\mathfrak{B}} f, -1\}$ und $\{\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} f, -1\}$ Normalen im Punkte $\{P_0, f(P_0)\}$ des Graphs zum Definitionsbereich $\mathfrak{D}$, woraus nach Nr. 3 folgt, daß $\operatorname{grad}_{\mathfrak{B}} f - \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} f$ Normale von $\mathfrak{D}$ in P_0 ist.

---

[3]) Vgl. *Haupt, Aumann, Pauc*, a. a. O.[2]), 3. 1. 2., 2. Satz (S. 136).

[4]) Vgl. *Haupt, Aumann, Pauc*, a. a. O.[2]), 3. 1. 3. (S. 137), 3. 2. 2. (S. 141).

Beispiel. In einem Gebiet $\mathfrak{B} < R^n$ seien k stetig differenzierbare Funktionen $g_i(P)$ gegeben ($i = 1, 2, \ldots, k$), für welche die Vektoren grad g_i in jedem Punkte von $\mathfrak{B}$ linear unabhängig sind. Ferner sei der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ der Niveauflächen $g_i(P) = 0$ nicht leer. Der Auflösungssatz für Systeme impliziter Funktionen besagt dann insbesondere: Für $P \in \mathfrak{D}$ spannen die Vektoren grad g_i den Normalenraum von $\mathfrak{D}$ in P auf, und jeder Einheitsvektor des Tangentialraumes $\mathfrak{T}(P, \mathfrak{D})$ ist mögliche Richtung. Ist nun weiter in $\mathfrak{B}$ eine differenzierbare Funktion $f(P)$ gegeben, so ist sie nach dem Obigen auch auf $\mathfrak{D}$ differenzierbar und für $P \in \mathfrak{D}$ gilt eine Beziehung der Gestalt

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} f = \operatorname{grad}_{\mathfrak{B}} f - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \operatorname{grad} g_i.$$

Da nun $\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} f$ Vektor des Tangentialraumes $\mathfrak{T}(P, \mathfrak{D})$, die Vektoren grad g_i Normalen von $\mathfrak{D}$ in P sind, muß gelten:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\operatorname{grad} g_i, \operatorname{grad} g_j) = (\operatorname{grad}_{\mathfrak{B}} f, \operatorname{grad} g_j) \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, k,$$

woraus die Koeffizienten λ_i wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren grad g_i berechnet werden können.

Soll nun $f(P)$ in $P_0 \in \mathfrak{D}$ ein Extremum unter den Nebenbedingungen $g_i(P) = 0$ annehmen, so muß dort $\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} f$ verschwinden. Wegen (6) folgt dies aus $\operatorname{grad}_{\mathfrak{D}} f \in \mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{D})$ und der Tatsache, daß in $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{D})$ jeder Einheitsvektor mögliche Richtung von $\mathfrak{D}$ in P_0 ist. Man erhält damit aus (7) die Lagrangeschen Gleichungen.

§ 3. Differenzierbarkeit von Abbildungen.

1. Sei $\mathfrak{B}$ wieder eine Punktmenge des R^n und $Q = \varphi(P)$ eine Abbildung von $\mathfrak{B}$ in einen m-dimensionalen euklidischen Raum R^m. Wir wollen dabei den R^n auch als x-Raum, den R^m als y-Raum bezeichnen. In $R^n \times R^m$ betrachten wir den Graph $\mathfrak{G}$ der Abbildung, also die Menge der Punkte $\{P, \varphi(P)\}$ mit $P \in \mathfrak{B}$. Die Definition der Differenzierbarkeit von Funktionen in § 2, Nr. 5 legt es nahe, zu definieren:

Die Abbildung $Q = \varphi(P)$ heißt differenzierbar in $P_0 \in \mathfrak{B}$, wenn sie in P_0 stetig ist und wenn der Tangentialraum $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ des Graphs $\mathfrak{G}$ im Punkte $\{P_0, \varphi(P_0)\}$ keinen von Null verschiedenen Vektor der Gestalt $\{\vec{0}, \mathfrak{a}\}$ enthält.

2. *Ist $\varphi(P)$ in P_0 differenzierbar, so induziert die Projektion von $R^n \times R^m$ auf R^n eine umkehrbar eindeutige Abbildung Π_1 von $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ auf $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$.*

Beweis. Aus Hilfssatz 3 folgt, daß $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ durch Π_1 in $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ abgebildet wird. Diese Abbildung ist umkehrbar eindeutig, da andernfalls $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ einen von Null verschiedenen Vektor der Gestalt $\{\vec{0}, \mathfrak{a}\}$ enthielte, was der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $\varphi(P)$ in P_0 widerspräche. Um noch nachzuweisen, daß $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ durch Π_1 *auf* $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ abgebildet wird, genügt es zu zeigen, daß jede mögliche Richtung von $\mathfrak{B}$ in P_0 Projektion eines Vektors von $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ ist.

Sei P_k eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{B}$, die in P_0 mit der Richtung $\mathfrak{v}$ mündet. Wegen der Stetigkeit von $\varphi(P)$ in P_0 konvergiert dann die Folge $\{P_k, \varphi(P_k)\}$ gegen $\{P_0, \varphi(P_0)\}$. Die entsprechenden normierten Sekanten von $\mathfrak{G}$:

$$\text{(8)} \qquad \frac{\{\overrightarrow{P_0 P_k}, \overline{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}\}}{[\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}^2]^{\frac{1}{2}}}$$

enthalten wegen der Kompaktheit der Richtungen im $R^n \times R^m$ eine Teilfolge, welche konvergiert, etwa gegen den Einheitsvektor $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$[5]. Es kann daher angenommen werden, daß

[5]) Tatsächlich ist die Folge (8) selbst konvergent.

$$(9) \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\overrightarrow{P_0 P_k}}{[\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}^2]^{\frac{1}{2}}} = \mathfrak{x}$$

gilt und damit

$$(10) \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\overline{P_0 P_k}}{[\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}^2]^{\frac{1}{2}}} = |\mathfrak{x}|.$$

Wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $\varphi(P)$ in P_0 und wegen

$$\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\} \in \mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$$

ist $|\mathfrak{x}| \neq 0$. Aus (9) und (10) folgt daher

$$\mathfrak{v} = \lim \frac{\overrightarrow{P_0 P_k}}{\overline{P_0 P_k}} = \frac{\mathfrak{x}}{|\mathfrak{x}|},$$

d. h. $\mathfrak{v}$ ist Projektion des Vektors $\frac{1}{|\mathfrak{x}|}\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\} \in \mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

3. Neben den euklidischen Räumen R^n, R^m, $R^n \times R^m$, die wir als Punkträume aufgefaßt haben, betrachten wir jetzt die entsprechenden Vektorräume $\mathfrak{R}^n$, $\mathfrak{R}^m$, $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$. Die in der Definition der Differenzierbarkeit formulierte Aussage, daß der Tangentialraum des Graphs keinen Vektor $\{\vec{0}, \mathfrak{a}\}$ mit $\mathfrak{a} \neq \vec{0}$ enthält, ist gleichwertig damit, daß sich für eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ die Abbildung auf den linearen Teilräumen $\vec{0} \times \mathfrak{R}^m$ und $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ voneinander unabhängig vorgeben läßt[6]; insbesondere ist die Aussage gleichwertig damit, daß es eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ auf $\mathfrak{R}^m$ gibt, welche auf $\mathfrak{R}^m$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung induziert und welche $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ annulliert, d. h. jeden Vektor von $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ in den Nullvektor des $\mathfrak{R}^m$ abbildet.

Berücksichtigt man, daß nach Hilfssatz 1

$$\mathfrak{R}^n = \mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B}) \times \mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B})$$

ist, so erkennt man entsprechend unter Benutzung des Resultats von Nr. 2, daß im Falle der Differenzierbarkeit von $\varphi(P)$ in P_0 eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ in den $\mathfrak{R}^m$ vollständig bestimmt ist, wenn sie für die Teilräume $\vec{0} \times \mathfrak{R}^m$, $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ und $\mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B}) \times \vec{0}$ bekannt ist, und daß sie sich für diese Teilräume unabhängig voneinander vorgeben läßt. Wir erhalten damit

Satz 1. *Die auf der Punktmenge $\mathfrak{B} \subset R^n$ definierte Abbildung $Q = \varphi(P)$ von $\mathfrak{B}$ in den R^m ist im Punkte $P_0 \in \mathfrak{B}$ genau dann differenzierbar, wenn sie in P_0 stetig ist und wenn es eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ auf den $\mathfrak{R}^m$ gibt, welche auf $\mathfrak{R}^m$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung induziert und welche $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ annulliert.*

Im Falle der Differenzierbarkeit gibt es genau eine lineare Abbildung σ von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ in den $\mathfrak{R}^m$ mit den Eigenschaften:

1) *σ induziert für die Vektoren $\mathfrak{y}$ des $\mathfrak{R}^m$ die Abbildung $\mathfrak{y} \to -\mathfrak{y}$.*

2) *σ annulliert $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0), \mathfrak{G})\}$.*

3) *σ induziert im $\mathfrak{R}^n$ eine lineare Abbildung, welche $\mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B})$ annulliert.*

Die im $\mathfrak{R}^n$ von σ induzierte Abbildung des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$ nennen wir die *Ableitung* von $\varphi(P)$ in P_0 (in bezug auf den Definitionsbereich $\mathfrak{B}$) und bezeichnen sie durch $\varphi'(P_0, d\mathfrak{x})$, wobei $d\mathfrak{x}$ die Vektoren des $\mathfrak{R}^n$ bezeichnet. Im Falle $m = 1$, $\varphi(P) = f(P)$

---

[6]) Eine Basis des Tangentialraumes und eine Basis von $\vec{0} \times \mathfrak{R}^m$ als Teilraum von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ bilden zusammen ein System linear unabhängiger Vektoren in $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$, das sich zu einer Basis von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ ergänzen läßt.

ist die lineare Abbildung σ gerade das Skalarprodukt der Vektoren von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1$ mit dem Vektor $\{\operatorname{grad} f, -1\}$, die Ableitung $f'(P_0, d\mathfrak{x})$ ist das Skalarprodukt $(\operatorname{grad} f, d\mathfrak{x})$, also das vollständige Differential.

4. Wir bezeichnen im R^m die Menge der Bildpunkte von $\mathfrak{B}$ bezüglich $\varphi(P)$ mit $\varphi(\mathfrak{B})$. Für die Ableitung von $\varphi(P)$ in P_0, die als lineare Abbildung des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$ definiert ist, gilt genauer:

$\varphi'(P_0, d\mathfrak{x})$ *bildet den* $\mathfrak{R}^n$ *in* $\mathfrak{T}(\varphi(P_0), \varphi(\mathfrak{B}))$ *ab.*

Beweis. Da $\mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B})$ von $\varphi'(P_0, d\mathfrak{x})$ annulliert wird, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ in $\mathfrak{T}(\varphi(P_0), \varphi(\mathfrak{B}))$ abgebildet wird. Wie in Nr. 2 bezeichne Π_1 die Projektion von $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ auf $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$. Vermöge Π_1^{-1} entspricht dann jedem Vektor $d\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ ein Vektor $\{d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}\}$ in $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$. Für die in Satz 1 definierte Abbildung gilt wegen Eigenschaft 2):

$$\sigma(\{d\mathfrak{x}, d\mathfrak{y}\}) = \vec{0}$$

oder wegen der Linearität von σ:

$$\sigma(\{d\mathfrak{x}, \vec{0}\}) = -\sigma(\{\vec{0}, d\mathfrak{y}\}).$$

Wegen Eigenschaft 1) von σ folgt hieraus

$$\sigma(\{d\mathfrak{x}, \vec{0}\}) = d\mathfrak{y}$$

und damit

$$\varphi'(P_0, d\mathfrak{x}) = d\mathfrak{y}.$$

Auf $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ ist daher

$$\varphi'(P_0, d\mathfrak{x}) = \Pi_2 \Pi_1^{-1} d\mathfrak{x}, \tag{11}$$

wenn Π_2 die Projektion von $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ in den $\mathfrak{R}^m$ bezeichnet. Nach Hilfssatz 3 wird $\mathfrak{T}\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ durch Π_2 in $\mathfrak{T}(\varphi(P_0), \varphi(\mathfrak{B}))$ abgebildet, woraus die Behauptung folgt.

5. Auf $\mathfrak{B} < R^n$ seien definiert eine Abbildung $Q = \varphi(P)$ von $\mathfrak{B}$ in den R^p und eine Abbildung $S = \psi(P)$ von $\mathfrak{B}$ in den R^q. Damit ist auch eine Abbildung $P \to \{\varphi(P), \psi(P)\}$ von $\mathfrak{B}$ in $R^p \times R^q$ definiert, die wir mit $\chi(P) = \varphi(P) \times \psi(P)$ bezeichnen wollen. Es gilt

Satz 2. *Die Abbildung* $\chi(P) = \varphi(P) \times \psi(P)$ *von* $\mathfrak{B} < R^n$ *in* $R^p \times R^q$ *ist in* $P_0 \in \mathfrak{B}$ *genau dann differenzierbar, wenn* $\varphi(P)$ *und* $\psi(P)$ *in* P_0 *differenzierbar sind. Für die Ableitungen gilt:*

$$\chi'(P_0, d\mathfrak{x}) = \varphi'(P_0, d\mathfrak{x}) \times \psi'(P_0, d\mathfrak{x}). \tag{12}$$

Beweis. Offenbar ist $\chi(P)$ genau dann in P_0 stetig, wenn $\varphi(P)$ und $\psi(P)$ es sind. Der Graph $\mathfrak{G}$ von $\chi(P)$ im $R^n \times R^p \times R^q$ ist die Menge der Punkte $\{P, \varphi(P), \psi(P)\}$ mit $P \in \mathfrak{B}$. Zeichnet man im R^p und R^q je einen Punkt 0 aus, so ist R^p isomorph zu $R^p \times 0$, und es kann $\varphi(P)$ auch als Abbildung von $\mathfrak{B}$ in $R^p \times 0$ aufgefaßt werden. Die Differenzierbarkeitseigenschaften von $\varphi(P)$ sind hiervon offenbar unabhängig. Der Graph $\mathfrak{G}_1$ von $\varphi(P)$ in $R^n \times R^p \times R^q$ ist dabei die Menge der Punkte $\{P, \varphi(P), 0\}$. Unter entsprechenden Vereinbarungen ist der Graph $\mathfrak{G}_2$ von $\psi(P)$ die Menge der Punkte $\{P, 0, \psi(P)\}$.

Seien nun $\varphi(P)$ und $\psi(P)$ in P_0 differenzierbar. Nach Satz 1 gibt es dann genau eine lineare Abbildung σ_1 von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^q$ in $\mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^q$ mit den Eigenschaften:

a$_1$) σ_1 induziert auf $\mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^q$ die Abbildung $\{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\} \to \{-\mathfrak{y}, \vec{0}\}$.

b$_1$) σ_1 annulliert $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0), 0\}, \mathfrak{G}_1)$.

c$_1$) σ_1 induziert auf $\mathfrak{R}^n$ eine Abbildung, die $\mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B})$ annulliert.

Entsprechend gibt es genau eine lineare Abbildung σ_2 von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^q$ in $\mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^q$ mit den Eigenschaften:

a$_2$) σ_2 induziert auf $\mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^q$ die Abbildung $\{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\} \to \{\vec{0}, -\mathfrak{z}\}$.

b$_2$) σ_2 annulliert $\mathfrak{T}(\{P_0, 0, \psi(P_0)\}, \mathfrak{G}_2)$.

c$_2$) σ_2 induziert auf $\mathfrak{R}^n$ eine Abbildung, die $\mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B})$ annulliert.

Die lineare Abbildung $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ hat dann die Eigenschaften:

a) σ induziert auf $\mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^q$ die Abbildung $\{\mathfrak{y}, \mathfrak{z}\} \to \{-\mathfrak{y}, -\mathfrak{z}\}$.

b) σ annulliert $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0), \psi(P_0)\}, \mathfrak{G})$.

c) σ induziert auf $\mathfrak{R}^n$ eine Abbildung, die $\mathfrak{N}(P_0, \mathfrak{B})$ annulliert.

Die Eigenschaften a) und c) von σ sind offenbar, b) ergibt sich folgendermaßen: Sei $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}$ ein beliebiger Vektor in $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0), \psi(P_0)\}, \mathfrak{G})$. Nach Hilfssatz 3 ist dann $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \vec{0}\}$ Vektor von $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0), 0\}, \mathfrak{G}_1)$. Dieser Vektor wird wegen b$_1$) von σ_1 annulliert. Wegen a$_1$) annulliert σ_1 auch $\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}$. Entsprechend schließt man für σ_2 und erhält b). Aus Satz 1 folgt damit die Differenzierbarkeit von $\chi(P)$ in P_0.

σ_1 induziert im $\mathfrak{R}^n$ offenbar die Abbildung $\varphi'(P_0, d\mathfrak{x}) \times \vec{0}$, σ_2 entsprechend $\vec{0} \times \psi'(P_0, d\mathfrak{x})$ und daher $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ im $\mathfrak{R}^n$ die Abbildung (12).

Es werde nun umgekehrt $\chi(P)$ als differenzierbar in P_0 vorausgesetzt. Dann existiert eine lineare Abbildung σ von $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^q$ in $\mathfrak{R}^p \times \mathfrak{R}^q$ mit den Eigenschaften a), b), c). σ induziert in $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^p$ eine lineare Abbildung σ_3 mit den Eigenschaften:

a$_3$) σ_3 induziert im $\mathfrak{R}^p$ die Abbildung $\mathfrak{y} \to -\mathfrak{y}$.

b$_3$) σ_3 annulliert die Projektion von $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0), \psi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ in $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^p$.

Nach Satz 1 folgt hieraus die Differenzierbarkeit von $\varphi(P)$ in P_0, wenn noch gezeigt wird, daß die Projektion von $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0), \psi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ in $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^p$ gerade der Tangentialraum $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G}_1)$ des Graphs $\mathfrak{G}_1$ von $\varphi(P)$ ist. Wegen der Hilfssätze 1 und 2 genügt es zu zeigen: Ist $\{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \vec{0}\}$ Normale von $\mathfrak{G}$ in $\{P_0, \varphi(P_0), \psi(P_0)\}$, so ist $\{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2\}$ Normale von $\mathfrak{G}_1$ in $\{P_0, \varphi(P_0)\}$. Wegen der Stetigkeit von $\chi(P)$ und $\varphi(P)$ in P_0 heißt das, daß für jede Folge $P_k \to P_0$ ($P_k \in \mathfrak{B}$, $P_k \neq P_0$) aus

$$\lim_{k\to\infty} (\{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2\}, \{\overrightarrow{P_0 P_k}, \overrightarrow{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}\}) \cdot [\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}^2 + \overline{\psi(P_0)\,\psi(P_k)}^2]^{\frac{1}{2}} = 0$$

folgen muß

$$\lim_{k\to\infty} (\{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2\}, \{\overrightarrow{P_0 P_k}, \overrightarrow{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}\}) \cdot [\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}^2]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dies ist sicher der Fall, wenn es keine Folge $P_k \to P_0$ gibt, für welche

$$\frac{\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}^2}{\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}^2 + \overline{\psi(P_0)\,\psi(P_k)}^2} \longrightarrow 0$$

gilt. Dieser Bruch ist aber nicht kleiner als

$$\frac{\overline{P_0 P_k}^2}{\overline{P_0 P_k}^2 + \overline{\varphi(P_0)\,\varphi(P_k)}^2 + \overline{\psi(P_0)\,\psi(P_k)}^2},$$

und dieser letzte Bruch kann nicht nach Null gehen, da man sonst für eine geeignete Teilfolge von P_k eine Folge normierter Sekantenvektoren von $\mathfrak{G}$ erhielte, die gegen einen Einheitsvektor der Gestalt $\{\vec{0}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}\}$ aus $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0), \psi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ konvergierte, was der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $\chi(P)$ in P_0 widerspricht. Für $\psi(P)$ schließt man entsprechend. Satz 2 ist damit bewiesen.

Aus Satz 2 folgt als

Korollar. *Es sei $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein orthonormales Koordinatensystem im R^m. Durch die auf der Punktmenge $\mathfrak{B} < R^n$ definierten Funktionen $y_i = y_i(P)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) sei*

eine Abbildung von $\mathfrak{B}$ in den R^m gegeben. Die Abbildung ist in $P_0 \in \mathfrak{B}$ genau dann differenzierbar, wenn es die Funktionen $y_i(P)$ sind.

Ist auch im R^n ein orthonormales Koordinatensystem eingeführt, so läßt sich die Ableitung $\varphi'(P_0, d\mathfrak{x})$ darstellen durch eine *Funktionalmatrix* von m Zeilen und n Spalten. In den Zeilen dieser Funktionalmatrix stehen die Gradienten der Funktionen $y_i(P)$ im Punkte P_0.

6. Ohne Schwierigkeit erhält man die Gültigkeit [7]) der

Kettenregel. *Es sei $Q = \varphi(P)$ eine Abbildung der Punktmenge $\mathfrak{B} < R^n$ in den R^p auf die Punktmenge $\varphi(\mathfrak{B}) < R^p$. Auf einer Punktmenge $\mathfrak{C} < R^p$, welche $\varphi(\mathfrak{B})$ umfaßt, sei eine Abbildung $S = \psi(Q)$ von $\mathfrak{C}$ in den R^q definiert. Ist dann $\varphi(P)$ in $P_0 \in \mathfrak{B}$ differenzierbar und $\psi(Q)$ in $\varphi(P_0)$ differenzierbar, so ist die zusammengesetzte Abbildung $\chi(P) = \psi(\varphi(P))$ von $\mathfrak{B}$ in den R^q differenzierbar in P_0, und man erhält die Ableitung von $\chi(P)$ in P_0 dadurch, daß man die linearen Abbildungen $d\mathfrak{y} = \varphi'(P_0, d\mathfrak{x})$ des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^p$ und $\psi'(\varphi(P_0), d\mathfrak{y})$ des $\mathfrak{R}^p$ in den $\mathfrak{R}^q$ hintereinander ausführt:*

$$\chi'(P_0, d\mathfrak{x}) = \psi'(\varphi(P_0), \varphi'(P_0, d\mathfrak{x})). \tag{13}$$

7. Schließlich ergibt sich in naheliegender Weise auch die

Ableitung der Umkehrabbildung. *Es sei $Q = \varphi(P)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge $\mathfrak{B} < R^n$ auf die Menge $\mathfrak{C} < R^m$. Ferner sei $\varphi(P)$ in $P_0 \in \mathfrak{B}$ differenzierbar. Unter diesen Voraussetzungen ist $\varphi^{-1}(Q)$ in $\varphi(P_0)$ genau dann differenzierbar, wenn $\varphi^{-1}(Q)$ in $\varphi(P_0)$ stetig ist und wenn $\varphi'(P_0, d\mathfrak{x})$ keinen Einheitsvektor von $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ annulliert. Die Ableitung von $\varphi^{-1}(Q)$ in $\varphi(P_0)$ induziert dann in $\mathfrak{T}(\varphi(P_0), \mathfrak{C})$ eine lineare Abbildung auf $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$, welche die Inverse derjenigen linearen Abbildung ist, die von $\varphi'(P_0, d\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ induziert wird.*

Da nämlich im $R^n \times R^m$ der Graph $\mathfrak{G}$ von $\varphi(P)$ gleichzeitig als Graph von $\varphi^{-1}(Q)$ aufgefaßt werden kann, ist die Aussage, daß durch $\varphi'(P_0, d\mathfrak{x})$ kein Einheitsvektor von $\mathfrak{T}(P_0, \mathfrak{B})$ annulliert wird, nach Nr. 4 gleichwertig damit, daß $\mathfrak{T}(\{P_0, \varphi(P_0)\}, \mathfrak{G})$ keinen von Null verschiedenen Vektor der Gestalt $\{\mathfrak{a}, \vec{0}\}$ enthält. Daraus folgt die Differenzierbarkeit von $\varphi^{-1}(Q)$ in $\varphi(P_0)$ wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $\varphi^{-1}(Q)$ in $\varphi(P_0)$. Die Aussage über die induzierten linearen Abbildungen der Tangentialräume folgt aus (11).

§ 4. Kovariante und höhere Ableitungen.

1. Die linearen Abbildungen des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$ bilden einen Vektorraum, in welchem auf folgende Weise ein *Skalarprodukt* definiert werden kann: Man führe im $\mathfrak{R}^n$ und im $\mathfrak{R}^m$ orthonormale Basen ein. Eine lineare Abbildung τ des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$ wird dann dargestellt durch eine Matrix von m Zeilen und n Spalten. Für zwei lineare Abbildungen τ_1 und τ_2 des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$ bilde man die Summe der Produkte entsprechender Glieder in den ihnen zugeordneten Matrizen. Diese Summe hat die Eigenschaften eines Skalarproduktes und ist unabhängig davon, wie die orthonormalen Basen im $\mathfrak{R}^n$ und $\mathfrak{R}^m$ gewählt werden. Der Vektorraum der linearen Abbildungen des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$ wird damit zu einem euklidischen Raum der Dimension $n \cdot m$.

2. Sei $\varphi(P)$ eine Abbildung von $\mathfrak{B} < R^n$ in den R^m, die auf $\mathfrak{B}$, d. h. in jedem Punkte von $\mathfrak{B}$, differenzierbar ist. Durch die Ableitung $\varphi'(P, d\mathfrak{x})$ ist dann jedem Punkte von $\mathfrak{B}$ eine lineare Abbildung des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$ zugeordnet, wodurch man eine Abbildung $\chi(P)$ von $\mathfrak{B}$ in den Raum der linearen Abbildungen des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$ erhält. Ist $\chi(P)$ in einem Punkte $P_0 \in \mathfrak{B}$ differenzierbar, so wird man $\chi'(P_0, d\mathfrak{x})$ als zweite Ableitung von $\varphi(P)$ in P_0 auffassen. $\chi'(P_0, d\mathfrak{x})$ ist eine lineare Abbildung des $\mathfrak{R}^n$ in den Raum der linearen Ab-

[7]) Vgl. *Haupt, Aumann, Pauc*, a. a. O.[2]), 3. 1. 3., 2. Satz (S. 138).

bildungen des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$, also eine (im allgemeinen nicht symmetrische) bilineare Abbildung des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^m$. Höhere Ableitungen lassen sich entsprechend definieren. Insbesondere ist für eine auf $\mathfrak{B}$ definierte (numerische) Funktion die n-te Ableitung in einem Punkte eine n-fache Linearform. Für einen inneren Punkt von $\mathfrak{B}$ ist diese gerade das n-te vollständige Differential, wie leicht aus dem Korollar zu Satz 2 folgt.

3. Im R^p sei ein orthonormales Koordinatensystem $u^1, u^2, \ldots, u^p$ eingeführt. Durch eine umkehrbar eindeutige, zweimal differenzierbare Abbildung $\varphi(P)$ eines Gebietes $\mathfrak{B} < R^p$ in den R^n $(n \geqq p)$ sei eine p-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit M^p im R^n parametrisiert. Wir wollen annehmen, daß diese Abbildung $\varphi(P)$ hergestellt wird durch die Funktionen

$$x^r = x^r(u^1, u^2, \ldots, u^p) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei $x^1, x^2, \ldots, x^n$ Koordinaten in einem orthonormalen Koordinatensystem des R^n sind. Die Ableitung dieser Abbildung wird dargestellt durch die Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial x^r}{\partial u^i}\right), \tag{14}$$

wobei r den Zeilen-, i den Spaltenindex bezeichnet. Wie üblich wird von der Parametrisierung vorausgesetzt, daß die Matrix (14) den Rang p hat.

$\varphi(P)$ besitzt eine Umkehrabbildung φ^{-1} von M^p auf $\mathfrak{B} < R^p$, welche nach § 3, Nr. 7 differenzierbar ist. Ihre Ableitung ist so beschaffen, daß der Tangentialvektor

$$\mathfrak{x}_k = \left\{\frac{\partial x^1}{\partial u^k}, \frac{\partial x^2}{\partial u^k}, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial u^k}\right\} \tag{15}$$

von M^p auf den k-ten Basisvektor von $\mathfrak{R}^p$ abgebildet wird und daß jede Normale von M^p (im betrachteten Punkte) annulliert wird. Die Ableitung von φ^{-1} wird also dargestellt durch die Matrix

$$\left(\frac{\partial x^r}{\partial u^k} \cdot g^{ik}\right), \tag{16}$$

wobei r den Spalten-, i den Zeilenindex darstellt, über k zu summieren ist und die Matrix (g^{ik}) wie üblich die Inverse der Matrix (g_{ik}) mit den Gliedern

$$g_{ik} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x^r}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial u^k}$$

darstellt.

4. Es sei nun in jedem Punkte von M^p eine Linearform des $\mathfrak{R}^n$ definiert, welche die Normalen von M^p annulliert und für die Tangentialvektoren (15) die Werte α_k annimmt. Diese Linearform wird dargestellt durch das Skalarprodukt mit dem Vektor

$$\alpha_i \frac{\partial x^r}{\partial u^k} g^{ik} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

des $\mathfrak{R}^n$, also einen Tangentenvektor von M^p mit den kovarianten Komponenten α_i. Wir wollen annehmen, daß die α_i differenzierbare Funktionen auf $\mathfrak{B}$ (also der u^i) sind. Dann ist das Vektorfeld (17) auf M^p differenzierbar (M^p als Punktmenge des R^n), und es kann die Ableitung nach der Kettenregel mittels der Matrix (16) berechnet werden. Man erhält eine Bilinearform des $\mathfrak{R}^n$ mit den Koeffizienten

$$\left[\frac{\partial \alpha_i}{\partial u^h} \frac{\partial x^r}{\partial u^k} g^{ik} + \alpha_i \left\{\frac{\partial^2 x^r}{\partial u^k \partial u^h} g^{ik} + \frac{\partial x^r}{\partial u^k} \frac{\partial g^{ik}}{\partial u^h}\right\}\right] \frac{\partial x^s}{\partial u^j} g^{hj}. \tag{18}$$

Diese Bilinearform des $\mathfrak{R}^n$ induziert im Tangentialraum von M^p eine Bilinearform β, die wir auf die Basis (15) beziehen wollen, d. h. es ist (18) zu überschieben mit

$$\frac{\partial x^r}{\partial u^p} \frac{\partial x^s}{\partial u^q}, \tag{19}$$

wodurch man den Wert β_{pq} von β für das geordnete Tangentenpaar $\mathfrak{x}_p$, $\mathfrak{x}_q$ erhält. Es ergibt sich

$$\beta_{pq} = \frac{\partial \alpha_p}{\partial u^q} - \alpha_i \Gamma^i_{pq} = \alpha_{p;q},$$

wobei Γ_{pq} wie üblich das Christoffelsche Symbol bezeichnet und $\alpha_{p;q}$ die kovariante Ableitung von α_p.

Betrachtet man statt des Vektorfeldes (17) ein tangentiales Vektorfeld von M^p mit den kontravarianten Komponenten α^i, also ein Feld von Vektoren des $\mathfrak{R}^n$ mit den Komponenten

$$\alpha^i \frac{\partial x^r}{\partial u^i} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

so erhält man entsprechend

$$\frac{\partial \alpha^p}{\partial u^q} + \alpha^i \Gamma^p_{iq} = \alpha^p_{;q},$$

wobei nur nach der Differentiation statt mit (19) mit

$$\frac{\partial x^r}{\partial u^i} g^{ip} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial u^q}$$

zu überschieben ist, also q als kovarianter Index auf die Basis (15), p als kontravarianter Index auf die zu (15) duale Basis $\mathfrak{x}_i g^{ip}$ des Tangentialraumes von M^p zu beziehen ist. Entsprechendes kann man offenbar für Tensoren beliebiger Stufe auf M^p ausführen und die Regeln über die kovariante Differentiation tensorieller Produkte beweisen.

5. Nach dem Vorangehenden erhält man die kovariante Ableitung eines Tensorfeldes k-ter Stufe auf M^p dadurch, daß man den Tensor k-ter Stufe als k-fache Linearform im $\mathfrak{R}^n$ auffaßt, die den Wert 0 annimmt, falls einer der Vektoren, von denen die Linearform abhängt, Normale von M^p ist. Dieses Feld von Linearformen wird auf M^p als Punktmenge des R^n differenziert und die entstehende $(k+1)$-fache Linearform des $\mathfrak{R}^n$ auf den Tangentialraum von M^p eingeschränkt.

Man bemerkt, daß nach der Definition der Ableitung in § 3 für eine Funktion auf M^p (skalares Feld) die erste Ableitung mit der kovarianten Ableitung zusammenfällt, während für die zweite Ableitung im Sinne von Nr. 2 noch eine weitere Reduktion auf den Tangentialraum von M^p erforderlich ist, um die zweite kovariante Ableitung zu erhalten. Man könnte diese Diskrepanz noch durch entsprechende Modifikation der Definition höherer Ableitungen in Nr. 2 beseitigen. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, daß man üblicherweise im Falle glatter doppelpunktfreier Kurven ($p = 1$) nicht kovariant differenziert. Beispielsweise kann die übliche Differentiation einer auf der Kurve gegebenen Vektorschar nach der Bogenlänge als Parameter so aufgefaßt werden: Die Ableitung der Vektorschar in einem Punkte der Kurve im Sinne von § 3 ist eine lineare Abbildung des $\mathfrak{R}^n$ in den $\mathfrak{R}^n$, welche alle Kurvennormalen im betrachteten Punkte annulliert. Es reicht daher hin, das Bild des Tangenteneinheitsvektors bezüglich dieser linearen Abbildung zu kennen. Dieses ist gerade der Vektor, der durch die übliche Differentiation nach der Bogenlänge erhalten wird.

Eingegangen 28. Februar 1951.

Eine Kennzeichnung des Systems aller Kreise mit nichtverschwindendem Radius der euklidischen Ebene.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Walter Buckel* in Nördlingen.

Wir betrachten das System S aller Kreise mit nichtverschwindendem Radius der euklidischen Ebene. S ist ein System von Punktmengen des E_2, das folgende Eigenschaften hat:

1) S enthält mindestens zwei verschiedene Elemente.

2) Jedes Element von S enthält mindestens zwei verschiedene Punkte und irgend zwei Punkte ein und desselben Elements lassen sich stets durch ein Kurvenstück (topologisches Bild einer Strecke) verbinden, das ganz in diesem Element verläuft.

3) Zu irgend drei verschiedenen Punkten des E_2 gibt es stets genau ein Element von S, das diese drei Punkte enthält.

4) S geht durch jede Bewegungstransformation des E_2 in sich selbst über.

Wir behaupten: *Die Eigenschaften* 1) *bis* 4) *sind für das System aller Kreise mit nichtverschwindendem Radius unter allen Punktmengensystemen des E_2 kennzeichnend.*

Den Beweis für diese Behauptung führen wir in drei Schritten:

1. Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) bis 4) enthält jeden Kreis mit nichtverschwindendem endlichen Radius als Element.

2. Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) bis 4) enthält jede Gerade als Element.

3. Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) bis 4) enthält darüber hinaus keine weiteren Elemente.

1. Den Beweis für die Behauptung des ersten Schrittes führen wir in zwei Teilen.

1. 1. Jeder Kreis mit nichtverschwindendem endlichen Radius ist eine Teilmenge von genau einem Element A von S.

1. 2. Außer den Punkten dieses Kreises enthält das Element A von S keine weiteren Punkte.

1. 1. Zum Beweis des ersten Teiles, der uns am längsten beschäftigen wird, benötigen wir einige Vorbemerkungen.

1. 1. 1. Wir betrachten ein im E_2 gelegenes *stetiges* Bild eines Kreises. Es heiße c. In Analogie zu den entsprechenden Definitionen für eine Jordankurve (*topologisches* Bild eines Kreises) versuchen wir, ein Äußeres und ein Inneres von c zu definieren. Dazu benutzen wir folgenden Satz:

Zu jeder beschränkten Punktmenge des E_2 gibt es in der nicht leeren Menge aller Kreise von endlichem, aber nicht notwendig von Null verschiedenen Radius, die mit ihrer abgeschlossenen Fläche die gegebene Punktmenge vollständig überdecken, genau einen mit kleinstem Radius.

Der Beweis dieses Satzes darf dem Leser überlassen bleiben.

Der Kreis mit kleinstem Radius, der auf Grund dieses Satzes mit seiner abgeschlossenen Fläche unser stetiges Kreisbild c vollständig überdeckt, heiße k_c. Nun definieren wir:

Unter dem *Äußeren* von c verstehen wir die Gesamtheit aller Punkte P des E_2 mit folgender Eigenschaft:

Zu P gibt es mindestens einen Punkt Q im Äußeren von k_c, derart, daß P und Q durch ein stetiges Bild einer abgeschlossenen Strecke mit einander verbunden werden können, das keinen Punkt von c enthält.

Man sieht nun nacheinander:

Das Äußere von c enthält keinen Punkt von c.

Das Äußere von c enthält alle Punkte des Äußeren von k_c, ist also nicht leer.

Gibt es zu einem Punkt P des E_2 wenigstens einen Punkt Q im Äußeren von k_c, der mit P durch ein stetiges Bild einer abgeschlossenen Strecke verbunden werden kann, das keinen Punkt von c enthält, so gilt dies für alle Punkte im Äußeren von k_c.

Daraus folgt:

Irgend zwei Punkte im Äußeren von c können stets durch ein stetiges Bild einer abgeschlossenen Strecke miteinander verbunden werden, das keinen Punkt von c enthält.

Wir definieren weiter:

Unter dem *Inneren* von c verstehen wir die Gesamtheit aller der Punkte des E_2, die nicht auf c und nicht im Äußern von c liegen.

Durch leicht zu konstruierende Beispiele kann man sich überzeugen, daß es im Gegensatz zu den entsprechenden Verhältnissen bei einer Jordankurve möglich ist, daß das Innere von c leer ist und daß zwei Punkte im Innern von c nicht durch ein stetiges Bild einer Strecke verbunden werden können, das keinen Punkt von c enthält.

Nun formulieren wir einen Hilfssatz, von dem wir im folgenden mehrfach wesentlichen Gebrauch machen werden.

Hilfssatz 1. *Es seien c_1, c_2, c_3 drei stetige Kreisbilder im E_2. Kein Punkt von c_2 liege im Äußeren von c_1 und kein Punkt von c_3 liege im Äußeren von c_2. Ferner sei c ein stetiges Bild einer abgeschlossenen Strecke, das einen Punkt von c_1 mit einem Punkt von c_3 verbindet. Dann haben c und c_2 wenigstens einen Punkt gemein.*

Der Beweis dieses Satzes darf dem Leser überlassen bleiben.

1. 1. 2. Es sei K ein beliebiger Kreis des E_2 mit nicht verschwindendem Radius. Das Ziel unserer Überlegungen ist zunächst, zu zeigen, daß K Teilmenge von genau einem Element A von S ist.

Der Mittelpunkt von K heiße M, der Radius r. Die drei Punkte P_1, P_2, P_3 seien die Ecken eines dem Kreise K einbeschriebenen regulären Dreiecks. Nach Eigenschaft 3) gibt es zu diesen drei Punkten genau ein Element aus S, das diese drei Punkte enthält. Dieses heiße A.

Eine Drehung des E_2 um den Punkt M bezeichnen wir mit dem Buchstaben D. Nun setzen wir einen positiven Drehsinn im E_2 fest und bezeichnen speziell die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ um den Punkt M mit D'. Die Bezeichnung der drei Punkte P_1, P_2, P_3 sei so gewählt, daß $D'(P_1) = P_2$, $D'(P_2) = P_3$, $D'(P_3) = P_1$ ist. Übt man die Drehung D' auf die Punktmenge A aus, so bekommt man die Punktmenge $D'(A)$. Nach Eigenschaft 4) ist $D'(A)$ ebenfalls ein Element von S. Die drei Punkte $D'(P_1)$, $D'(P_2)$, $D'(P_3)$ bestimmen nach Eigenschaft 3) dieses Element eindeutig. Die Menge der drei Punkte $D'(P_1)$, $D'(P_2)$, $D'(P_3)$ ist aber identisch mit der Menge der drei Punkte P_1, P_2, P_3, die das Element A eindeutig bestimmt. Daraus folgt: $D'(A) = A$.

Nach Eigenschaft 2) gibt es ein ganz in A verlaufendes Kurvenstück, das die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Es gibt ein die Punkte P_1 und P_2 verbindendes, ganz in A verlaufendes Kurvenstück, das den Mittelpunkt M von K nicht enthält.

II. Jedes die Punkte P_1 und P_2 verbindende, ganz in A verlaufende Kurvenstück enthält den Mittelpunkt M von K.

1. 1. 3. Zur Erledigung des Falles I betrachten wir ein die Punkte P_1 und P_2 verbindendes, ganz in A verlaufendes Kurvenstück, das den Punkt M nicht enthält, und bezeichnen es mit C_1. Weiter betrachten wir die Kurvenstücke $C_2 = D'(C_1)$ und $C_3 = D'(C_2)$. Da C_1 ganz in A verläuft, verlaufen wegen $D'(A) = A$ auch C_2 und C_3 ganz in A. Also liegt auch die Vereinigungsmenge $V = C_1 \dotplus C_2 \dotplus C_3$ ganz in A.

Nun betrachten wir die Entfernungen der einzelnen Punkte des Kurvenstücks C_1 vom Punkte M. Die Menge dieser Entfernungen ist abgeschlossen, da das Kurvenstück C_1 abgeschlossen ist, und beschränkt, da das Kurvenstück C_1 wegen seiner im Endlichen gelegenen Begrenzungspunkte P_1 und P_2 beschränkt ist. Die obere Grenze dieser Menge heiße G, die untere Grenze g. Da C_1 den Punkt M nicht enthält, so gilt: $g > 0$.

Es gibt auf C_1 wenigstens einen Punkt Q, dessen Entfernung $E(Q, M)$ vom Punkte M den Wert $E(Q, M) = G$ hat, und wenigstens einen Punkt R, für den $E(R, M) = g$ ist, wobei Q und R als zwei verschiedene Punkte gewählt werden können (Fig. 1). Der Kreis um M mit dem Radius G heiße k_1, der Kreis um M mit dem Radius g heiße k_2. Wir werden zeigen: *Der abgeschlossene Kreisring zwischen den beiden Kreisen k_1 und k_2 ist eine Teilmenge von A.* Wegen $G \geqq r \geqq g$ werden wir damit dann für den Fall I den ersten Teil des ersten Beweisschrittes erledigt haben.

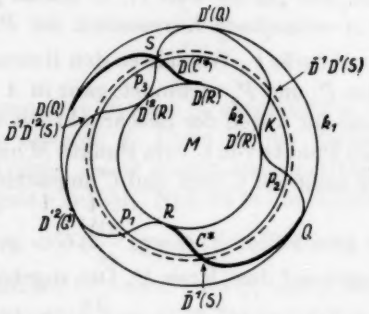


Fig. 1.

Vorerst zeigen wir:

Für jede beliebige Drehung D um den Punkt M gilt: $D(A) = A$.

Zum Beweise betrachten wir das Teilkurvenstück von C_1, das die beiden Punkte Q und R verbindet. Es heiße C^*. Weiter betrachten wir das Kurvenstück $D(C^*)$. Man sieht, daß die beiden Kreise k_1 und k_2 und die Menge $V = C_1 \dotplus C_2 \dotplus C_3$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllen, wenn man k_1 bzw. k_2 die Rolle von c_1 bzw. c_3 und die Menge V die Rolle von c_2 spielen läßt. Die Rolle von c spielt das den Punkt $D(Q)$ von k_1 und den Punkt $D(R)$ von k_2 verbindende Kurvenstück $D(C^*)$. Nach Hilfssatz 1 hat $D(C^*)$ mit V wenigstens einen Punkt gemein. Ein solcher heiße S. Als Punkt von V ist S ein Punkt von A. Wegen $g > 0$ ist S von M verschieden, also sind S, $D'(S)$ und $D'^2(S)$ (D' ist die Drehung um M um den Winkel $\frac{2\pi}{3}$) drei verschiedene Punkte, wegen $D'(A) = A$ zudem drei Punkte von A, die also nach Eigenschaft 3) das Element A von S bestimmen. Da S ein Punkt

von $D(C^*)$ ist, ist $D^{-1}(S)$ ein Punkt von C^* und damit ein Punkt von C_1. Daraus folgt, daß $D'D^{-1}(S)$ ein Punkt von C_2 und $D'^2D^{-1}(S)$ ein Punkt von C_3 ist. Also sind die drei Punkte $D^{-1}(S)$, $D'D^{-1}(S)$, $D'^2D^{-1}(S)$ sämtlich Punkte von A. Wegen der Vertauschbarkeit der Drehungen um M gilt:

$$D'D^{-1}=D^{-1}D' \text{ und } D'^2D^{-1}=D^{-1}D'^2.$$

Also sind die drei Punkte $D^{-1}(S)$, $D^{-1}D'(S)$, $D^{-1}D'^2(S)$ drei Punkte von A, die demnach A bestimmen. Aus ihnen gehen durch die Drehung D die drei Punkte S, $D'(S)$, $D'^2(S)$ hervor, die ebenfalls A bestimmen. Daraus folgt: $D(A)=A$, w. z. b. w.

Nun zeigen wir:

Jeder Punkt des abgeschlossenen Kreisrings zwischen k_1 und k_2 ist ein Punkt von A.

Zum Beweise sei T ein beliebiger Punkt dieses Kreisrings. Der Kreis durch T um den Mittelpunkt M trifft nach Hilfssatz 1 das Kurvenstück C^* in mindestens einem Punkte. Ein solcher heiße T'. Wir durchlaufen einen willkürlich gewählten der beiden Kreisbögen um M, die T und T' verbinden, in der Richtung von T' auf T. Die Drehung um M um den im Sinne dieser Durchlaufung mit einem Vorzeichen versehenen zugehörigen Zentriwinkel bezeichnen wir mit $\overline{D}$. Da T' als Punkt von C^* ein Punkt von A ist, so ist $\overline{D}(T')=T$ ein Punkt von $\overline{D}(A)$. Wegen $\overline{D}(A)=A$ ist aber $\overline{D}(T')=T$ ein Punkt von A, w. z. b. w.

Also ist auch jeder Punkt von K ein Punkt von A. Damit ist der Fall I erledigt.

1. 1. 4. Wir kommen zu Fall II. Wir werden zeigen, daß dieser Fall gar nicht eintreten kann. Dazu benötigen wir unter anderem den folgenden

Hilfssatz 2. *Sind P'_1 und P'_2 zwei Punkte von A, die auf einem beliebigen Kreise k' mit dem Mittelpunkt M liegen, und gilt der Fall* II, *so enthält jedes die beiden Punkte P'_1 und P'_2 verbindende, ganz in A verlaufende Kurvenstück den Punkt M.*

Beweis. Der Radius von k' heiße r'. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, es gebe ein Kurvenstück C, das P'_1 und P'_2 verbindet, ganz in A verläuft und den Punkt M nicht enthält. Die obere Grenze der wegen der Beschränktheit von C beschränkten Menge der Entfernungen der einzelnen Punkte von C vom Punkte M heiße G, ihre untere Grenze g. Dann gilt: $G \geqq r' \geqq g$. Da M nicht auf C liegt und C abgeschlossen ist, so gilt außerdem: $g > 0$.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle: 1) $G=g$, 2) $G > g$.

Im Fall 1) ist C ein Bogen auf dem Kreis k'. Der zugehörige Zentriwinkel heiße ω. Es gibt eine kleinste positive Zahl m, für die $\omega > \frac{2\pi}{m}$ ist. Die Drehung um M um den Winkel $\frac{2\pi}{m}$ heiße D''. Wir betrachten die Kurvenstücke $C_\mu = D''^\mu(C)$ für $0 \leqq \mu \leqq m-1$. Für sie gilt $C_\mu < A$. Diese Behauptung ist richtig für $\mu=0$, da $C_0=C$ nach Voraussetzung in A liegt. Wir nehmen an, sie sei richtig für μ, dann gilt für $\mu+1$ offenbar $C_{\mu+1}=D''(C_\mu)$. Wegen $\frac{2\pi}{m} < \omega$ haben $C_{\mu+1}$ und C_μ einen gemeinsamen Teilbogen, also sicher drei verschiedene gemeinsame Punkte. Daraus und aus der Induktionsannahme folgt mittels Eigenschaft 3) und 4): $C_{\mu+1} < A$.

Die m Kurvenstücke C_μ überdecken den Kreis k' vollständig. Also gilt $k' < A$. Daraus folgt aber mit Benutzung der Eigenschaften 3) und 4), daß A durch eine beliebige Drehung um M in sich selbst übergeht. Nun ist aber leicht einzusehen, daß mit dem Punkt P_1 der ganze Kreis K zu A gehört. Die beiden Bogen auf K, die P_1 und P_2 verbinden, verlaufen daher ganz in A. Da sie den Punkt M nicht enthalten, ist ein Widerspruch zur Voraussetzung aufgezeigt.

Im Fall 2) gilt mindestens eine der beiden Ungleichungen: $G > r', r' > g$. Wir nehmen zunächst an, es gelte $G > r'$. Da C abgeschlossen ist, gibt es wenigstens einen Punkt Q auf C, für den $E(Q, M) = G$ gilt (Fig. 2). Wir betrachten die Teilmenge von C, die vom Punkte Q und allen den Punkten Q' von C gebildet wird, für die es zwischen Q' und Q auf C keinen Punkt gibt, der zugleich auf k' liegt. Diese Menge hat sowohl in Richtung auf P_1' als auch in Richtung auf P_2' eine Grenze. Die erstere heiße Q_1, die letztere Q_2. Es ist $Q_1 \neq Q_2$. Das abgeschlossene Teilkurvenstück von C, das zwischen Q_1 und Q_2 liegt, heiße C'. Der vorzeichenbehaftete Winkel, den der Radiusvektor von M nach einem variablen Punkt von C' beim Durchlaufen von C' in Richtung von Q_1 nach Q_2 überstreicht, heiße ω. Unter den beiden Kreisbögen auf k', die Q_1 und Q_2 verbinden, gibt es einen, bei dem der Radiusvektor von M nach einem variablen Punkt dieses Bogens

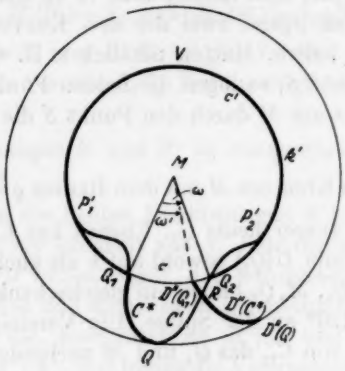


Fig. 2.

beim Durchlaufen des Bogens von Q_1 nach Q_2 ebenfalls den Winkel ω überstreicht. Diesen Bogen nennen wir c, den anderen c'. Dann ist die Vereinigungsmenge $V = C' \dotplus c'$ ein topologisches Bild eines Kreises, das in seinem Innern sicher das ganze Innere des Kreises k' und das Innere des Bogens c enthält. Nun sei m die kleinste positive ganze Zahl, für die $\frac{2\pi}{m} < |\omega|$ gilt. Wir setzen $\omega' = \frac{2\pi}{m} \operatorname{sgn} \omega$. Die Drehung um M um ω' heiße D''. Wir betrachten das Teilkurvenstück C^* von C', das Q_1 und Q verbindet, und das Kurvenstück $D''(C^*)$. Die Begrenzungspunkte von $D''(C^*)$ sind $D''(Q_1)$ und $D''(Q)$. Hiervon liegt $D''(Q_1)$ im Innern von c und daher im Innern von V, dagegen $D''(Q)$ auf dem Kreis um M mit dem Radius G, also sicher nicht im Innern von V. Daraus folgt, daß V mit $D''(C^*)$ wenigstens einen Punkt gemein hat. Ein solcher heiße R. Da das Innere von c ganz im Inneren von V liegt, ist R von $D''(Q_1)$ verschieden. Da Q_1 der einzige Punkt von C^* ist, der auf k' liegt, so ist $D''(Q_1)$ der einzige Punkt von $D''(C^*)$, der auf k' liegt. Also liegt R nicht auf k'. Demnach muß R als Punkt von V auf C' liegen. Da R ein Punkt von $D''(C^*)$ ist, ist $D''^{-1}(R)$ ein Punkt von C^* und damit ebenfalls ein Punkt von C'.

Nun betrachten wir das Teilkurvenstück von C', das $D''^{-1}(R)$ und R verbindet. Es heiße $\bar{C}$. Wir bilden die Kurvenstücke $C_\mu = D''^{\mu}(\bar{C})$ für $0 \leqq \mu \leqq m-1$, dazu die Vereinigungsmenge $V = C_0 \dotplus \cdots \dotplus C_{m-1}$. Der Kreis um M mit dem Radius G bzw. der Kreis k' in der Rolle von c_1 bzw. c_3 und die Menge V in der Rolle von c_2 erfüllen die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1. Die Rolle von c spielt das Kurvenstück C^*, das den Punkt Q des Kreises um M mit dem Radius G und den Punkt Q_1 des Kreises k' verbindet. Wie in 1. 1. 3 kann man daher mit Benutzung des Hilfssatzes 1 und der Eigenschaften 3) und 4)

zeigen, daß das Element A von S bei jeder Drehung um M in sich selbst übergeht. Daraus folgt aber wie im Fall 1) ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Die entsprechend verlaufende Erledigung des Falles $r' > g$ darf nun dem Leser überlassen bleiben. Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

1. 1. 4. 1. Den Beweis dafür, daß der Fall II gar nicht eintreten kann, führen wir indirekt und nehmen an, der Tatbestand des Falles II sei gegeben. Dann enthält ein ganz in A verlaufendes, die Punkte P_1 und P_2 verbindendes Kurvenstück, das wir betrachten wollen, den Punkt M. Das Teilkurvenstück davon, das P_1 und M verbindet, bezeichnen wir mit C_1. Wir setzen $D'(C_1) = C_2$ und $D'^2(C_1) = C_3$. Die Kurve C_2 verbindet M und P_2, C_3 verbindet M und P_3. Da C_1 ganz in A verläuft, verlaufen wegen $D'(A) = A$ auch C_2 und C_3 ganz in A. Mittels Hilfssatz 2 ergibt sich leicht, daß eine jede der drei Kurven C_1, C_2, C_3 einen jeden Kreis mit dem Mittelpunkt M in höchstens einem Punkt treffen kann. Daraus folgt dann, daß irgend zwei der drei Kurvenstücke C_1, C_2, C_3 außer M keinen gemeinsamen Punkt haben. Hätten nämlich z. B. C_1 und C_2 den von M verschiedenen gemeinsamen Punkt S, so lägen die beiden Punkte S und $D'(S)$ auf C_2 und somit hätte C_2 mit dem Kreis um M durch den Punkt S die beiden Punkte S und $D'(S)$ gemein.

Nun betrachten wir den Kreis um M mit dem Radius $\varrho = \frac{r}{5}$. Er heiße k. C_1 hat mit k genau einen Punkt gemein. Dieser heiße Q_1. Ebenso hat C_2 mit k genau einen Punkt gemein. Dieser heiße Q_2. Da nun $D(Q_1)$ sowohl auf k als auch auf $D(C_1) = C_2$ liegt, so ist $D(Q_1) = Q_2$. Die drei Punkte Q_1, M, Q_2 bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze M und einem Winkel von 120^0 an der Spitze. Die Vereinigungsmenge aus dem abgeschlossenen Teilkurvenstück von C_1, das Q_1 und M verbindet, und dem abgeschlossenen Teilkurvenstück von C_2, das Q_2 und M verbindet, ist ebenfalls ein Kurvenstück, da C_1 und C_2 außer M keinen gemeinsamen Punkt haben. Dieses Kurvenstück heiße C. Für alle Punkte P von C gilt $E(P, M) \leqq \varrho$, für alle inneren Punkte $E(P, M) < \varrho$. Dies folgt leicht daraus, daß sowohl C_1 als auch C_2 mit dem Kreis k nicht mehr als einen Punkt gemein haben kann.

1. 1. 4. 2. Nun sei S_2 ein beliebiger Punkt des zwischen Q_2 und M gelegenen, bei M offenen, bei Q_2 abgeschlossenen Teilkurvenstücks C^* von C. Wir zeigen:

Der Kreis K *um* S_2 *mit dem Radius* $E(Q_1, Q_2) = \varrho\sqrt{3}$ (Fig. 3) *hat mit* C_1 *wenigstens einen Punkt* S_1 *gemein.*

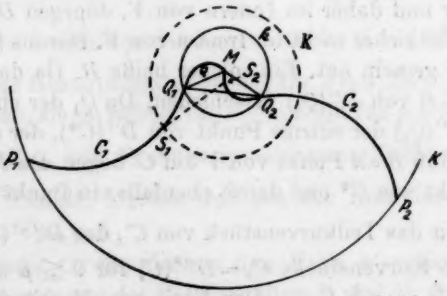


Fig. 3.

Beweis. Es sei P ein Punkt von K. Dann gilt:

$$E(M, P) \leqq E(M, S_2) + E(S_2, P).$$

Es ist aber $E(M, S_2) \leqq \varrho$ und $E(S_2, P) = \varrho\sqrt{3}$. Daraus folgt

$$E(M, P) \leqq \varrho + \varrho\sqrt{3} < 3\varrho < r.$$

Also verläuft K ganz im Äußern von K und insbesondere liegt P_1 im Äußern von K. Andererseits gilt $E(M, S_2) \leqq \varrho < \varrho\sqrt{3}$, also liegt M im Innern von K. Deshalb hat das Kurvenstück C_1, das M und P_1 verbindet, mit K wenigstens einen Punkt gemein. Ein solcher heiße S_1.

Es gibt genau zwei verschiedene Bewegungstransformationen (orthogonale Transformationen mit positiver Determinante) des E_2, durch die die Strecke Q_1Q_2 mit der Strecke S_1S_2 zur Deckung gebracht werden kann. Diese sollen B' und B'' heißen. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß

$$B'(Q_1) = S_1,\ B'(Q_2) = S_2 \text{ und } B''(Q_1) = S_2,\ B''(Q_2) = S_1$$

gelte. Dann gilt $B''B'^{-1}(S_1) = S_2$ und $B''B'^{-1}(S_2) = S_1$. Also ist $B''B'^{-1}$ eine Drehung um 180^0 um den Mittelpunkt der Strecke S_1S_2. Daraus folgt: $B''B'^{-1} = B'B''^{-1}$.

1. 1. 4. 3. Wir zeigen:

Unter den beiden Bewegungen B' und B'' ist wenigstens eine, durch die das Element A von S in sich selbst übergeht.

Beweis. Wir betrachten die beiden Punktmengen $B'(A)$ und $B''(A)$. Nach Eigenschaft 4) ist jede der beiden ein Element aus S. Jede der beiden hat mit A die beiden Punkte S_1 und S_2 gemein. Wir wollen zeigen, daß wenigstens eine der beiden mit A noch einen dritten Punkt gemein hat und damit nach Eigenschaft 3) mit A identisch ist.

Dazu betrachten wir die Kurvenstücke $B'(C)$ und $B''(C)$. Wegen $C < A$ gilt $B'(C) < B'(A)$ und $B''(C) < B''(A)$. Wir bilden die Vereinigungsmenge $V = B'(C) \dot{+} B''(C)$. Es gilt

$$B''B'^{-1}(V) = B''B'^{-1}B'(C) \dot{+} B''B'^{-1}B''(C) = B''(C) \dot{+} B'B''^{-1}B''(C) = B''(C) \dot{+} B'(C) = V.$$

Außerdem ist V ein stetiges Bild eines Kreises.

Für alle Punkte P von C gilt $E(P, M) \leqq \varrho$. Also ist für alle Punkte P' von $B'(C)$ auch $E(P', B'(M)) \leqq \varrho$. Weiter gilt $E(B'(M), S_2) \leqq \varrho$ und $E(M, S_2) \leqq \varrho$. Daraus folgt

$$E(P', M) \leqq E(P', B'(M)) + E(B'(M), S_2) + E(S_2, M) \leqq \varrho + \varrho + \varrho = 3\varrho.$$

Entsprechend gilt für alle Punkte P'' von $B''(C)$

$$E(P'', M) \leqq 3\varrho.$$

Das stetige Kreisbild V verläuft also ganz im Innern eines Kreises um M mit dem Radius $3\varrho < r$, demnach auch ganz im Innern von K.

Wir betrachten das abgeschlossene Teilkurvenstück von C_1, das S_1 und M verbindet, und das abgeschlossene Teilkurvenstück von C_2, das S_2 und M verbindet. Die Vereinigungsmenge dieser beiden Teilkurvenstücke ist ebenfalls ein Kurvenstück, da C_1 und C_2 außer M keinen gemeinsamen Punkt haben, und heiße v. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

a) V und v haben außer S_1 und S_2 noch mindestens einen weiteren Punkt gemein.

b) V und v haben außer S_1 und S_2 keinen weiteren Punkt gemein.

Zu a): Wegen $V = B'(C) \dot{+} B''(C)$ ist der dritte gemeinsame Punkt von V und v, der T heißen möge, entweder ein Punkt von $B'(C)$ oder ein Punkt von $B''(C)$. Im ersten Falle sind S_1, S_2, T drei verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$, im zweiten Falle drei verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B''(A)$. Nach Eigenschaft 3) ergibt sich daraus im ersten Falle: $B'(A) = A$, im zweiten Falle: $B''(A) = A$. Es gilt also stets mindestens eine dieser beiden Gleichungen.

Zu b): Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

ba) Alle von S_1 und S_2 verschiedenen Punkte von v liegen im Inneren von V.

bb) Alle von S_1 und S_2 verschiedenen Punkte von v liegen im Äußeren von V.

Zu ba): Ein von S_1 und S_2 verschiedener Punkt von v ist auch der Punkt M, der daher im Innern von V liegt. V verläuft im Innern von K, also liegt K und damit auch der Punkt P_3 im Äußeren von V. Das Kurvenstück C_3, das die beiden Punkte M und P_3 verbindet, hat daher mit V mindestens einen Punkt gemein. Ein solcher heiße T. Da T ein Punkt von C_3 und von M verschieden ist, ist T kein Punkt von C_1 und kein Punkt von C_2, also insbesondere von S_1 und S_2 verschieden. Als Punkt von V ist T entweder ein Punkt von $B'(C)$ oder ein Punkt von $B''(C)$. Im ersten Falle sind S_1, S_2, T drei verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$, im zweiten Falle drei verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B''(A)$. Nach Eigenschaft 3) und 4) gilt also wieder mindestens eine der beiden Gleichungen: $B'(A)=A$, $B''(A)=A$.

Zu bb): Wir betrachten das Kurvenstück v. Für seinen einen Endpunkt S_1 gilt, da S_1 ein Punkt des Kreises K ist, $E(M, S_1) < 3\varrho$. Da C_1 jeden Kreis um M höchstens einmal schneidet, so gilt für alle Punkte P von v, die zu C_1 gehören, $E(P, M) < 3\varrho$. Für den anderen Endpunkt S_2 gilt $E(M, S_2) \leqq \varrho$, und damit, da auch C_2 jeden Kreis um M höchstens einmal schneidet, für alle Punkte P von v, die zu C_2 gehören: $E(P, M) < \varrho$. Es gilt daher für alle Punkte P von v

$$E(P, M) < 3\varrho.$$

Nun betrachten wir den Punkt $B'(M)$. Ist P ein Punkt von v, so gilt

$$E(P, B'(M)) \leqq E(P, M)+E(M, S_2)+E(S_2, B'(M)) < 3\varrho+\varrho+\varrho=5\varrho=r.$$

Wir betrachten weiter das stetige Streckenbild $B''B'^{-1}(v)$. Ist P ein Punkt von $B''B'^{-1}(v)$, so gilt

$$E(P,B'(M)) \leqq E(P,B''B'^{-1}(M))+E(B''B'^{-1}(M),S_1)+E(S_1,B'(M)) < 3\varrho+\varrho+\varrho=5\varrho=r.$$

Nun betrachten wir die Vereinigungsmenge $v'=v \dotplus B''B'^{-1}(v)$. Ist P irgendein Punkt von v', so gilt

$$E(P, B'(M)) < 5\varrho=r.$$

Also liegt v' vollständig im Innern des Kreises mit dem Mittelpunkt $B'(M)$ und dem Radius r. Dieser Kreis ist aber der Kreis $B'(K)$, auf dem insbesondere der Punkt $B'(P_3)$ liegt.

Wir betrachten die gegenseitige Lage von $B'(K)$ und V. Ist P ein Punkt von V, der zu $B'(C)$ gehört, so gilt $E(P, B'(M)) \leqq \varrho$. Ist P ein Punkt von V, der zu $B''(C)$ gehört, so gilt

$$E(P, B'(M)) \leqq E(P, B''(M))+E(B''(M), S_2)+E(S_2, B'(M)) < \varrho+\varrho+\varrho=3\varrho.$$

Also gilt für alle Punkte P von V

$$E(P, B'(M)) < 3\varrho=r.$$

V verläuft also ganz im Inneren von $B'(K)$.

Schließlich betrachten wir die gegenseitige Lage von v' und V. Keiner der Punkte von v liegt im Innern von V. Also liegt auch keiner der Punkte von $B''B'^{-1}(v)$ im Innern von $B''B'^{-1}(V)$. Da aber $B''B'^{-1}(V)=V$ ist, so liegt keiner der Punkte von $B''B'^{-1}(v)$ im Innern von V. Nun ist aber $v'=v+B''B'^{-1}(v)$. Also liegt keiner der Punkte von v' im Innern von V. Also erfüllen $B'(K)$ bzw. V in der Rolle von c_1 bzw. c_3 und v' in der Rolle von c_2 die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1. Die Rolle von c spielt das abgeschlossene Kurvenstück $B'(C_3)$, das den Punkt $B'(M)$ von V mit dem Punkt $B'(P_3)$ von $B'(K)$ verbindet. Nach Hilfssatz 1 hat aber $B'(C_3)$ mit v' wenigstens einen Punkt gemein. Ein solcher heiße T. Dies T ist von S_1 verschieden. Andernfalls wäre nämlich $T=S_1$ ein

gemeinsamer Punkt von $B'(C_3)$ und $B'(C_1)$, während diese beiden Kurvenstücke doch nur den Punkt $B'(M)$ gemeinsam haben, der von S_1 verschieden ist. Entsprechend ergibt sich, daß T von S_2 verschieden ist. Also sind S_1, S_2, T drei verschiedene Punkte. Als Punkt von v' ist T entweder ein Punkt von v oder ein Punkt von $B''B'^{-1}(v)$. Im ersten Falle sind S_1, S_2, T drei verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$, woraus nach Eigenschaft 3) und 4)

$$B'(A) = A$$

folgt. Im zweiten Falle sind S_1, S_2, T drei verschiedene gemeinsame Punkte von $B''B'^{-1}(A)$ und $B'(A)$. Also sind $B''B'^{-1}(S_1)$, $B''B'^{-1}(S_2)$, $B''B'^{-1}(T)$ drei verschiedene gemeinsame Punkte von $B''B'^{-1}B''B^{-1}(A)$ und $B''B'^{-1}B'(A)$, und daher wegen $B''B'^{-1} = B'B''^{-1}$ drei verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B''(A)$, woraus nach Eigenschaft 3) und 4)

$$B''(A) = A$$

folgt. Es gilt also wieder mindestens eine der beiden Gleichungen $B'(A) = A$, $B''(A) = A$.

Also gibt es unter den beiden Bewegungen B' und B'' stets mindestens eine, durch die das Element A von S in sich selbst übergeht. Eine Bewegung B' bzw. B'', durch die A in sich selbst übergeht, bezeichnen wir im folgenden mit B.

1. 1. 4. 4. Wir studieren eine für uns wesentliche Eigenschaft einer Bewegung B dieser Art. Es gilt folgender

Satz. *Durch eine Bewegung B dieser Art wird das Kurvenstück C mit dem Kurvenstück v zur Deckung gebracht, das heißt, es ist $B(C) = v$.*

Zum Beweise zeigen wir zunächst $B(C) < v$, dann $v < B(C)$.

Wir nehmen an, $B(C) < v$ gelte nicht. Dann gibt es auf $B(C)$ einen Punkt Q, der nicht auf v liegt (Fig. 4). Q ist von M verschieden. Wir betrachten die Teilmenge von $B(C)$, die von Q und all den Punkten P von $B(C)$ gebildet wird, für die es zwischen P und Q keinen Punkt auf $B(C)$ gibt, der zugleich auf v liegt. Diese Menge hat von Q aus

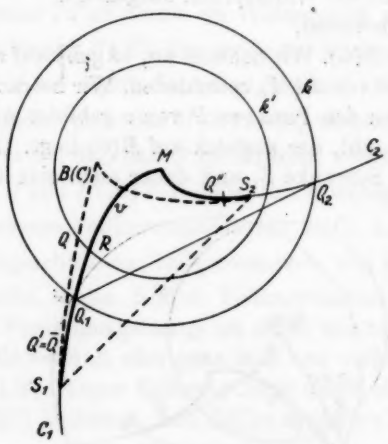


Fig. 4.

in der einen Richtung die Schranke S_1 und daher auch eine Grenze Q', in der andern Richtung die Schranke S_2 und daher auch eine Grenze Q''. Es gilt $Q' \neq Q''$. Sowohl Q' wie Q'' sind gemeinsame Punkte von $B(C)$ und v. Sie liegen auf $B(C)$ auf verschiedenen Seiten des Punktes Q. Nun betrachten wir den Kreis um M durch den Punkt Q. Er heiße k'.

Weiter betrachten wir das abgeschlossene Teilkurvenstück $\bar{C}$ von $B(C)$, das Q' und Q'' verbindet. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1) Der Punkt M liegt nicht auf $\bar{C}$. 2) Der Punkt M liegt auf $\bar{C}$.

Zu 1): Da M nicht auf $\bar{C}$ liegt, ergibt sich mittels Hilfssatz 2 leicht, daß $\bar{C}$ als Teilmenge von A mit jedem Kreis um M höchstens einen Punkt gemein haben kann. Daraus folgt, daß einer der beiden Punkte Q', Q'' im Innern, der andere im Äußern von k' liegt. Also hat das Teilkurvenstück von v, das Q' und Q'' verbindet, mit k' wenigstens einen Punkt R gemein. Derjenige der beiden Punkte Q', Q'', der auf v auf der Seite von R liegt, auf der M nicht liegt, heiße $\bar{Q}$. Dann enthält das abgeschlossene Teilkurvenstück von v, das R und $\bar{Q}$ verbindet, den Punkt M nicht. Das abgeschlossene Teilkurvenstück von $B(C)$, das Q und $\bar{Q}$ verbindet, enthält ebenfalls M nicht. Diese beiden Teilkurvenstücke haben außer $\bar{Q}$ keinen gemeinsamen Punkt. Ihre Vereinigungsmenge ist daher wieder ein Kurvenstück, das zudem M nicht enthält. Es verläuft aber ganz in A und verbindet die beiden Punkte Q und R des Kreises k' um den Punkt M. Wegen Hilfssatz 2 ist damit ein Widerspruch aufgezeigt.

Zu 2): $\bar{C}$ enthält den Punkt M. Derjenige der beiden Punkte Q', Q'', der auf $B(C)$ auf der Seite von Q liegt, auf der M nicht liegt, heiße $\bar{Q}$. Aus Hilfssatz 2 ergibt sich leicht, daß das Teilkurvenstück von $B(C)$, das M und $\bar{Q}$ verbindet, jeden Kreis um M höchstens einmal trifft. Daraus folgt, daß $\bar{Q}$ im Äußeren von k' liegt. Also hat das Teilkurvenstück von v, das $\bar{Q}$ und M verbindet, mit k' wenigstens einen Punkt R gemein. Dann enthält das abgeschlossene Teilkurvenstück von v, das R und $\bar{Q}$ verbindet, den Punkt M nicht. Das abgeschlossene Teilkurvenstück von $B(C)$, das Q und $\bar{Q}$ verbindet, enthält ebenfalls M nicht. Diese beiden Teilkurvenstücke haben außer $\bar{Q}$ keinen gemeinsamen Punkt. Ihre Vereinigungsmenge ist daher wieder ein Kurvenstück, das zudem M nicht enthält. Es verläuft aber ganz in A und verbindet die beiden Punkte Q und R des Kreises k' um M. Wegen Hilfssatz 2 ist damit ein Widerspruch aufgezeigt.

Damit ist $B(C) < v$ bewiesen.

Nun beweisen wir $v < B(C)$. Wir nehmen an, es gebe auf v einen Punkt Q, der nicht auf $B(C)$ liegt (Fig. 5). Q ist von $B(M)$ verschieden. Wir betrachten die Teilmenge von v, die vom Punkte Q und allen den Punkten P von v gebildet wird, für die es zwischen P und Q keinen Punkt auf v gibt, der zugleich auf $B(C)$ liegt. Diese Menge hat von Q aus in der einen Richtung die Schranke S_1 und daher auch eine Grenze Q', in der anderen

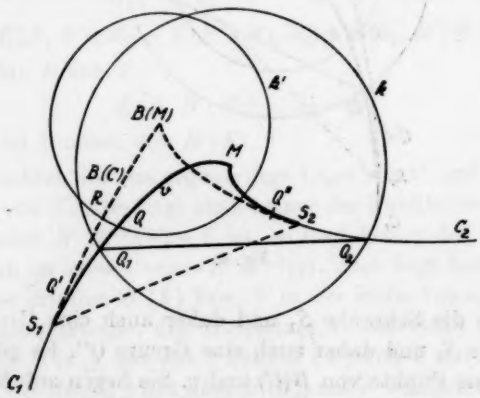


Fig. 5.

Richtung die Schranke S_2 und daher auch eine Grenze Q''. Es gilt $Q \neq Q''$. Sowohl Q' wie Q'' sind gemeinsame Punkte von v und $B(C)$. Sie liegen auf v auf verschiedenen Seiten des Punktes Q. Nun betrachten wir den Kreis um $B(M)$ durch den Punkt Q. Er heiße k'. Weiter betrachten wir das abgeschlossene Teilkurvenstück $\bar{C}$ von v, das Q' und Q'' verbindet. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1) Der Punkt $B(M)$ liegt nicht auf $\bar{C}$. 2) Der Punkt $B(M)$ liegt auf $\bar{C}$.

Zu 1): Aus dem Hilfssatz 2 folgt leicht der

Hilfssatz 2a. *Ist T eine Bewegungstransformation, für die $T(A) = A$ gilt, und sind P_1', P_2' zwei Punkte von A, die auf einem beliebigen Kreise mit dem Mittelpunkt $T(M)$ liegen, so enthält im Falle* II *jedes die beiden Punkte P_1' und P_2' verbindende, ganz in A verlaufende Kurvenstück den Punkt $T(M)$.*

Beweis. Wir nehmen an, C sei ein ganz in A verlaufendes Kurvenstück, das P_1' und P_2' verbindet. Aus $T(A) = A$ folgt $A = T^{-1}(A)$. Die Punkte $T^{-1}(P_1')$ und $T^{-1}(P_2')$ liegen auf ein und demselben Kreise um M und werden durch das ganz in $T^{-1}(A) = A$ verlaufende Kurvenstück $T^{-1}(C)$ verbunden. Also enthält $T^{-1}(C)$ nach Hilfssatz 2 den Punkt M. Damit enthält aber $TT^{-1}(C) = C$ den Punkt $T(M)$.

Aus Hilfssatz 2a ergibt sich nun, da $B(M)$ nicht auf $\bar{C}$ liegt, leicht, daß $\bar{C}$ als Teilmenge von A mit jedem Kreis um $B(M)$ höchstens einen Punkt gemein haben kann. Daraus folgt, daß einer der beiden Punkte Q', Q'' im Innern, der andere im Äußeren von k' liegt. Also hat das Teilkurvenstück von $B(C)$, das Q' und Q'' verbindet, mit k' wenigstens einen Punkt R gemein. Derjenige der beiden Punkte Q', Q'', der auf $B(C)$ auf der Seite von R liegt, auf der $B(M)$ nicht liegt, heiße $\bar{Q}$. Dann enthält das abgeschlossene Teilkurvenstück von $B(C)$, das R und $\bar{Q}$ verbindet, den Punkt $B(M)$ nicht. Das abgeschlossene Teilkurvenstück von v, das Q und $\bar{Q}$ verbindet, enthält ebenfalls $B(M)$ nicht. Diese beiden Teilkurvenstücke haben außer $\bar{Q}$ keinen gemeinsamen Punkt. Ihre Vereinigungsmenge ist daher wieder ein Kurvenstück, das zudem $B(M)$ nicht enthält. Es verläuft aber ganz in A und verbindet die beiden Punkte Q und R des Kreises k' um den Punkt $B(M)$. Wegen Hilfssatz 2a ist damit ein Widerspruch aufgezeigt.

Zu 2): $\bar{C}$ enthält den Punkt $B(M)$. Derjenige der beiden Punkte Q', Q'', der auf v auf der Seite von Q liegt, auf der $B(M)$ nicht liegt, heiße $\bar{Q}$. Aus Hilfssatz 2a ergibt sich leicht, daß das Teilkurvenstück von v, das $B(M)$ und $\bar{Q}$ verbindet, jeden Kreis um $B(M)$ höchstens einmal trifft. Daraus folgt, daß $\bar{Q}$ im Äußeren von k' liegt. Also hat das Teilkurvenstück von $B(C)$, das $\bar{Q}$ und $B(M)$ verbindet, mit k' wenigstens einen Punkt gemein. Dann enthält das abgeschlossene Teilkurvenstück von $B(C)$, das R und $\bar{Q}$ verbindet, den Punkt $B(M)$ nicht. Das abgeschlossene Teilkurvenstück von v, das Q und $\bar{Q}$ verbindet, enthält ebenfalls $B(M)$ nicht. Diese beiden Teilkurvenstücke haben außer $\bar{Q}$ keinen gemeinsamen Punkt. Ihre Vereinigungsmenge ist daher wieder ein Kurvenstück, das zudem $B(M)$ nicht enthält. Es verläuft aber ganz in A und verbindet die beiden Punkte Q und R des Kreises k' um $B(M)$. Wegen Hilfssatz 2a ist damit ein Widerspruch aufgezeigt.

Damit ist auch $v < B(C)$ bewiesen. Aus $B(C) < v$ und $v < B(C)$ folgt aber $B(C) = v$, w. z. b. w.

1. 1. 4. 5. In 1. 1. 4. 2 haben wir bewiesen: Ist S_2 ein Punkt des zwischen M und Q_2 gelegenen, bei M offenen, bei Q_2 abgeschlossenen Teilkurvenstücks C^* von C, so hat der Kreis K um S_2 mit dem Radius $E(Q_1, Q_2) = \varrho\sqrt{3}$ mit C_1 wenigstens einen Punkt S_1 gemein. Jetzt zeigen wir:

Der Kreis K *hat mit C_1 genau einen Punkt S_1 gemein.*

Zum Beweise benötigen wir folgenden

Hilfssatz 3. *Es sei C ein abgeschlossenes Kurvenstück des E_2, dessen beide Begrenzungspunkte im Endlichen liegen, C' ein von C verschiedenes Teilkurvenstück von C. Dann gibt es keine Bewegung, durch die C und C' zur Deckung gebracht werden können.*

Der Beweis dieses Hilfssatzes darf dem Leser überlassen bleiben.

Wir kehren zu unserer Behauptung zurück. Den Beweis führen wir indirekt und nehmen an, K habe mit C_1 mindestens 2 verschiedene Punkte S_1 und $\bar{S}_1$ gemein. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\bar{S}_1$ auf C_1 zwischen S_1 und M liegt. Das abgeschlossene Teilkurvenstück von $C_1 \dotplus C_2$, das S_1 und S_2 verbindet, heiße v, das abgeschlossene Teilkurvenstück von $C_1 \dotplus C_2$, das $\bar{S}_1$ und S_2 verbindet, heiße $\bar{v}$. Dann ist $\bar{v}$ ein von v verschiedenes Teilkurvenstück von v. Nun gibt es zwei verschiedene Bewegungen, durch die die Strecke Q_1Q_2 mit der Strecke S_1S_2 zur Deckung gebracht werden kann. Bei mindestens einer derselben geht A nach 1. 1. 4. 3 in sich selbst über. Eine solche heiße B. Ebenso gibt es zwei verschiedene Bewegungen, durch die die Strecke Q_1Q_2 mit der Strecke $\bar{S}_1S_2$ zur Deckung gebracht werden kann. Bei mindestens einer davon geht A nach 1. 1. 4. 3 in sich selbst über. Eine solche heiße $\bar{B}$. Nach 1. 1. 4. 4 gilt dann sowohl $B(C)=v$, als auch $\bar{B}(C)=\bar{v}$. Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt $C=\bar{B}^{-1}(\bar{v})$, und damit folgt aus der ersten $B\bar{B}^{-1}(\bar{v})=v$. Wegen Hilfssatz 3 ist damit ein Widerspruch aufgezeigt. Es gibt also genau einen gemeinsamen Punkt S_1 von K und C_1.

1. 1. 4. 6. Da zu jedem Punkt S_2 auf C^* der Punkt S_1 als Schnittpunkt des Kreises K mit dem Radius $\varrho\sqrt{3}$ um den Punkt S_2 und des Kurvenstücks C_1 eindeutig bestimmt ist, so sind zu jedem solchen Punkt S_2 auch die beiden Bewegungen B' mit $B'(Q_1)=S_1$, $B'(Q_2)=S_2$ und B'' mit $B''(Q_1)=S_2$, $B''(Q_2)=S_1$ eindeutig bestimmt. Bei wenigstens einer dieser beiden Bewegungen geht A nach 1. 1. 4. 3 in sich selbst über. Wir wollen nun zeigen, daß dies stets bei der Bewegung B' der Fall ist und nur bei dieser. Dazu zeigen wir zunächst:

Durchläuft S_2 das Kurvenstück C^*, so beschreibt S_1 ein stetiges Bild dieses Kurvenstücks.

Zum Beweise betrachten wir eine Folge $\{S_2^{(n)}\}$ von Punkten dieses Kurvenstücks, für die $\lim\limits_{n\to\infty} S_2^{(n)}=S_2^*$ gilt, wobei auch S_2^* ein Punkt von C^* sein soll. Der zu $S_2^{(n)}$ gehörige gemeinsame Punkt des Kreises K_n um $S_2^{(n)}$ mit dem Radius $\varrho\sqrt{3}$ und des Kurvenstücks C_1 heiße $S_1^{(n)}$, der zu S_2^* gehörige gemeinsame Punkt des Kreises K^* um S_2^* mit dem Radius $\varrho\sqrt{3}$ und des Kurvenstücks C_1 heiße S_1^*.

Unsere Behauptung ist bewiesen, wenn es gelingt zu zeigen, daß $\lim\limits_{n\to\infty} S_1^{(n)}=S_1^*$ ist.

Wir nehmen an, diese Beziehung gelte nicht. Dann gibt es eine volle Umgebung U von S_1^* auf C_1 derart, daß auf C_1 außerhalb U unendlich viele der Punkte $S_1^{(n)}$ liegen. Deshalb und da C_1 beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $\{S_2^{(m)}\}$ der Folge $\{S_2^{(n)}\}$, für die $\lim\limits_{m\to\infty} S_1^{(m)}=H$ und $H \neq S_1^*$ ist. Dann gilt

$$E(S_2^*, H) \leqq E(S_2^*, S_2^{(m)}) + E(S_2^{(m)}, S_1^{(m)}) + E(S_1^{(m)}, H).$$

Daraus folgt

$$E(S_2^*, H) \leqq \lim_{m\to\infty} E(S_2^*, S_2^{(m)}) + \lim_{m\to\infty} E(S_2^{(m)}, S_1^{(m)}) + \lim_{m\to\infty} E(S_1^{(m)}, H) = 0 + \varrho\sqrt{3} + 0 = \varrho\sqrt{3}.$$

Andererseits gilt

$$E(S_2^*, H) \geqq -E(S_2^*, S_2^{(m)}) + E(S_2^{(m)}, S_1^{(m)}) - E(S_1^{(m)}, H).$$

Daraus folgt

$$E(S_2^*, H) \geqq -\lim_{m\to\infty} E(S_2^*, S_2^{(m)}) + \lim_{m\to\infty} E(S_2^{(m)}, S_1^{(m)}) - \lim_{m\to\infty} E(S_1^{(m)}, H)$$
$$= -0 + \varrho\sqrt{3} - 0 = \varrho\sqrt{3}.$$

Also ist $E(S_2^*, H) = \varrho\sqrt{3}$. Das heißt aber: H ist neben S_1^* ein weiterer gemeinsamer Punkt von K und C_1. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

Man sieht jetzt ohne weiteres: Faßt man das Kurvenstück C^* als topologisches Bild des Intervalls $0 \leqq u < 1$ auf, so ist sowohl B' als auch B'' eine in diesem Intervall erklärte und stetige Funktion von u; dem Stetigkeitsbegriff für Funktionen eines reellen Parameters, bei denen die abhängige Variable eine Bewegung des E_2 ist, liege eine Metrisierung des Raumes aller Bewegungen des E_2 zugrunde, die durch folgende Abstandsdefinition hergestellt wird: Sind A und B zwei Bewegungen des E_2 und $\begin{pmatrix}\alpha_{11}\,\alpha_{12}\,a_1\\ \alpha_{21}\,\alpha_{22}\,a_2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\beta_{11}\,\beta_{12}\,b_1\\ \beta_{21}\,\beta_{22}\,b_2\end{pmatrix}$ ihre Koeffizientenschemata bei Zugrundelegung eines willkürlich wählbaren, dann aber ein für allemal festgehaltenen kartesischen Systems, so sei ihr Abstand gegeben durch:

$$|A, B| = \sqrt{\sum_{\lambda,\mu=1}^{2} (\alpha_{\lambda\mu} - \beta_{\lambda\mu})^2 + \sum_{\lambda=1}^{2} (a_\lambda - b_\lambda)^2}.$$

Nun zeigen wir:

Ist S_2 ein Punkt von C^*, für den $B'(A) = A$ gilt, und $\overline{S}_2$ ein Punkt von C^*, für den $B''(A) = A$ gilt, so gibt es auf dem abgeschlossenen Teilkurvenstück $\overline{C}$ von C^*, das S_2 und $\overline{S}_2$ verbindet, wenigstens einen Punkt S_2^*, für den sowohl $B'(A) = A$ als auch $B''(A) = A$ gilt.

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung wäre falsch. Dann gilt für jeden Punkt von $\overline{C}$ eine und nur eine der beiden Beziehungen: $B'(A) = A$, $B''(A) = A$. Die Menge der Punkte von $\overline{C}$, für die die erste Beziehung gilt, bezeichnen wir mit M', die Menge der Punkte von $\overline{C}$, für die die zweite Beziehung gilt, bezeichnen wir mit M''. Es gilt: $S_2 \in M'$, $\overline{S}_2 \in M''$. Nun betrachten wir die Punktmenge auf $\overline{C}$, die vom Punkte S_2 und all den Punkten P von $\overline{C}$ gebildet wird, für die zwischen P und S_2 kein Punkt von M'' liegt. Diese Punktmenge hat von S_2 in Richtung auf $\overline{S}_2$ eine Grenze S_2^*. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1)\ S_2^* \in M', \qquad 2)\ S_2^* \in M''.$$

Zu 1): In diesem Falle gibt es auf $\overline{C}$ eine Punktfolge $\{S_2^{(n)}\}$, für die alle Punkte $S_2^{(n)}$ zu M'' gehören und $\lim_{n\to\infty} S_2^{(n)} = S_2^*$ ist. Die Bewegung B'' für den Punkt $S_2^{(n)}$ heiße B_n'', für den Punkt S_2^* dagegen B''^*. Die Bewegung B' für den Punkt S_2^* heiße B'^*. Gemäß Fall 1) gilt $B'^*(A) = A$. Aus der Stetigkeit von B'' als Funktion des Urbildparameters u des Kurvenstücks C^* folgt $\lim_{n\to\infty} B_n'' = B''^*$. Daraus folgt aber wiederum

$$\lim_{n\to\infty} B_n''(Q_1) = B''^*(Q_1) = S_2^*, \quad \lim_{n\to\infty} B_n''(Q_2) = B''^*(Q_2) = S_1, \quad \lim_{n\to\infty} B_n''(M) = B''^*(M).$$

S_1^* und S_2^* sind Punkte von A. Wegen der Abgeschlossenheit von $C_1 + C_2$ liegt mit $B_n''(M)$ (vgl. 1. 1. 4. 4) auch $B''^*(M)$ auf diesem Kurvenstück und damit in A. Es sind also sowohl die drei Punkte Q_1, Q_2, M als auch deren Bilder $B''^*(Q_1)$, $B''^*(Q_2)$, $B''^*(M)$ Punkte von A. Daraus folgt $B''^*(A) = A$. Da aber schon $B'^*(A) = A$ gilt, so ist damit ein Widerspruch aufgezeigt.

In entsprechender Weise wird der Fall 2) erledigt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Jetzt zeigen wir:

Für einen Punkt S_2 von C^* kann nicht mehr als eine der beiden Beziehungen $B'(A)=A$, $B''(A)=A$ richtig sein.

Beweis. Wir nehmen an, es gebe einen Punkt S_2 von C^*, für den sowohl $B'(A)=A$ als auch $B''(A)=A$ richtig sei. Dann gilt nach 1. 1. 4. 4 für diesen Punkt: $v=B'(C)=B''(C)$. Also ist v symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt der Strecke S_1S_2. Daraus folgt, daß C symmetrisch ist in bezug auf den Mittelpunkt der Strecke Q_1Q_2. Dieser heiße F. Dies F ist von M verschieden. Aus der Symmetrie von C in bezug auf F folgt, daß F auf C liegt. F kann auf C zwischen Q_1 und M oder zwischen Q_2 und M liegen. Wir behandeln den ersten dieser beiden Fälle. Die Drehung um den Punkt M um 120^0 heiße D', die Drehung um den Punkt F um 180^0 heiße $\overline{D}$. Das abgeschlossene Teilkurvenstück von C, das zwischen Q_1 und F liegt, heiße $\widehat{Q_1F}$. Entsprechend sind die in derselben Weise gebildeten Bezeichnungen zu verstehen. Man sieht: $D'(\widehat{Q_1F})$ ist ein echtes Teilkurvenstück von $\widehat{Q_2M}$. Und weiter: $\overline{D}(\widehat{Q_2M})$ ist ein echtes Teilkurvenstück von $\widehat{Q_1F}$. Also ist $\overline{D}D'(\widehat{Q_1F})$ ein echtes Teilkurvenstück von $\widehat{Q_1F}$. Wegen Hilfssatz 3 ist damit ein Widerspruch aufgezeigt. In entsprechender Weise erledigt man den Fall, daß F zwischen Q_2 und M liegt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Im Punkte $S_2=Q_2$ gilt $B'=E$ und damit $B'(A)=A$. Gäbe es auf C^* einen Punkt $\overline{S}_2$ mit $B''(A)=A$, so gäbe es auf dem abgeschlossenen Kurvenstück zwischen $S_2=Q_2$ und $\overline{S}_2$ wenigstens einen Punkt, für den beide Gleichungen richtig sind. Das ist aber nicht möglich. Deshalb gilt $B'(A)=A$ für alle Punkte von C^*, w. z. b. w.

1. 1. 4. 7. Nun sind wir in der Lage zu zeigen:

Das offene Teilkurvenstück von C_2 zwischen Q_2 und M, das aus C^* durch Weglassen des Punktes Q_2 entsteht, ist in sich lokal kongruent, das heißt zu irgend zwei Punkten $\overline{S}_2$ und $\overline{\overline{S}}_2$ dieses Kurvenstücks gibt es stets je eine Umgebung $U(\overline{S}_2)$ bzw. $U(\overline{\overline{S}}_2)$ auf dem Kurvenstück, die durch eine Bewegung in einander übergeführt werden können, wobei $\overline{S}_2$ in $\overline{\overline{S}}_2$ übergeht.

Beweis. Es seien $\overline{S}_2$ und $\overline{\overline{S}}_2$ zwei Punkte des offenen Teilkurvenstücks von C_2 zwischen Q_2 und M. Wir führen auf dem Kurvenstück $C_1 \dotplus C_2$ eine Orientierung so ein, daß Q_2 vor Q_1 kommt, in Zeichen: $Q_2 < Q_1$. O. B. d. A. gelte $\overline{S}_2 < \overline{\overline{S}}_2$. Zum Parameterwert u im Urbildintervall $0 \leqq u < 1$ von C^* gehöre der Punkt S_2, zum Punkt S_2 die Bewegung B'. Die Abhängigkeit der Bewegung B' von u deuten wir an, indem wir B'_u schreiben. Zum Parameterwert 0 gehört der Punkt Q_2 und die Bewegung $B'_0=E$. Deshalb gilt:

$$B'_0(\overline{S}_2) = E(\overline{S}_2) = \overline{S}_2 < \overline{\overline{S}}_2.$$

Der Punkt $\overline{\overline{S}}_2$ gehöre zum Parameterwert $\bar{u}$, die zugehörige Bewegung ist demnach $B'_{\bar{u}}$. Aus $Q_2 < \overline{S}_2$ folgt $B'_{\bar{u}}(Q_2) < B'_{\bar{u}}(\overline{S}_2)$, wegen $B_{\bar{u}}(Q_2)=\overline{\overline{S}}_2$ also $\overline{\overline{S}}_2 < B'_{\bar{u}}(S_2)$. Daraus folgt wegen der Stetigkeit von B'_u: Es gibt ein u^* zwischen 0 und $\bar{u}$ derart, daß $B'_{u^*}(\overline{S}_2)=\overline{\overline{S}}_2$ ist. Aus 1. 1. 4. 4 folgt unmittelbar, daß durch B'_{u^*} eine volle Umgebung von $\overline{S}_2$ in eine volle Umgebung von $\overline{\overline{S}}_2$ auf C^* übergeführt wird. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Die einzigen in sich lokal kongruenten Kurvenstücke des E_2 sind aber die Kreisbogen mit nichtverschwindendem endlichen oder unendlichen Radius[1]). Also ist das Innere von C^* ein Kreisbogen mit nichtverschwindendem Radius.

---

[1]) Vgl. *O. Haupt*, Zur Reinhardtschen Kennzeichnung der Kreisbogen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **174** (1936), S. 185.

Nun sieht man: Das abgeschlossene Kurvenstück C, das auf $C_1 \dotplus C_2$ zwischen den beiden Punkten Q_1 und Q_2 liegt, besteht aus zwei kongruenten Kreisbogen, die im Punkte M so zusammengefügt sind, daß der die Punkte Q_1 und M verbindende durch eine Drehung um den Punkt M um 120^0 in den die Punkte Q_2 und M verbindenden übergeht. Der Punkt M ist daher der einzige Punkt im Innern von C, in dem keine Tangente an C existiert. Wegen der Stetigkeit von B'_u gibt es zu jeder Umgebung U von M auf C ein $d > 0$ mit der Eigenschaft: Ist $0 \leqq u \leqq d$, so liegt $B'_u(M)$ in U. Ist dabei $u \neq 0$, so ist der zugehörige Punkt S_2 von Q_2 verschieden und nach Hilfssatz 3 daher auch $B'_u(M)$ von M verschieden. Das heißt aber wegen 1. 1. 4. 4, daß es auf C in einer beliebigen Umgebung von M noch weitere Punkte gibt, in denen C keine Tangente hat. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt.

Die Annahme des Tatbestandes des Falles II führt also auf einen Widerspruch, der Fall II kann nicht eintreten. Damit ist der erste Teil des ersten Beweisschrittes erledigt.

1. 2. Wir kommen zum zweiten Teil des ersten Beweisschrittes und zeigen:

Außer den Punkten des Kreises K enthält das Element A von S keine weiteren Punkte.

Beweis. Da A den ganzen Kreis enthält, folgt aus den Eigenschaften 3) und 4), daß für jede Drehung D um den Mittelpunkt M von K stets $D(A) = A$ ist. Nun sei P ein Punkt von A, der nicht auf K liegt. Q sei ein beliebiger Punkt auf K. Nach Eigenschaft 2) gibt es ein Kurvenstück C, das P und Q verbindet und ganz in A verläuft. Der Kreis um M durch P heiße K'.

Wir zeigen zunächst: *Der abgeschlossene Kreisring zwischen K und K' gehört vollständig zu A.* Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt R dieses Kreisrings. Nach Hilfssatz 1 hat der Kreis mit dem Mittelpunkt M durch den Punkt R mit dem Kurvenstück C wenigstens einen Punkt R' gemein. Dann gibt es mindestens eine Drehung D' um den Punkt M, für die $D'(R') = R$ gilt. Als Punkt von C ist R' ein Punkt von A. Aus $D'(A) = A$ folgt daher, daß auch R ein Punkt von A ist. Also gehört der ganze Kreisring zwischen K und K' zu A.

Nun zeigen wir: *Jeder Punkt des E_2 ist ein Punkt von A.* Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt S des E_2. Man sieht leicht: Man kann eine endliche Folge von Kreisringen $k_1, \ldots, k_n$ bilden, die folgende Eigenschaften hat (Fig. 6):

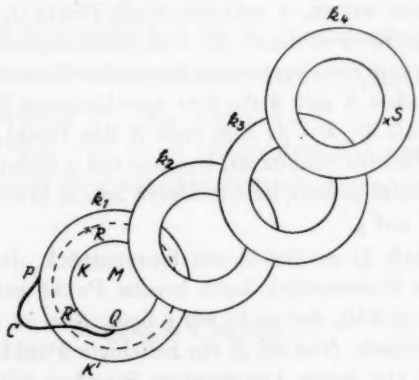


Fig. 6.

a) k_1 ist der abgeschlossene Kreisring zwischen K und K'.
b) Für $\nu = 2, \ldots, n$ geht k_ν aus $k_{\nu-1}$ durch eine Parallelverschiebung V_ν hervor.
c) Für $\nu = 2, \ldots, n$ hat k_ν mit $k_{\nu-1}$ wenigstens 3 verschiedene Punkte gemein.
d) k_n enthält den Punkt S.

Wir behaupten: Für $\nu = 1, \ldots, n$ ist k_ν vollständig in A enthalten. Aus der Definition von k_1 folgt, daß $k_\nu < A$ für $\nu = 1$ zutrifft. Wir nehmen an, es gelte für ν mit $1 \leqq \nu \leqq n-1$ schon $k_\nu < A$. Dann gilt für $\nu + 1$ offenbar $k_{\nu+1} = V_{\nu+1}(k_\nu)$. Nach Eigenschaft 4) ist $V_{\nu+1}(A)$ ebenfalls ein Element von S. Auf Grund der Induktionsannahme und der Definition von $k_{\nu+1}$ enthält $V_{\nu+1}(A)$ den Kreisring $k_{\nu+1}$. Wegen c) und der Induktionsannahme haben daher $V_{\nu+1}(A)$ und A wenigstens drei verschiedene Punkte gemein. Daraus folgt nach Eigenschaft 3): $V_{\nu+1}(A) = A$; da aber $k_{\nu+1}$ ganz in $V_{\nu+1}$ liegt, so gilt damit: $k_{\nu+1} < A$.

Insbesondere gilt also $k_n < A$. Da aber S ein Punkt von k_n ist, ist damit S auch ein Punkt von A. Also ist jeder Punkt des E_2 ein Punkt von A.

Schließlich zeigen wir: *A ist das einzige Element von S.* Wir nehmen an, es gebe in S wenigstens noch ein weiteres, von A verschiedenes Element A'. Nach Eigenschaft 2) enthält A' mindestens zwei verschiedene Punkte und ein Kurvenstück, das diese beiden Punkte verbindet, also sicher drei verschiedene Punkte. Da A alle Punkte des E_2 enthält, sind diese drei Punkte drei verschiedene gemeinsame Punkte von A' und A. Daraus folgt nach Eigenschaft 3): $A' = A$. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt. Also ist A das einzige Element von S.

Dieses Ergebnis steht aber im Widerspruch zu Eigenschaft 1). Also kann A keinen Punkt enthalten, der nicht auf K liegt. Damit ist der Beweis des ersten Schrittes abgeschlossen.

2. Wir kommen zum zweiten Beweisschritt und haben zu zeigen:

Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) *bis* 4) *enthält jede Gerade als Element.*

Den Beweis für diese Behauptung führen wir wieder in zwei Teilen.

Im ersten Teil zeigen wir: Ist g eine beliebige Gerade und sind P_1, P_2, P_3 irgend drei verschiedene Punkte auf g, so enthält das durch diese drei Punkte bestimmte Element A von S keinen Punkt, der nicht auf g liegt.

Im zweiten Teil zeigen wir: Das Element A von S enthält alle Punkte von g.

2. 1. Wir betrachten eine beliebige Gerade g und irgend drei verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3 von g. Das nach Eigenschaft 3) durch diese drei Punkte bestimmte Element von S heiße A. Nun nehmen wir an, A enthielte einen Punkt Q, der nicht auf g liegt. Da Q nicht auf g liegt, hat der Kreis K durch die drei verschiedenen Punkte P_1, P_2, Q einen endlichen Radius. Auf Grund des Ergebnisses des ersten Beweisschrittes ist daher K ein Element von S. Nun hat aber K mit A die drei verschiedenen Punkte P_1, P_2, Q gemein, also folgt wegen Eigenschaft 3): $K = A$. Also muß K den Punkt P_3 von A enthalten. Da der Kreis K aber von endlichem Radius ist, kann er mit g außer den beiden Punkten P_1 und P_2 keinen weiteren Punkt gemein haben. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt. Also liegen alle Punkte von A auf g.

2. 2. Nach Eigenschaft 2) enthält A ein Kurvenstück, das die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet. Dieses Kurvenstück kann keinen Punkt enthalten, der nicht auf g liegt, da A keinen Punkt enthält, der nicht auf g liegt. Also ist es mit der Strecke s, die P_1 und P_2 verbindet, identisch. Nun sei R ein beliebiger Punkt von g. Dann kann man zu R eine endliche Folge von lauter kongruenten Strecken bilden, die folgende Eigenschaften hat:

a) Das erste Element der Folge ist mit s identisch.
b) Jedes Element vom zweiten an hat mit seinem Vorgänger wenigstens drei verschiedene Punkte gemein.
c) Das letzte Element der Folge enthält den Punkt Q.

Da die Elemente dieser Folge durch Bewegungen ineinander übergeführt werden können und das erste Element ganz in A liegt, folgt wegen c) mittels der Eigenschaft 3) und 4), daß jedes Element ganz in A liegt. Also liegt auch das letzte Element ganz in A, und damit ist Q ein Punkt von A.

Damit ist der Beweis des zweiten Schrittes abgeschlossen.

3. Wir kommen zum dritten Beweisschritt und haben zu zeigen:

Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) *bis* 4) *enthält außer den Kreisen mit nichtverschwindendem endlichen oder unendlichen Radius keine weiteren Elemente.*

Zum Beweise nehmen wir an, es gebe ein Element A von S, das kein Kreis mit endlichem oder unendlichem Radius ist. Nach Eigenschaft 2) enthält A wenigstens zwei verschiedene Punkte und ein diese verbindendes Kurvenstück, also sicher drei verschiedene Punkte. Der Kreis mit endlichem oder unendlichem Radius durch diese drei Punkte heiße K. Auf Grund des Ergebnisses der ersten beiden Beweisschritte ist K ein Element von S. Die beiden Elemente K und A von S haben also drei verschiedene Punkte gemein und sind daher nach Eigenschaft 3) identisch. Da aber A kein Kreis mit endlichem oder unendlichem Radius ist, so ist damit ein Widerspruch aufgezeigt.

Damit ist auch der dritte Beweisschritt erledigt und die angegebene Kennzeichnung des Systems aller Kreise des E_2 vollständig bewiesen.

Anmerkungen: Einfacher zu beweisen ist eine entsprechende Kennzeichnung des Systems aller Geraden des E_2. Man erhält diese aus den Eigenschaften 1) bis 4), wenn man die Eigenschaften 1), 2) und 4) unverändert beibehält und lediglich die Eigenschaft 3) in folgender Weise neu formuliert:

Zu irgend zwei Punkten des E_2 gibt es stets genau ein Element von S, das diese zwei Punkte enthält.

Eine entsprechende Kennzeichnung des Systems aller nichtentartenden Kegelschnitte des zweidimensionalen projektiven Raumes soll dieser Arbeit folgen. Weitere Probleme sind:

1. Für welche anderen Kurvensysteme sind entsprechende Kennzeichnungen möglich?
2. Ein abgeschlossenes Kurvenstück C des E_2 von gegebener kinematischer Eigenordnung gehe durch die Drehung um den einen Endpunkt um den Winkel $k \cdot \frac{2\pi}{n}$ über in das Kurvenstück C_k. Wir bilden $V = C_0 \dotplus \cdots \dotplus C_{n-1}$. Für die kinematische Eigenordnung von V ist eine untere Schranke anzugeben.
3. Ist C eine Strecke, so ist die genaue kinematische Eigenordnung von V anzugeben.

Eingegangen 7. Mai 1951.

Dualität in der Funktionentheorie.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Gottfried Köthe* in Mainz *).

Einleitung. Kürzlich hat J. S. e Silva ([13], [14]) [1]) eine interessante neue Grundlegung der Theorie der analytischen Funktionale von L. Fantappié [2]) gegeben. Sein Ausgangspunkt ist der lineare Raum $R(\mathfrak{A})$ aller auf einer abgeschlossenen echten Teilmenge $\mathfrak{A}$ der Riemannschen Zahlenkugel Ω lokalanalytischen Funktionen $u(\lambda)$. Ein solches $u(\lambda)$ ist eine in einer offenen $\mathfrak{A}$ enthaltenden Punktmenge erklärte und dort differenzierbare Funktion, und zwei solche $u(\lambda)$, die auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, sind als äquivalent anzusehen. Ferner wird vorausgesetzt, daß u in ∞ verschwindet, falls ∞ in $\mathfrak{A}$ liegt. In $R(\mathfrak{A})$ ist durch die gleichmäßige Konvergenz auf einer geeigneten, $\mathfrak{A}$ umfassenden offenen Menge eine Konvergenz eingeführt. Die linearen analytischen Funktionale und die analytischen Linien von Fantappié lassen sich dann deuten als stetige lineare Abbildungen dieser Räume $R(\mathfrak{A})$.

Es gelang Silva in [14] nicht, eine einfache Topologie in $R(\mathfrak{A})$ einzuführen, die den angegebenen Konvergenzbegriff liefert, und so blieb die Einordnung in die allgemeine Theorie der linearen Räume noch zu leisten. Silva bewies, daß $R(\mathfrak{A})$ kein Banachscher Raum sein kann.

In einem Spezialfall, nämlich $\mathfrak{A}$ gleich einem Punkt oder einer Kreisscheibe, hatte O. Toeplitz [15] mit den Mitteln der Theorie der vollkommenen Räume den Raum $R(\mathfrak{A})$ ebenfalls untersucht, eine einfache Topologie in ihm eingeführt und auch den dazu dualen Raum bestimmt. Für den allgemeinen Fall reicht die Theorie der vollkommenen Räume nicht aus; nach den Ergebnissen von Toeplitz war aber anzunehmen, daß die Theorie der Räume vom Typus (F) von J. Dieudonné und L. Schwartz [3] das geeignete Hilfsmittel sein würde.

Es ist naheliegender, vom dualen Raum zu $R(\mathfrak{A})$ auszugehen. Ist $\mathfrak{G}$ ein echtes Teilgebiet von Ω, so bezeichne $P(\mathfrak{G})$ den linearen Raum aller in $\mathfrak{G}$ erklärten und dort analytischen Funktionen, die im Punkt ∞ verschwinden, falls er zu $\mathfrak{G}$ gehört. Ist $\overline{\mathfrak{G}}_1 < \overline{\mathfrak{G}}_2 < \ldots$ eine Folge abgeschlossener Gebiete mit der Vereinigung $\mathfrak{G}$, so wird durch die Normen

$$\| x(z) \|_n = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{G}}_n} | x(z) |, \; n = 1, 2, \ldots,$$

auf $P(\mathfrak{G})$ eine Topologie erklärt, bezüglich deren $P(\mathfrak{G})$ ein Raum vom Typus (M) im Sinne von [3] wird (Satz 2). Der duale Raum zu $P(\mathfrak{G})$ ist nun nichts anderes als der

*) Anm. bei der Korrektur (20. 2. 52). Die Herren C. Dias und A. Grothendieck haben die Resultate über die Dualität von $P(\mathfrak{D})$ und $R(\Omega - \mathfrak{D})$ unabhängig von mir und etwa zur selben Zeit erhalten. Die Arbeit von C. Dias ist in vorläufiger Form (Espaços vectoriais topológicos e sue aplicação nos espaços funcionais analíticos, São Paulo 1951) bereits veröffentlicht, die Arbeit von Herrn Grothendieck erscheint ebenfalls in der vorliegenden Zeitschrift.

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) Eine Übersicht über den derzeitigen Stand der Theorie gab kürzlich *F. Pellegrino* [10], auf dessen Arbeit wegen weiterer Literaturangaben verwiesen sei.

Raum $R(\Omega - \mathfrak{G})$ und (Satz 8) für ein $u \in R(\Omega - \mathfrak{G})$ berechnet sich der Wert $u[x]$ der durch u erzeugten Linearfunktion auf $P(\mathfrak{G})$ durch ein Integral der Form

$$u[x] = \frac{1}{2\pi i} \oint u(t)\, x(t)\, dt.$$

Die starke und die schwache Topologie in $R(\Omega - \mathfrak{G})$ ergeben beide als Konvergenz gerade die gleichmäßige Konvergenz auf einer $\Omega - \mathfrak{G}$ enthaltenden offenen Menge; sie sind also Topologien, die die eingangs gestellte Frage beantworten.

Diese Dualität gilt ganz allgemein: *Zu jeder offenen echten Teilmenge $\mathfrak{D}$ von Ω bilde man den Raum $P(\mathfrak{D})$ der auf $\mathfrak{D}$ erklärten lokalanalytischen Funktionen, er ist wieder ein (M)-Raum, und sein dualer Raum ist der Raum $R(\Omega - \mathfrak{D})$ und umgekehrt* (Satz 17).

Damit ist die beabsichtigte Einordnung in die Theorie der (F)-Räume erreicht.

Anschließend werden die linearen stetigen Abbildungen A von $P(\mathfrak{D}_1)$ in $P(\mathfrak{D}_2)$ untersucht. Im Spezialfall ist dies durch Toeplitz [15], im dualen Fall durch Silva [13] geschehen. Jedem A läßt sich eineindeutig eine lokalanalytische Funktion $a(\lambda_1, z_2)$ von zwei Variablen zuordnen und man erhält A in Gestalt der Integraltransformation

$$Ax = \frac{1}{2\pi i} \oint a(t, z_2)\, x(t)\, dt.$$

Die Funktionen $a(\lambda_1, z_2)$ werden genau bestimmt (Satz 19).

Die adjungierte Abbildung A' von $R(\Omega - \mathfrak{D}_2)$ in $R(\Omega - \mathfrak{D}_1)$ wird durch eine Integraltransformation mit demselben Kern $a(\lambda_1, z_2)$ geliefert, nur ist dann über z_2 zu integrieren (Satz 20).

Die allgemeine Theorie der Räume vom Typus (F) liefert eine Reihe von Ergebnissen über die topologischen Eigenschaften der betrachteten Räume und über ihre linearen Abbildungen.

In den anschließenden Abschnitten werden als Beispiele die Differentiation, die Integration und die Multiplikation mit einer Funktion betrachtet und ihre adjungierten Operationen bestimmt.

Die hier entwickelte Theorie steht in engem Zusammenhang mit der Theorie der Distributionen von L. Schwartz [11], sie kann sogar, worauf mich Herr Dieudonné aufmerksam machte, durch Einbettung des Raumes $P(\mathfrak{G})$ in den Raum der im reellen Sinn unendlich oft differenzierbaren komplexen Funktionen auf $\mathfrak{G}$ aus ihr abgeleitet werden. Sie ist jedoch in ihren Hilfsmitteln einfacher als die Theorie der Distributionen, da sie nur die Theorie der (F)-Räume und nicht die der (LF)-Räume benützt. Ich habe mich bemüht, die Hilfsmittel aus der Theorie der linearen Räume in einer gewissen Ausführlichkeit darzustellen, da mir die Verbreitung dieser Methoden sehr wünschenswert erscheint.

Wesentlich ist vor allem die damit erzielte einfache Linearisierung der analytischen und lokalanalytischen Funktionen. So ergibt sich (vgl. die Schlußbemerkungen) eine neue Definition der in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen als der Gesamtheit der stetigen Linearfunktionen auf der linearen Hülle der elementaren Funktionen

$$u(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - z_0)^n}, \quad z_0 \in \mathfrak{G}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

in der eine einfache Topologie erklärt ist. Die analytische Fortsetzung der analytischen und lokalanalytischen Funktionen wird damit zu einer Anwendung des Hahn-Banachschen Erweiterungssatzes, eine Auffassung, die an Einfachheit und Verallgemeinerungsfähigkeit der üblichen überlegen sein dürfte.

Im letzten Abschnitt wird auf einige der sich anschließenden Fragen kurz hingewiesen.

1. Die Räume $P(\mathfrak{G})$. Es sei $\mathfrak{G}$ eine offene zusammenhängende echte Teilmenge der Riemannschen Zahlenkugel Ω, also ein Gebiet. Sind $x_1(z)$ und $x_2(z)$ zwei in $\mathfrak{G}$ analytische Funktionen, so auch ihre komplexen Linearkombinationen. Enthält $\mathfrak{G}$ den Punkt ∞ nicht, so bezeichnen wir den komplexen linearen Raum aller auf $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen mit $P(\mathfrak{G})$. Enthält $\mathfrak{G}$ den Punkt ∞, so sei jedoch $P(\mathfrak{G})$ der Raum aller auf $\mathfrak{G}$ analytischen und in ∞ verschwindenden Funktionen.

Wir führen in $P(\mathfrak{G})$ eine Topologie ein. Es sei $\overline{\mathfrak{G}}_1 < \overline{\mathfrak{G}}_2 < \cdots$ eine Folge von zusammenhängenden, in $\mathfrak{G}$ enthaltenen abgeschlossenen Gebieten, jedes $\overline{\mathfrak{G}}_n$ habe endlich viele rektifizierbare geschlossene Randkurven C_n^k $(k = 1, \ldots, m_n)$, deren Gesamtheit mit C_n bezeichnet werde. Enthält $\mathfrak{G}$ den Punkt ∞, so enthalte jedes $\overline{\mathfrak{G}}_n$ auch den Punkt ∞. Ferner bestehe $\overline{\mathfrak{G}}_n$ nur aus inneren Punkten von $\overline{\mathfrak{G}}_{n+1}$, und es sei die Vereinigung $\bigvee_{n=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{G}}_n = \mathfrak{G}$.

Durch den Ausdruck

$$(1) \qquad \| x \|_n = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{G}}_n} | x(z) |$$

wird nun für jedes n auf $P(\mathfrak{G})$ eine Norm eingeführt. Die Folge dieser Normen wächst, d. h. es ist $\| x \|_n \leqq \| x \|_{n+1}$ für alle n.

$P(\mathfrak{G})$ wird zu einem linearen lokalkonvexen Raum, wenn man in $P(\mathfrak{G})$ eine Topologie $\mathfrak{T}$ mit den Mengen $\| x \|_n < \varepsilon$ $(n = 1, 2, \ldots; \varepsilon > 0$ beliebig) als Fundamentalsystem der Umgebungen von Null einführt.

Jede auf Ω abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ ist in einem $\overline{\mathfrak{G}}_n$ enthalten; wir können die Topologie $\mathfrak{T}$ also auch durch alle Umgebungen

$$(2) \qquad \| x \|_{\mathfrak{A}} = \sup_{z \in \mathfrak{A}} | x(z) | < \varepsilon$$

erklären, woraus klar wird, daß $\mathfrak{T}$ von der speziellen Wahl der Folge $\overline{\mathfrak{G}}_n$ unabhängig ist.

Satz 1. *$P(\mathfrak{G})$ ist bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}$ ein (F)-Raum.*

Da ein linearer Raum, in dem eine Topologie durch eine wachsende Folge von Halbnormen (hier sogar Normen) eingeführt ist, metrisierbar ist, braucht zum Nachweis der Vollständigkeit von $P(\mathfrak{G})$ nur gezeigt zu werden, daß jede Cauchyfolge bezüglich $\mathfrak{T}$ einen Limes in $P(\mathfrak{G})$ besitzt.

Es sei $x^{(n)}$ eine $\mathfrak{T}$-Cauchyfolge. Dann gilt nach (2) für jedes $\mathfrak{A} < \mathfrak{G}$

$$\lim_{m, m' \to \infty} \| x^{(m)} - x^{(m')} \|_{\mathfrak{A}} = 0,$$

d. h. $x^{(n)}$ ist eine auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergente Folge von in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen, besitzt daher eine in $\mathfrak{G}$ analytische (in ∞ verschwindende) Funktion $x(z)$ als Limes.

Dieudonné und Schwartz [3] bezeichnen einen (F)-Raum als einen (M)-Raum, wenn jede bezüglich seiner Topologie $\mathfrak{T}$ beschränkte und abgeschlossene Menge bezüglich $\mathfrak{T}$ kompakt ist. Es gilt nun

Satz 2. *$P(\mathfrak{G})$ ist ein (M)-Raum.*

Beweis. Die Beschränktheit einer Teilmenge M von $P(\mathfrak{G})$ bedeutet, daß zu jedem n ein M_n existiert mit $\| x \|_n \leqq M_n$ für alle $x \in M$. Für Gebiete $\mathfrak{G}$, die den Punkt ∞ nicht enthalten, ist Satz 2 also der Satz von Montel. Durch eine Transformation $g(z) = f\left(\frac{1}{z-a}\right)$, a nicht in $\mathfrak{G}$, läßt sich der Fall $\infty \in \mathfrak{G}$ darauf zurückführen.

Wir führen nun den zu einer beliebigen offenen echten Teilmenge $\mathfrak{D}$ von Ω gehörenden Raum $P(\mathfrak{D})$ ein.

$\mathfrak{D}$ ist die Vereinigung höchstens abzählbar vieler getrennt liegender Gebiete $\mathfrak{G}^{(1)}, \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots$, den Komponenten von $\mathfrak{D}$.

Jede beliebige Folge $x(z) = \{x_1(z), x_2(z), \ldots\}$ von Funktionen $x_i(z) \in P(\mathfrak{G}^{(i)})$ bezeichnen wir nach Fantappié als eine *auf* $\mathfrak{D}$ *lokalanalytische Funktion.* Es ist dabei zu beachten, daß jedes $x_i(z)$ nur auf dem zugehörigen Gebiet $\mathfrak{G}^{(i)}$ definiert ist, die einzelnen $x_i(z)$ eines $x(z)$ brauchen also keineswegs analytische Fortsetzungen voneinander zu sein. Gehört ∞ zu $\mathfrak{D}$, so verschwindet $x(z)$ in ∞; wir haben diese Forderung also gleich in die Definition der lokalanalytischen Funktion hineingenommen.

Die auf $\mathfrak{D}$ lokalanalytischen Funktionen bilden einen linearen Raum $P(\mathfrak{D})$ bezüglich der üblichen Vektoroperationen. $P(\mathfrak{D})$ wird ein lokalkonvexer Raum, wenn man ihn als das topologische Produkt $\prod_i P(\mathfrak{G}^{(i)})$ der $P(\mathfrak{G}^{(i)})$ auffaßt.

Ein fundamentales Umgebungssystem der Null dieser Topologie $\mathfrak{T}$ von $P(\mathfrak{D})$ bilden im Fall unendlichvieler $\mathfrak{G}^{(i)}$ also die Mengen aller $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, die die Ungleichungen

(3) $\| x_1 \|_{n_1} < \varepsilon_1, \ldots, \| x_m \|_{n_m} < \varepsilon_m$; $m, n_1, n_2, \ldots$ beliebige natürliche Zahlen,

erfüllen.

Diese Topologie kann auch so erklärt werden: $\overline{\mathfrak{G}}_1^{(i)} \subset \overline{\mathfrak{G}}_2^{(i)} \subset \cdots$ sei die oben eingeführte Folge von abgeschlossenen Teilgebieten von $\mathfrak{G}^{(i)}$. Bezeichnen wir die Menge $\overline{\mathfrak{G}}_n^{(1)} \cup \cdots \cup \overline{\mathfrak{G}}_n^{(n)}$ mit $\overline{\mathfrak{G}}_n$, so wird durch den Ausdruck (1) auf $P(\mathfrak{D})$ eine Halbnorm in diesem Fall erklärt und die Topologie $\mathfrak{T}$ ist äquivalent der durch die wachsende Folge dieser Halbnormen auf $P(\mathfrak{D})$ erklärten Topologie. $P(\mathfrak{D})$ ist vollständig und jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge ist kompakt, da dies für die $P(\mathfrak{G}^{(i)})$ gilt (Diagonalverfahren); es gilt also ganz allgemein

Satz 3. *$P(\mathfrak{D})$ ist ein (M)-Raum.*

Neben diesen Räumen verwenden wir auch noch Banachräume von folgendem Typ. Es sei $\mathfrak{H}$ eine aus endlich vielen getrennten Gebieten endlichen Zusammenhangs bestehende Teilmenge von Ω, $\overline{\mathfrak{H}} \neq \Omega$, C der Rand von $\mathfrak{H}$, ∞ nicht Randpunkt von $\mathfrak{H}$. Dann bezeichnen wir mit $B(\overline{\mathfrak{H}})$ den Raum aller auf $\mathfrak{H}$ lokalanalytischen Funktionen $x(z)$ mit stetigen Randwerten auf C. Gehört ∞ zu $\mathfrak{H}$, so verlangen wir also, daß $x(z)$ in ∞ verschwindet. $B(\overline{\mathfrak{H}})$ ist ein Banachraum hinsichtlich der Norm $\| x \| = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{H}}} | x(z) |$, die Vollständigkeit folgt aus dem Satz von Weierstraß. Setzen wir voraus, daß der Rand $C = C_1 + \cdots + C_n$ von $\overline{\mathfrak{H}}$ aus analytischen Kurven besteht, so gilt

Satz 4. *Die auf $\overline{\mathfrak{H}}$ lokalanalytischen Funktionen sind in $B(\overline{\mathfrak{H}})$ dicht.*

Beweis. Ist $\overline{\mathfrak{H}}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\overline{\mathfrak{K}}$, $x(z) \in B(\overline{\mathfrak{K}})$, so ist $x(tz)$ für $0 < t < 1$ auf $\overline{\mathfrak{K}}$ regulär, und für $t \to 1$ konvergiert $x(tz)$ gleichmäßig auf $\overline{\mathfrak{K}}$ gegen $x(z)$. Ist $\overline{\mathfrak{H}}$ einfach zusammenhängend mit dem analytischen Rand C, so gibt es eine noch auf $|\xi| = 1$ bzw. C analytische Abbildung $z = \varphi(\xi)$ bzw. $\xi = \psi(z)$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ auf $\overline{\mathfrak{H}}$. Ist $x(z) \in B(\overline{\mathfrak{H}})$, so ist $x(\varphi(\xi)) \in B(\overline{\mathfrak{K}})$ gleichmäßig auf $\overline{\mathfrak{K}}$ durch die $x(\varphi(t\xi))$ approximierbar, also $x(z)$ auf $\overline{\mathfrak{H}}$ durch die auf $\overline{\mathfrak{H}}$ analytischen $x_t(z) = x(\varphi(t\psi(z)))$.

Ist $\overline{\mathfrak{H}}$ ein n-fach zusammenhängendes Gebiet mit dem Rand $C = C_1 + \cdots + C_n$, so folgt aus der Zerlegung

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z),$$

daß $f_\nu(z)$ in dem von C_ν berandeten, $\overline{\mathfrak{H}}$ umfassenden, einfach zusammenhängenden $\overline{\mathfrak{H}}_\nu$ analytisch ist und auf C_ν stetige Randwerte hat, da $f(z)$ dort stetige Randwerte besitzt und die übrigen $f_\mu(z)$, $\mu \neq \nu$, auf C_ν sogar analytisch sind. Es ist also $B(\overline{\mathfrak{H}})$ die direkte Summe der $B(\overline{\mathfrak{H}}_\nu)$, und die gleichmäßige Approximation jedes f_ν durch auf $\overline{\mathfrak{H}}_\nu$ analytische Funktionen ergibt die gleichmäßige Approximation von f auf $\overline{\mathfrak{H}}$ durch auf $\overline{\mathfrak{H}}$ analytische Funktionen.

Der Fall, daß $\overline{\mathfrak{H}}$ sich aus mehreren getrennten Gebieten zusammensetzt, ergibt sich nun unmittelbar[3]).

2. Der duale Raum zu $P(\mathfrak{G})$. Der duale Raum $P(\mathfrak{G})'$ zu $P(\mathfrak{G})$ besteht aus allen stetigen komplexen Linearfunktionen $u[x]$ auf $P(\mathfrak{G})$. Zu gegebenem $u \in P(\mathfrak{G})'$ gibt es also eine Nullumgebung $\| x \|_n \leqq 1$, auf der u beschränkt ist, d. h. es gilt

$$(4) \qquad | u[x] | \leqq M \| x \|_n \text{ für alle } x \in P(\mathfrak{G}).$$

Betrachten wir $P(\mathfrak{G})$ als linearen Teilraum von $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$, so besagt (4), daß u eine auf $P(\mathfrak{G})$ erklärte, im Sinn der Metrik von $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$ stetige Linearfunktion ist. Nach dem Satz von Hahn-Banach[4]) läßt sich u zu einer auf ganz $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$ erklärten Linearfunktion mit derselben Schranke M fortsetzen, so daß also (4) dann für alle $x(z) \in B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$ gilt. Wir werden später (Satz 9) sehen, daß es nur eine solche Erweiterung gibt, so daß die Beibehaltung desselben Buchstabens für die erweiterte Linearfunktion berechtigt ist.

Es sei nun $u[x]$ eine (4) erfüllende Linearfunktion auf $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$. Nach einem Verfahren von Fantappié ordnen wir u eine lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\lambda)$ zu, die bis auf das Vorzeichen mit der Fantappiéschen Indikatrix von u übereinstimmt.

Das Komplement $\mathfrak{H}_n = \Omega - \overline{\mathfrak{G}}_n$ ist eine offene Punktmenge mit endlich vielen Komponenten, die das abgeschlossene Komplement $\Omega - \mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}$ enthält. Ist nun λ irgendeine komplexe Zahl aus $\mathfrak{H}_n$, so gehören die Funktionen $x(z) = \dfrac{1}{(z-\lambda)^k}$ für $k = 1, 2, \ldots$ sämtlich zu $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$. Wir ordnen nun u die komplexe Funktion

$$(5) \qquad \tilde{u}(\lambda) = u\left[\frac{1}{z-\lambda}\right]$$

zu. Dann gilt

Satz 5. *Die einem $u \in B(\overline{\mathfrak{G}}_n)'$ zugeordnete Funktion $\tilde{u}(\lambda)$ ist in $\mathfrak{H}_n$ lokalanalytisch.*

Beweis. a) Es enthalte $\mathfrak{H}_n$ den Punkt ∞ nicht. Für $\lambda, \lambda_0 \in \mathfrak{H}_n$ gilt

$$(6) \qquad \frac{\tilde{u}(\lambda) - \tilde{u}(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = u\left[\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\left(\frac{1}{z-\lambda} - \frac{1}{z-\lambda_0}\right)\right].$$

Der Differenzenquotient von $\dfrac{1}{z-\lambda_0}$ konvergiert aber im Sinn der Metrik von $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$ nach $\dfrac{1}{(z-\lambda_0)^2}$, also existiert wegen der Stetigkeit von u in $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$ auch der Limes der linken Seite von (6), es gilt also $\tilde{u}'(\lambda_0) = u\left[\dfrac{1}{(z-\lambda_0)^2}\right]$; damit ist die Differenzierbarkeit für alle $\lambda_0 \in \mathfrak{H}_n$ nachgewiesen, also in diesem Fall Satz 5 bewiesen.

Wir merken an, daß sich durch vollständige Induktion sofort die Formel

$$(7) \qquad \tilde{u}^{(k)}(\lambda) = k!\, u\left[\frac{1}{(z-\lambda)^{k+1}}\right], \quad \lambda \in \mathfrak{H}_n, \quad k = 1, 2, \ldots$$

---

[3]) Satz 4 ist auch richtig ohne die Voraussetzung der Analytizität des Randes C, vgl. *J. L. Walsh*, Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, New York 1935, S. 37, th. 6. Herrn *H. Grunsky* habe ich für freundliche Hinweise beim Beweis zu danken.

[4]) Vgl. etwa [1], S. 55, th. 2.

ergibt. Es gilt ferner die Abschätzung

$$(8) \qquad |\tilde{u}^{(k)}(\lambda)| \leqq \frac{k!\,\|u\|_n}{[\delta_n(\lambda)]^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

wobei $\|u\|_n$ den Betrag von u als Element von $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)'$ bedeutet und $\delta_n(\lambda)$ die Entfernung des Punktes λ von $\overline{\mathfrak{G}}_n$ ist.

(8) ergibt sich sofort aus (7), wenn man $|u[x]| \leqq \|u\|_n \|x\|_n$ und

$$\left\| \frac{1}{z-\lambda} \right\|_n = \sup_{z \in \overline{\mathfrak{G}}_n} \left| \frac{1}{z-\lambda} \right| = \frac{1}{\delta_n(\lambda)}$$

beachtet.

b) Enthält $\mathfrak{H}_n$ den Punkt ∞, so folgt aus (8) für $k = 0$ sofort $\delta_n(\lambda)\,|\tilde{u}(\lambda)| \leqq \|u\|_n$, also ist $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \tilde{u}(\lambda) = 0$; daher ist $\tilde{u}$ auch in ∞ analytisch und verschwindet dort. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Wir untersuchen noch das weitere Verhalten von $\tilde{u}$ in ∞. Wir setzen $u\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \tilde{v}(\lambda)$ und erhalten aus

$$\tilde{v}^{(k)}(0) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\tilde{u}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)_{\lambda=0} = u\left[\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\frac{1}{z - 1/\lambda}\right)_{\lambda=0}\right]$$

die Beziehungen

$$(9) \qquad \tilde{v}'(0) = -u[1], \quad \tilde{v}^{(k)}(0) = (-1)^k k!\, u[z^{k-1}], \quad k = 2, 3, \ldots$$

Damit sind also auch die Entwicklungskoeffizienten von $\tilde{u}(\lambda)$ im Punkt ∞ als Werte von u auf gewissen Funktionen aus $P(\mathfrak{G})$ gegeben.

Kennt man die der Linearfunktion $u \in B(\overline{\mathfrak{G}}_n)'$ zugeordnete Funktion $\tilde{u}(\lambda)$, so kann man $u[x]$ folgendermaßen berechnen:

Satz 6. *Ist $x(z)$ eine auf ganz $\overline{\mathfrak{G}}_n$ analytische Funktion, $u \in B(\overline{\mathfrak{G}}_n)'$ und $\tilde{u}(\lambda)$ die zugeordnete Funktion, so gilt*

$$(10) \qquad u[x] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-C_\alpha} \tilde{u}(t)\, x(t)\, dt,$$

wo C_α der Rand eines $\overline{\mathfrak{G}}_n$ im Innern enthaltenden abgeschlossenen Regularitätsgebietes $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha$ von $x(z)$ ist. Das Minuszeichen gibt an, daß $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha$ zur Rechten liegt.

Beweis. Für jedes (auch unendliches) z im Innern von $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha$ gilt

$$x(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\alpha} \frac{x(t)}{t-z}\, dt.$$

Es sei $x_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum\limits_l \frac{x(t_l^{(k)})\, \Delta t_l^{(k)}}{t_l^{(k)} - z}$ eine Folge von Näherungssummen des Integrals. Für jedes $z \in \mathfrak{G}_\alpha$ gilt $\lim\limits_{k \to \infty} x_k(z) = x(z)$. Liegt z in $\overline{\mathfrak{G}}_n$ und bedeutet $|C_\alpha|$ die Länge des Randes, $\delta_\alpha(z)$ die Entfernung von z von C_α, und $\|x\|_\alpha = \sup\limits_{z \in \overline{\mathfrak{G}}_\alpha} |x(z)|$, so gilt

$$|x_k(z)| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{\|x\|_\alpha\, |C_\alpha|}{\delta_\alpha(z)} \leqq M.$$

Die Konvergenz $x_k(z) \to x(z)$ ist also gleichmäßig auf $\overline{\mathfrak{G}}_n$ nach dem Satz von Vitali, also gilt $\|x_k - x\|_n \to 0$, und aus der Stetigkeit von u folgt daher

$$u[x] = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum x(t_l^{(k)})\, u\left[\frac{1}{t_l^{(k)} - z}\right] \Delta t_l^{(k)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-C_\alpha} x(t)\, \tilde{u}(t)\, dt.$$

Satz 7. *Ist $\tilde{u}(\lambda)$ eine lokalanalytische Funktion in $\mathfrak{H} = \Omega - \overline{\mathfrak{G}}_n$, ist $\overline{\mathfrak{G}}_\alpha < \mathfrak{G}$ ein $\overline{\mathfrak{G}}_n$ im Innern enthaltendes Gebiet mit dem Rand C_α, so wird durch*

$$u[x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_\alpha} \tilde{u}(t)\, x(t)\, dt \tag{11}$$

eine stetige Linearfunktion auf $B(\overline{\mathfrak{G}}_\alpha)$ erzeugt.

Das Integral kann offenbar gebildet werden und stellt eine Linearfunktion auf $B(\overline{\mathfrak{G}}_\alpha)$ dar. Die Stetigkeit folgt aus

$$|u[x]| \leqq \frac{1}{2\pi} \sup_{t \in C_\alpha} |u(t)| \; \|x\|_\alpha \, |C_\alpha|.$$

Die erhaltenen Resultate sind in bezug auf $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$ nicht befriedigend. Zwar ist jedem $u \in B(\overline{\mathfrak{G}}_n)'$ eine in $\Omega - \overline{\mathfrak{G}}_n$ lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\lambda)$ zugeordnet worden, die ihrerseits wegen Satz 4 die Linearfunktion u eindeutig bestimmt. Doch stellen nicht alle in $\Omega - \overline{\mathfrak{G}}_n$ lokalanalytischen Funktionen $\tilde{u}(\lambda)$ stetige Linearfunktionen von $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$ dar: Ist z. B. $\overline{\mathfrak{G}}_n$ die Kreisscheibe $|z| \leqq 1$, so ist $\tilde{u}(\lambda) = \dfrac{1}{(\lambda - 1)^2}$ in $\Omega - \overline{\mathfrak{G}}_n$ analytisch, erfüllt aber nicht (8) für $k = 0$, denn $|\tilde{u}(\lambda)|$ wächst für reelle $\lambda \to 1$ schneller als $\dfrac{1}{\delta(\lambda)} = \dfrac{1}{(\lambda - 1)}$.

Die genaue funktionentheoretische Charakterisierung der $\tilde{u}(\lambda) \in B(\overline{\mathfrak{G}}_n)'$ gebe ich an anderer Stelle.

Doch reichen die Sätze 6 und 7 vollkommen aus, um den dualen Raum zu $P(\mathfrak{G})$ funktionentheoretisch zu bestimmen.

Aus dem bisher Bewiesenen ist klar, daß jedem $u \in P(\mathfrak{G})'$ eine auf einer geeigneten offenen Menge $\mathfrak{H} > \Omega - \mathfrak{G}$ mit zusammenhängendem Komplement $\Omega - \mathfrak{H}$ erklärte lokalanalytische Funktion $\tilde{u}(\lambda)$ zugeordnet werden kann, so daß

$$u[x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C} \tilde{u}(t)\, x(t)\, dt \tag{12}$$

für alle $x(z) \in P(\mathfrak{G})$ gilt, wobei C ein in $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}$ liegendes, $\Omega - \mathfrak{H}$ positiv umlaufendes Kurvensystem ist.

Umgekehrt folgt aus Satz 7, daß eine in $\mathfrak{H} > \Omega - \mathfrak{G}$ erklärte lokalanalytische Funktion durch (12) stets ein $u \in P(\mathfrak{G})'$ erzeugt. Zwei auf $\mathfrak{H}_1 > \Omega - \mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}_2 \in \Omega - \mathfrak{G}$ erklärte lokalanalytischen Funktionen $\tilde{u}_1$ bzw. $\tilde{u}_2$, die auf $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ übereinstimmen, erzeugen dieselbe Linearfunktion, wie durch Benutzung eines in $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ verlaufenden Integrationsweges in (12) folgt.

Nennen wir $\tilde{u}_1$ und $\tilde{u}_2$ äquivalent, wenn sie in einer $\Omega - \mathfrak{G}$ umfassenden offenen Menge $\mathfrak{H}$ mit zusammenhängendem Komplement identisch sind, so folgt also, daß wir jede solche Äquivalenzklasse von lokalanalytischen Funktionen mit einem Element von $P(\mathfrak{G})'$ identifizieren können.

Silva [13] bezeichnet eine solche Äquivalenzklasse als eine an $\Omega - \mathfrak{G}$ gebundene analytische Funktion. Ich werde sie hier als eine *auf der abgeschlossenen Menge $\Omega - \mathfrak{G}$ lokalanalytische Funktion* bezeichnen. Eine auf einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{A} < \Omega$ lokalanalytische Funktion ist also eine Klasse von lokalanalytischen Funktionen, die auf offenen, $\mathfrak{A}$ enthaltenden Mengen mit lauter zu $\mathfrak{A}$ nichtfremden Komponenten erklärt sind, und die paarweise auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsgebiete übereinstimmen.

Der lineare Raum aller auf $\mathfrak{A}$ lokalanalytischen Funktionen werde mit $R(\mathfrak{A})$ bezeichnet (bei Silva mit $F[\mathfrak{A}]$).

Satz 8. *Ist $\mathfrak{G}$ ein von Ω verschiedenes Gebiet, so ist der duale Raum zum Raum $P(\mathfrak{G})$ der auf $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen der Raum $R(\Omega - \mathfrak{G})$ der auf $\Omega - \mathfrak{G}$ lokalanalytischen Funktionen. Ist $\tilde{u}(\lambda)$ eine auf $\mathfrak{H} > \Omega - \mathfrak{G}$ erklärte lokalanalytische Funktion, so ergibt sich der Wert der durch $\tilde{u}$ bestimmten Linearfunktion $u[x]$ aus* (12).

Zum vollen Beweis dieses Satzes fehlt nur noch der Nachweis, daß zu einer stetigen Linearfunktion auf $P(\mathfrak{G})$ nicht mehr als eine Äquivalenzklasse von Funktionen $\tilde{u}(\lambda)$ gehört. $\tilde{u}(\lambda)$ ist als lokalanalytische Funktion in $\mathfrak{H} > \Omega - \mathfrak{G}$ bereits durch die Werte ihrer Ableitungen in je einem Punkte einer Komponente von $\mathfrak{H}$ bestimmt. In jeder Komponente liegt aber ein Punkt von $\Omega - \mathfrak{G}$, also ist $\tilde{u}(\lambda)$ nach (7) und (9) bereits durch die Werte von u auf $P(\mathfrak{G})$ eindeutig bestimmt.

Da $\tilde{u}(\lambda)$ nach Satz 6 den Wert der Linearfunktion $u[x]$ für alle auf ganz $\overline{\mathfrak{G}}_n$ analytischen Funktionen bestimmt, gilt bei analytisch berandetem $\overline{\mathfrak{G}}_n$ nach Satz 4 überdies

Satz 9. *Die Fortsetzung einer stetigen Linearfunktion von $P(\mathfrak{G})$ auf $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$ ist nur auf eine Weise möglich, $P(\mathfrak{G})$ ist also in $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$ dicht im Sinn der Metrik von $B(\overline{\mathfrak{G}}_n)$.*

3. Der duale Raum zu $P(\mathfrak{D})$. Der duale Raum zu $P(\mathfrak{D})$ läßt sich mit derselben Methode bestimmen wie in Nr. 2; wir leiten ihn hier jedoch mit einer der Theorie der linearen Räume angehörenden Methode ab, bei der seine Struktur deutlicher wird.

Wir betrachten gleich den Fall, daß $\mathfrak{D}$ unendlich viele Komponenten $\mathfrak{G}^{(k)}$ besitzt. Es sei $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_k \in P(\mathfrak{G}^{(k)})$, gegeben. Wir bezeichnen die Folge, deren k-tes Glied x_k ist und deren übrigen Glieder verschwinden, wieder mit x_k, fassen also $P(\mathfrak{G}^{(k)})$ als Teilraum von $P(\mathfrak{D})$ auf. In diesem Sinn konvergiert $x = \sum_1^\infty x_k$ in $P(\mathfrak{D})$. Es ist also $u[x] = \sum_1^\infty u[x_k] = \sum u_k[x_k]$ für eine stetige Linearfunktion u auf $P(\mathfrak{D})$, wenn wir die durch u auf $P(\mathfrak{G}^{(k)})$ erzeugte stetige Linearfunktion mit u_k bezeichnen. Fassen wir u_k als Element von $P(\mathfrak{D})'$ auf, so denken wir es auf den $P(\mathfrak{G}^{(j)}), j \neq k$, gleich Null gesetzt. u ist also durch die Folge $u_1, u_2, \ldots$ eindeutig bestimmt.

Es sind stets nur endlich viele u_k eines u von Null verschieden.

Denn ist u stetig, so gibt es eine Umgebung (3), auf der $|u[x]| \leqq 1$ ist. Ist $r > m$ und $x_r \neq 0$ aus $P(\mathfrak{G}^{(r)})$, so liegen x_r und alle αx_r, α komplex, in der Umgebung (3); wäre also $u[x_r] = u_r[x_r] \neq 0$, so würde $|u[\alpha x_r]| > 1$ sein für ein geeignetes α.

Umgekehrt ist eine Linearfunktion u, die nur auf endlich vielen $P(\mathfrak{G}^{(k)})$ von Null verschieden ist und dort mit einer stetigen Linearfunktion $u_k \in P(\mathfrak{G}^{(k)})'$ übereinstimmt, stetig auf $P(\mathfrak{D})$.

Bezeichnen wir den linearen Raum aller Folgen $\{u_1, u_2, \ldots\}$, $u_k \in P(\mathfrak{G}^{(k)})'$, mit nur endlich vielen $u_k \neq 0$, als die direkte topologische Summe $\bigoplus_{k=1}^\infty P(\mathfrak{G}^{(k)})'$ und berücksichtigen wir Satz 8, so ergibt sich (auch im Fall endlich vieler $\mathfrak{G}^{(k)}$)

Satz 10. *Der duale Raum zu $P(\mathfrak{D}) = \prod_k P(\mathfrak{G}^{(k)})$ ist die direkte Summe $\bigoplus_k R(\Omega - \mathfrak{G}^{(k)})$ der dualen Räume der $P(\mathfrak{G}^{(k)})$.*

Die funktionentheoretische Deutung des Raumes $\bigoplus_{k=1}^\infty R(\Omega - \mathfrak{G}^{(k)})$ ist einfach. Wir setzen $\Omega - \mathfrak{D} = \mathfrak{A}$, $\Omega - \mathfrak{G}^{(k)} = \mathfrak{A}^{(k)}$, also $\mathfrak{A} = \bigwedge_{k=1}^\infty \mathfrak{A}^{(k)}$. $\mathfrak{A}$ hat eventuell eine Komponente unendlichen Zusammenhangs. Ist $u = u_1 + \cdots + u_m$, $u_k \in R(\mathfrak{A}^{(k)})$, und ist $\tilde{u}_k(\lambda)$ eine auf

einer offenen, in keiner Komponente zu $\mathfrak{A}_k$ fremden Punktmenge $\mathfrak{H}^{(k)} > \mathfrak{A}^{(k)}$ definierte, u_k erzeugende lokalanalytische Funktion, so ist die Funktion $\tilde{u} = \tilde{u}_1(\lambda) + \cdots + \tilde{u}_m(\lambda)$ auf $\bigwedge_{k=1}^{m} \mathfrak{H}^{(k)} = \mathfrak{H} > \mathfrak{A} \cup \mathfrak{G}^{(m+1)} \cup \mathfrak{G}^{(m+2)} \cup \cdots$ lokalanalytisch. Sind $C_1, \ldots, C_m$ geeignete, in $\mathfrak{H}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{H}^{(m)}$ liegende Kurven, die $\mathfrak{A}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{A}^{(m)}$ im positiven Sinn umlaufen, C das System dieser Kurven, so ergibt (12), da $\tilde{u}_k$ in $\mathfrak{G}^{(k')}$, $k' \neq k$, analytisch ist und $x(z) = x_k(z)$ in $\mathfrak{G}^{(k)}$ gilt,

$$(13) \qquad u[x] = \sum_{k=1}^{m} u_k[x_k] = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \tilde{u}_k(t)\, x(t)\, dt$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \tilde{u}(t)\, x(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \tilde{u}(t)\, x(t)\, dt.$$

Ist andererseits $\tilde{u}(\lambda)$ eine auf einer $\mathfrak{A}$ enthaltenden offenen, in keiner Komponente zu $\mathfrak{A}$ fremden Punktmenge $\mathfrak{H}$ lokalanalytische Funktion, so ist $\mathfrak{H} > \mathfrak{A} \cup \mathfrak{G}^{(m+1)} \cup \mathfrak{G}^{(m+2)} \cup \ldots$ für ein geeignetes m, und durch

$$(14) \qquad \tilde{u}[x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \tilde{u}(t)\, x(t)\, dt$$

wird auf $P(\mathfrak{O})$ eine stetige Linearfunktion erzeugt, was sich wie Satz 7 ergibt. Wie in Nr. 2 ergibt sich ferner, daß $\tilde{u}(\lambda)$ durch u in $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt ist und daß äquivalente lokalanalytische Funktionen dieselbe Linearfunktion erzeugen; es gilt also

Satz 11. *Ist $\mathfrak{O}$ eine von Ω verschiedene offene Menge, so ist der duale Raum zum Raum $P(\mathfrak{O})$ der auf $\mathfrak{O}$ lokalanalytischen Funktionen der Raum $R(\mathfrak{A})$ der auf $\mathfrak{A} = \Omega - \mathfrak{O}$ lokalanalytischen Funktionen. Hat $\mathfrak{O}$ die Komponenten $\mathfrak{G}^{(k)}$, so ist $R(\mathfrak{A})$ die direkte topologische Summe der $R(\mathfrak{A}^{(k)})$, $\mathfrak{A}^{(k)} = \Omega - \mathfrak{G}^{(k)}$.*

Jede lokalanalytische Funktion auf $\mathfrak{A}$ ist also eindeutig zerlegbar in eine Summe endlich vieler je auf einem $\mathfrak{A}^{(k)} > \mathfrak{A}$ lokalanalytischen Funktionen.

4. $R(\mathfrak{A})$ als lokalkonvexer Raum. Zur Einführung einer geeigneten Topologie in $R(\mathfrak{A})$ führt uns die folgende Überlegung.

Es sei $\mathfrak{H}_1 > \mathfrak{H}_2 > \cdots$ eine Folge offener, $\mathfrak{A}$ enthaltender Punktmengen mit endlich vielen zu $\mathfrak{A}$ nicht fremden Komponenten und Rändern C_n endlicher Länge, so daß $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \mathfrak{H}_n = \mathfrak{A}$ ist. Es sei $B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$ der Banachsche Raum aller in $\mathfrak{H}_n$ lokalanalytischen Funktionen $u(\lambda)$ mit stetigen Randwerten auf C_n und der Metrik $\| u \|_n = \sup_{\lambda \in \mathfrak{H}_n} | u(\lambda) |$. Identifizieren wir wieder äquivalente Funktionen, so gilt $B(\overline{\mathfrak{H}}_n) < B(\overline{\mathfrak{H}}_{n+1})$ und es ist $R(\mathfrak{A})$ die Vereinigungsmenge $\bigvee_{n=1}^{\infty} B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$.

Jedes $B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$ ist ein lokalkonvexer Raum mit einer Topologie $\mathfrak{T}_n$, nämlich der durch die Metrik erzeugten, mit den Nullumgebungen $\| u \|_n < \varepsilon$. Wir führen nun in dem Vereinigungsraum $R(\mathfrak{A})$ die feinste lokalkonvexe Topologie ein, die in jedem $B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$ nicht feiner als $\mathfrak{T}_n$ ist, die Topologie $\mathfrak{T}$ der lokalkonvexen Hülle der $B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$ (vgl. [6]).

Ist $U_1, U_2, \ldots$, eine beliebige Folge von Nullumgebungen der Topologien $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \ldots$, so sei $U = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} U_n$ die absolut konvexe Hülle der U_n, d. h. die Menge aller

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k, \quad u_n \in U_n, \quad \sum_{1}^{k} |\alpha_n| \leqq 1, \quad k \text{ eine beliebige natürliche Zahl.}$$

Alle diese U bilden ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen von $\mathfrak{T}$.

Eine Menge B eines lokalkonvexen Raumes L mit der Topologie $\mathfrak{T}$ heißt beschränkt, wenn es zu jeder Nullumgebung U eine Zahl $c > 0$ so gibt, daß $B < cU$ ist.

Satz 12. *Die Menge aller $u \in B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$ mit $\| u \|_n \leqq M$, ist beschränkt in $R(\mathfrak{A})$ und jede beschränkte Menge aus $R(\mathfrak{A})$ ist für geeignetes n in einer solchen Menge enthalten.*

Beweis. $U_n(\varepsilon)$ sei die $\mathfrak{T}_n$-Umgebung aller $u \in B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$ mit $\| u \|_n \leqq \varepsilon$. Ihre in $B(\overline{\mathfrak{H}}_{n+1})$ gebildete abgeschlossene Hülle $\overline{U}_n(\varepsilon)$ ist nach Montel in jedem $B(\overline{\mathfrak{H}}_{n+m})$, $m \geqq 1$, kompakt. Also ist auch jede Menge $\overset{n}{\underset{k=1}{\Gamma}} \overline{U}_k(\varepsilon_k)$ in jedem $B(\overline{\mathfrak{H}}_{n+m})$ kompakt, also abgeschlossen.

Wäre die Behauptung des Satzes falsch, so gäbe es in $R(\mathfrak{A})$ eine beschränkte Folge u_n mit $\| u_n \|_n > n$. Wir setzen $U^{(1)} = \overline{U}_1(\frac{1}{2})$. Für $n - 1$ seien $U_1(\frac{1}{2}), \ldots, U_{n-1}(\varepsilon_{n-1})$ so bestimmt, daß $U^{(n-1)} = \overset{n-1}{\underset{k=1}{\Gamma}} \overline{U}_k(\varepsilon_k) < \overline{U}_{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ und $u_k \bar{\in} kU^{(n-1)}$, $k = 1, \ldots, n-1$, gilt. Dann liegt u_n nicht in $nU^{(n-1)}$ und wegen der Abgeschlossenheit von $U^{(n-1)}$ in $\mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{H}}_{n+1})$ gibt es ein $U_n(\varepsilon_n)$ mit $U^{(n)} = \Gamma(U^{(n-1)} \cup \overline{U}_n(\varepsilon_n)) < \overline{U}_n\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ und $u_k \bar{\in} kU^{(n)}$, $k = 1, \ldots, n$. Im Widerspruch zur Beschränktheit der u_k könnte jedes Vielfache der $\mathfrak{T}$-Umgebung $U = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} U_n(\varepsilon_n)$ nur endlich viele u_k enthalten. —

Eine Cauchyfolge $u^{(n)} \in R(\mathfrak{A})$ ist beschränkt, es gilt also $\| u^{(n)} \|_k \leqq M$ für ein $\overline{\mathfrak{H}}_k$. In jeder Komponente von $\overline{\mathfrak{H}}_k$ liegt wenigstens ein Punkt λ_0 von $\mathfrak{A}$. Ist $U = \overset{\infty}{\underset{m=1}{\Gamma}} U_m(1)$, so folgt aus $u^{(p)} - u^{(q)} \in \delta U$ für $p, q \geqq n_0(\delta)$ sofort, daß die $u^{(n)}$ in jedem λ_0 konvergieren. Bei Wahl geeigneter $\overset{\infty}{\underset{m=1}{\Gamma}} U_m(\varepsilon_m)$ folgt aus der Cauchyschen Integralformel leicht, daß auch sämtliche Ableitungen der $u^{(n)}$ in den λ_0 konvergieren, daraus ergibt sich aber wie im Satz von Vitali die gleichmäßige Konvergenz der $u^{(n)}$ in $\overline{\mathfrak{H}}_k$. Es gilt also

Satz 13. *Eine Folge $u^{(n)} \in R(\mathfrak{A})$ ist dann und nur dann eine Cauchyfolge, wenn die $u^{(n)}$ alle auf einer $\mathfrak{A}$ enthaltenden offenen Punktmenge lokalanalytisch sind und dort gleichmäßig konvergieren. Sie besitzt dann einen Limes $u^{(0)}$ in $R(\mathfrak{A})$; $R(\mathfrak{A})$ ist folgenvollständig bezüglich $\mathfrak{T}$.*

Die Topologie $\mathfrak{T}$ von $R(\mathfrak{A})$ ergibt also als zugehörigen Limesbegriff den von Silva eingeführten.

Wir betrachten wieder den dualen Raum $R(\mathfrak{A})'$ aller bezüglich $\mathfrak{T}$ stetigen Linearfunktionen $x[u]$. Es gilt

Satz 14. *Der duale Raum zu $R(\mathfrak{A})$ ist $P(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{D} = \Omega - \mathfrak{A}$.*

Ist $x[u]$ eine stetige Linearfunktion auf $R(\mathfrak{A})$, so ist $| x[u] | \leqq 1$ für ein geeignetes $U = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} U_n$. Für die $u \in U_n$ ist also x beschränkt, daher eine stetige Linearfunktion auf jedem $B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$.

Führen wir also entsprechend (5), aber mit geändertem Vorzeichen (λ und z haben ja ihre Rollen vertauscht!) durch

$$\tilde{x}(z) = x\left[\frac{1}{z - \lambda}\right], \; z \in \mathfrak{D}, \tag{15}$$

eine komplexe Funktion ein, so ist $\tilde{x}(z)$ nach Nr. 2 und Nr. 3 in jedem $\Omega - \overline{\mathfrak{H}}_n$, also in $\mathfrak{D}$ lokalanalytisch und es gilt für ein $u \in B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$

$$x[u] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \tilde{x}(t)\, u(t)\, dt = u[x], \tag{16}$$

wobei C_n in $\mathfrak{H}_n$ die Menge $\overline{\mathfrak{H}}_{n+1}$ positiv umläuft.

Umgekehrt erzeugt jedes $\tilde{x}(z) \in P(\mathfrak{D})$ durch (16) eine Linearfunktion x auf $R(\mathfrak{A})$, wenn für jedes u ein passendes n gewählt wird. Sie ist auf $R(\mathfrak{A})$ stetig; denn liegt u in der Umgebung U_n aller u mit $\| u \|_n \leqq \frac{2\pi}{| C_{n+1} | \, \| x \|_{n+1}}$, $\| x \|_{n+1} = \sup\limits_{z \in C_{n+1}} | \tilde{x}(z) |$ so wird $x[u]| \leqq 1$, also ist x auf ganz $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} U_n$ vom Betrage $\leqq 1$.

Bemerkung. Setzt man von einer Linearfunktion $x[u]$ nur voraus, daß sie auf $R(\mathfrak{A})$ *folgenstetig* ist, d. h. daß aus der Konvergenz $u^{(n)} \to u$ im Sinn von Satz 13 stets $x[u^{(n)}] \to x[u]$ folgt, so überlegt man leicht, daß x stetig ist im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}$ (x muß in jedem $B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$ beschränkt sein, also gibt es eine Umgebung $U = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} U_n$, auf der sie beschränkt ist). Diese Verschärfung von Satz 14 ist bereits bei Silva [13] bewiesen.

5. Die Dualität von $P(\mathfrak{D})$ und $R(\mathfrak{A})$. Zieht man die Theorie der (F)-Räume aus [3] heran, so lassen sich die bisher gewonnenen Resultate noch wesentlich ergänzen.

Sind L_1, L_2 zwei lokalkonvexe Räume, so daß jeder aus Linearfunktionen des anderen besteht und aus dem Verschwinden aller Linearfunktionen $u[x]$, $u \in L_2$, auf einem $x_0 \in L_1$ folgt, daß $x_0 = 0$ ist, und entsprechendes für die Elemente u_0 von L_2 gilt, so nennt man sie ein Dualsystem (Linearsystem nach Mackey [8]).

$P(\mathfrak{D})$ und $R(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A} = \Omega - \mathfrak{D}$, bilden also ein Dualsystem.

Die Menge aller $x \in L_1$, die endlich viele Ungleichungen

$$| u_i[x] | < \varepsilon, \; i = 1, \ldots, n, \; u_i \in L_2, \tag{17}$$

erfüllen, heißt eine schwache Nullumgebung in L_1, ihre Gesamtheit erzeugt die schwache Topologie $\mathfrak{T}_s$ auf L_1.

Damit sind in $P(\mathfrak{D})$ und in $R(\mathfrak{A})$ neben den Topologien $\mathfrak{T}$ die schwachen Topologien $\mathfrak{T}_s$ erklärt. Es gilt nach Dieudonné [2], th. 2:

Satz 15. *$P(\mathfrak{D})$ und $R(\mathfrak{A})$ sind schwach dual zueinander, d. h. jeder ist die Gesamtheit der schwach stetigen Linearfunktionen des anderen.*

Im dualen Raum L' eines lokalkonvexen Raumes L mit der Topologie $\mathfrak{T}$ ist die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$ folgendermaßen erklärt: Ist B eine bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}$ beschränkte Teilmenge von L, so bilden alle zu B polaren Mengen B^0 ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen der Topologie $\mathfrak{T}_b$ auf L'. Dabei ist B^0 definiert als die Menge aller $u \in L'$ mit $\sup\limits_{x \in B} | u[x] | \leqq 1$.

Damit ist also speziell auf $R(\mathfrak{A})$ auch die starke Topologie erklärt, wenn es nach Nr. 3 als dualer Raum zu $P(\mathfrak{D})$ bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}$ aufgefaßt wird.

Ist $\mathfrak{G}$ ein Gebiet, so bedeutet die Beschränktheit einer Menge $B < P(\mathfrak{G})$ offenbar, daß die Funktionen aus B in $\mathfrak{G}$ (d. h. auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\mathfrak{G}$) gleichmäßig beschränkt sind. In $P(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{D} = \bigvee\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{G}^{(i)}$ bedeutet die Beschränktheit einer Menge B von Funktionen $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_i \in P(\mathfrak{G}^{(i)})$, daß jedes B_i, die Menge der i-ten Komponenten x_i aller $x \in B$, in $\mathfrak{G}^{(i)}$ gleichmäßig beschränkt ist.

Es gilt nun

Satz 16. *Auf $R(\mathfrak{A})$ fällt die Topologie $\mathfrak{T}$ der lokalkonvexen Hülle mit der starken Topologie T_b zusammen.*

Wir zeigen zuerst, daß $\mathfrak{T}$ feiner ist als $\mathfrak{T}_b$, daß also jede starke Umgebung eine $\mathfrak{T}$-Umgebung umfaßt. Es sei $\mathfrak{H}_1 > \mathfrak{H}_2 > \cdots > \mathfrak{A}$ wie in Nr. 4 bestimmt. Jedes $\Omega - \mathfrak{H}_n$ ist abgeschlossene Teilmenge einer geeigneten endlichen Vereinigung $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{G}^{(i)}$. Ist B eine

beschränkte Menge in $P(\mathfrak{O})$, so gilt $|x(z)| \leqq M_n$ für alle $z \in \Omega - \mathfrak{H}_n$, $x \in B$. Ist $|C_n|$ die Länge des Randes von $\mathfrak{H}_n$, so setzen wir U_n gleich der Menge aller $u \in B(\overline{\mathfrak{H}}_n)$ mit $\|u\|_n \leqq \dfrac{2\pi}{M_n |C_n|}$, dann gilt für alle $u \in U_n$, $x \in B$

$$|u[x]| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \tilde{u}(t)\, x(t)\, dt\right| \leqq 1,$$

also liegt $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} U_n$ in B^0.

Andererseits folgt aus einem Satz von Mackey ([8], th. VII, 4. und [9], th. 4), daß die starke Topologie auf $R(\mathfrak{A})$ die feinste lokalkonvexe Topologie ist, zu der als dualer Raum $P(\mathfrak{O})$ gehört, also müssen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_b$ nach Satz 14 zusammenfallen.

Erklären wir auch in $P(\mathfrak{O})$ durch die Mengen B^0, B beschränkt in $R(\mathfrak{A})$, die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$, so erhalten wir, da $P(\mathfrak{O})$ als (M)-Raum nach [3], th. 4, stark reflexiv ist, ebenfalls die Ausgangstopologie auf $P(\mathfrak{O})$. Es gilt also

Satz 17. *$P(\mathfrak{O})$ und $R(\mathfrak{A})$ sind stark dual zueinander, die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$ fällt auf $P(\mathfrak{O})$ mit der Topologie $\mathfrak{T}$ des (F)-Raumes bzw. auf $R(\mathfrak{A})$ mit der Topologie $\mathfrak{T}$ der lokalkonvexen Hülle zusammen.*

Man überlegt leicht, daß im Falle $\mathfrak{O} = \bigvee_{i=1}^{\infty} \mathfrak{G}^{(i)}$ die Topologie $\mathfrak{T}$ auf

$$R(\mathfrak{A}) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R(\mathfrak{A}^{(i)}),\ \mathfrak{A}^{(i)} = \Omega - \mathfrak{G}^{(i)},$$

auch durch die Umgebungen $\bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i$, U^i eine $\mathfrak{T}$-Umgebung von $R(\mathfrak{A}^{(i)})$, erzeugt wird.

Ist $\mathfrak{O} = \Omega - \infty$, so ist $P(\mathfrak{O})$ der Raum der ganzen transzendenten Funktionen, der bei Toeplitz [15] mit π_∞ bezeichnet wird. Der duale Raum ist der Raum $R(\infty)$ der auf ∞ lokalanalytischen Funktionen, d. h. aller Äquivalenzklassen von in ∞ analytischen und dort verschwindenden Funktionen. Toeplitz deutet den dualen Raum zu π_∞ als den Raum ϱ_0 der Potenzreihen $\hat{u}(t)$ mit einem Konvergenzradius > 0. Offenbar geht $R(\infty)$ durch einen der Übergänge von $\tilde{u}(\lambda)$ zu

$$\hat{u}(t) = \pm \frac{1}{t}\,\tilde{u}\left(\frac{1}{t}\right) \tag{18}$$

in ϱ_0 über. Entsprechend erhält Toeplitz zur Berechnung des Wertes der Linearfunktion u auf π_∞ an Stelle unseres Ausdrucks (12) die Formel

$$u[x] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \hat{u}\left(\frac{1}{t}\right) x(t)\,\frac{dt}{t}, \tag{19}$$

wobei der Integrationsweg den Punkt 0 im positiven Sinn umkreist, was dem negativen Vorzeichen in (18) entspricht.

Eine Untersuchung über π_∞ als (F)-Raum hat auch Ganapathy Iyer [4] kürzlich durchgeführt.

6. Weitere Eigenschaften von $P(\mathfrak{O})$ und $R(\mathfrak{A})$. Da $P(\mathfrak{O})$ ein (M)-Raum ist, fallen nach [3], S. 80 in $P(\mathfrak{O})$ und $R(\mathfrak{A})$ die starke und die schwache Konvergenz zusammen, eine Folge $x^{(n)} \in P(\mathfrak{O})$ bzw. $u^{(n)} \in R(\mathfrak{A})$ ist also bereits dann stark konvergent gegen 0, wenn für alle $u \in R(\mathfrak{A})$ bzw. $x \in P(\mathfrak{O})$

$$\lim_{n\to\infty} u[x^{(n)}] = 0 \text{ bzw. } \lim_{n\to\infty} x[u^{(n)}] = 0$$

gilt.

Zur schwachen Topologie gehört ebenfalls ein Beschränktheitsbegriff, die schwache Beschränktheit, und es gilt wieder ([3], th. 3), daß jede schwach beschränkte Menge in $P(\mathfrak{O})$ oder $R(\mathfrak{A})$ stark beschränkt ist. Gilt also für jedes $u \in R(\mathfrak{A})$ bzw. $x \in P(\mathfrak{O})$

$$|u[x]| \leqq M(u) \text{ für alle } x \in B_1, \text{ bzw. } |x[u]| \leqq N(x) \text{ für alle } u \in B_2,$$

so sind B_1 und B_2 beschränkte Mengen in $P(\mathfrak{O})$ bzw. $R(\mathfrak{A})$.

$R(\mathfrak{A})$ ist nicht metrisierbar, d. h. es gibt keine Metrik in $R(\mathfrak{A})$, die die Topologie $\mathfrak{T}$ ergibt ([3], S. 75).

In Verschärfung von Satz 13 gilt ([3], S. 75), daß $R(\mathfrak{A})$ bezüglich $\mathfrak{T}$ vollständig ist. Nach [3], S. 80, prop. 10, ist jede beschränkte abgeschlossene Menge in $R(\mathfrak{A})$ kompakt.

Da $P(\mathfrak{D})$ ein (F)-Raum ist, ist jeder $\mathfrak{T}$-Häufungspunkt einer Teilmenge M von $P(\mathfrak{D})$ Limes einer gegen ihn konvergenten Folge von Elementen aus M.

Für $R(\mathfrak{A})$ ist dies, wie schon Toeplitz [15], § 2, Satz 5_b, und Silva [13], Nr. 21, zeigten, nicht richtig; aus einer Menge M entsteht durch Hinzunahme aller Limites konvergenter Folgen von Elementen aus M eine Menge M_1, die ihrerseits bei demselben Prozeß nicht abgeschlossen zu sein braucht.

Es gilt jedoch, was für die Stufenräume, zu denen z. B. ϱ_0 gehört, in [5], § 4, Satz 4, und einfacher in [7], § 2, bewiesen wurde:

Satz 18. *Eine Menge M aus $R(\mathfrak{A})$ ist stark abgeschlossen, wenn sie folgenabgeschlossen ist, d. h. den Limes jeder konvergenten Folge enthält.*

Ist M überdies absolut konvex, so ist M bipolar, d. h. es gilt $M^{00} = M$; M ist also schwach abgeschlossen. Ein linearer Teilraum von $R(\mathfrak{A})$ ist daher schwach abgeschlossen, wenn er folgenabgeschlossen ist.

Beweis. Nach [3], th. 5 (vgl. die Formulierung in [7], § 2, Satz 1), ist M dann $\mathfrak{T}$-abgeschlossen, wenn der Durchschnitt von M mit jeder beschränkten $\mathfrak{T}$-abgeschlossenen Menge $\mathfrak{T}$-abgeschlossen ist. Es ist aber jede beschränkte Teilmenge M von $R(\mathfrak{A})$ bereits $\mathfrak{T}$-abgeschlossen, wenn sie folgenabgeschlossen ist: M liegt nach Satz 12 in einem $B(\overline{\mathfrak{H}}_m)$. Als folgenabgeschlossene Menge ist M in jedem $B(\overline{\mathfrak{H}}_{m+k})$ abgeschlossen und man bestimmt zu einem $u_0 \bar{\in} M$ der Reihe nach $U_m(\varepsilon_m)$, $U_{m+1}(\varepsilon_{m+1}), \ldots$, so daß die in den $B(\overline{\mathfrak{H}}_{m+k})$ abgeschlossenen Umgebungen $u_0 + \overset{m+k}{\underset{l=m}{\Gamma}} \overline{U}_l(\varepsilon_l)$ von u_0 zu M fremd sind, also ist auch die $\mathfrak{T}$-Umgebung $u_0 + \overset{\infty}{\underset{l=m}{\Gamma}} U_l(\varepsilon_l)$ zu M fremd.

Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich dann sofort aus [7], § 2, Satz 2.

7. Lineare stetige Abbildungen von $P(\mathfrak{D}_1)$ in $P(\mathfrak{D}_2)$. In $P(\mathfrak{D}_1)$ und $P(\mathfrak{D}_2)$ sei je eine Folge $\overline{\mathfrak{G}}_1^{(1)} < \overline{\mathfrak{G}}_2^{(1)} < \cdots$ bzw. $\overline{\mathfrak{G}}_1^{(2)} < \overline{\mathfrak{G}}_2^{(2)} \cdots$ im Sinne von Nr. 1 gegeben mit den zugehörigen Halbnormen $\| x_1 \|_1, \| x_1 \|_2, \ldots$ bzw. $\| x_2 \|_1, \| x_2 \|_2, \ldots$. Es sei A eine lineare (stark) stetige Abbildung von $P(\mathfrak{D}_1)$ in $P(\mathfrak{D}_2)$. Ist eine Nullumgebung $\| x_2 \|_n \leqq 1$ in $P(\mathfrak{D}_2)$ gegeben, so gibt es also eine Nullumgebung in $P(\mathfrak{D}_1)$, deren Bild in $\| x_2 \|_n \leqq 1$ liegt. Als Nullumgebung in $P(\mathfrak{D}_1)$ kann nach Nr. 1 stets eine Umgebung der Form $\| x_1 \|_{N(n)} \leqq \varepsilon_n$ genommen werden. Damit ist A auch eine in $P(\mathfrak{D}_1) < B(\overline{\mathfrak{G}}_{N(n)}^{(1)})$ erklärte, im Sinn der Metrik von $B(\overline{\mathfrak{G}}_{N(n)}^{(1)})$ und $B(\overline{\mathfrak{G}}_n^{(2)})$ stetige Abbildung in $B(\overline{\mathfrak{G}}_n^{(2)})$.

Da $P(\mathfrak{D}_1)$ nach Satz 9 in $B(\overline{\mathfrak{G}}_{N(n)}^{(1)})$ dicht und $B(\overline{\mathfrak{G}}_n^{(2)})$ vollständig ist, läßt sich A zu einer in ganz $B(\overline{\mathfrak{G}}_{N(n)}^{(1)})$ erklärten, durch A eindeutig bestimmten [5]), stetigen Abbildung A_n in $B(\overline{\mathfrak{G}}_n^{(2)})$ fortsetzen.

Es ist also

$$\| A_n x_1 \|_n \leqq M_n \| x_1 \|_{N(n)} \text{ für alle } x_1 \in B(\overline{\mathfrak{G}}_{N(n)}^{(1)}). \tag{20}$$

---

[5]) Es ist nicht unbedingt nötig, Satz 9 und damit Satz 4 zum Beweis heranzuziehen. Da $\dfrac{1}{z_1 - \lambda_1}$ für festes $\lambda_1 \in \Omega - \overline{\mathfrak{G}}_{N(n)}^{(1)}$ auf ganz $\overline{\mathfrak{G}}_{N(n)}^{(1)}$ lokalanalytisch ist, folgt leicht, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{P(\mathfrak{D}_1)}$ von $P(\mathfrak{D}_1)$ in $B(\overline{\mathfrak{G}}_{N(n)}^{(1)})$ die Funktion $\dfrac{1}{z_1 - \lambda_1}$ enthält. Damit läßt sich $a_n(\lambda_1, z_2)$ bereits erklären durch die Fortsetzung von A auf $\overline{P(\mathfrak{D}_1)}$, ohne daß man zu untersuchen braucht, ob $\overline{P(\mathfrak{D}_1)} = B(\overline{\mathfrak{G}}_{N(n)}^{(1)})$ ist oder nicht (Bemerkung von Herrn Silva).

Wir ordnen nun A die komplexe Funktion zweier Variablen

$$a_n(\lambda_1, z_2) = A_n\left(\frac{1}{z_1 - \lambda_1}\right) \tag{21}$$

zu, die für alle endlichen $\lambda_1 \in \mathfrak{H}^{(1)}_{N(n)} = \Omega - \overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{N(n)}$ und alle $z_2 \in \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_n$ erklärt ist. Enthält $\mathfrak{H}^{(1)}_{N(n)}$ den Punkt ∞, so setzen wir $a_n(\infty, z_2) = 0$. Damit ist a_n auf der Teilmenge $\mathfrak{H}^{(1)}_{N(n)} \times \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_n$ von $\Omega \times \Omega$ erklärt.

$a_n(\lambda_1, z_2)$ ist nach (21) für festes λ_1 im Innern von $\overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_n$ lokalanalytisch und auf dem Rande stetig.

Wie in Nr. 2 ergibt sich die Differenzierbarkeit von $a_n(\lambda_1, z_2)$ in jedem endlichen $\lambda_1 \in \mathfrak{H}^{(1)}_{N(n)}$, ferner folgen aus (20) die Ungleichungen

$$\| a_n(\lambda_1, z_2) \|_n \leqq \frac{M_n}{\delta_{N(n)}(\lambda_1)}, \tag{22}$$

$$\left\| \frac{\partial^k a_n(\lambda_1, z_2)}{\partial \lambda_1^k} \right\|_n \leqq k!\, M_n \frac{1}{[\delta_{N(n)}(\lambda_1)]^{k+1}}, \tag{23}$$

wobei $\delta_{N(n)}(\lambda_1)$ wieder der Abstand von λ_1 vom Rand $C^{(1)}_{N(n)}$ von $\mathfrak{H}^{(1)}_{N(n)}$ ist.

Aus (22) folgt, daß a_n für $\lambda_1 \to \infty$ gegen 0 geht; $a_n(\lambda_1, z_2)$ ist also in ganz $\mathfrak{H}^{(1)}_{N(n)} \times \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_n$ lokalanalytisch in beiden Variablen (verschwindet in jedem (λ_1, z_2), von dem eine Koordinate gleich ∞ ist).

a_n und a_m, $n < m$, stimmen auf $(\mathfrak{H}^{(1)}_{N(n)} \frown \mathfrak{H}^{(1)}_{N(m)}) \times (\overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_n \frown \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_m) = \mathfrak{H}^{(1)}_{N(m)} \times \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_n$ überein, sind also in diesem Sinn lokalanalytische Fortsetzungen voneinander; die so durch alle a_n auf $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathfrak{H}^{(1)}_{N(n)} \times \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_n$ erklärte lokalanalytische Funktion werde mit $a(\lambda_1, z_2)$ bezeichnet.

Es sei $x_1 \in P(\mathfrak{D}_1)$. Dann ist

$$x_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{N(n)+1}} \frac{x(t_1)}{t_1 - z_1}\, dt_1$$

für jedes $z_1 \in \overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{N(n)}$. Aus der Konvergenz des Integrals im Sinn der Metrik von $B(\overline{\mathfrak{G}}^{(1)}_{N(n)})$ (Satz 6) folgt wieder

$$A x_1 = x_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_{N(n)+1}} x_1(t_1)\, a(t_1, z_2)\, dt_1 \tag{24}$$

gleichmäßig für $z_2 \in \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_n$. Vergrößert man n, so erhält man $x_2(z_2)$ für jedes $z_2 \in \mathfrak{D}_2$.

Es sei umgekehrt $a(\lambda_1, z_2)$ eine in beiden Variablen lokalanalytische, also in allen unendlichen Punkten verschwindende Funktion, die in einem Bereich $\mathfrak{D}$ erklärt ist mit folgender Eigenschaft: Zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $\mathfrak{R}_2$ von $\mathfrak{D}_2$, die in endlich vielen der Komponenten von $\mathfrak{D}_2$ enthalten ist, gebe es eine offene, $\mathfrak{A}_1 = \Omega - \mathfrak{D}_1$ enthaltende Menge $\mathfrak{H}_1$ mit keiner zu $\mathfrak{A}_1$ fremden Komponente, so daß $\mathfrak{D} > \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{R}_2$ ist. Offenbar ist $\mathfrak{D} > \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{D}_2$. Das vorhin betrachtete Gebiet $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathfrak{H}^{(1)}_{N(n)} \times \overline{\mathfrak{G}}^{(2)}_n$ ist ein solches Gebiet $\mathfrak{D}$. Der Durchschnitt zweier Bereiche $\mathfrak{D}$ ist wieder ein Bereich $\mathfrak{D}$. Stimmen zwei auf $\mathfrak{D}_1$ bzw. $\mathfrak{D}_2$ lokalanalytische Funktionen auf $\mathfrak{D}_1 \frown \mathfrak{D}_2$ überein, so nennen wir sie wieder *äquivalent*, und eine Äquivalenzklasse solcher Funktionen bezeichnen wir kurz als *eine auf* $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{D}_2$ *lokalanalytische Funktion.*

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$(25) \qquad A x_1 = x_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C x_1(t_1)\, a(t_1, z_2)\, dt_1,$$

C ein $\mathfrak{A}_1$ positiv umlaufendes Kurvensystem. Ist $z_2 \in \mathfrak{R}_2$, so ist $a(t_1, z_2)$ in $\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{R}_2$ erklärt; ist also C der Rand eines $\mathfrak{H}_1'$ mit $\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{H}_1' < \mathfrak{H}_1$, so existiert das Integral (25) und ergibt eine in $\mathfrak{R}_2$ lokalanalytische Funktion $x_2(z_2)$; insbesondere folgt $x_2(\infty) = 0$ aus $a(t_1, \infty) = 0$. Durch Verschieben von C erhält man eine in ganz $\mathfrak{D}_2$ lokalanalytische Funktion $x_2(z_2)$. A ist also eine lineare Abbildung von $P(\mathfrak{D}_1)$ in $P(\mathfrak{D}_2)$. Man erhält dieselbe Abbildung, wenn man $a(t_1, z_2)$ durch eine äquivalente Funktion ersetzt.

Wir beweisen, daß A stetig ist. Die Funktion $a(t_1, z_2)$ ist nach dem Satz von Hartogs beschränkt in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $\mathfrak{D}$. Liegt x_1 in der Nullumgebung $\sup\limits_{z \in \Omega - \mathfrak{H}_-} | x_1(z_1) | \leqq 1$, so gilt nach (25)

$$| x_2(z_2) | \leqq \frac{| C | K}{2\pi} < \infty \text{ für alle } z_2 \in \mathfrak{R}_2,$$

wenn K eine Schranke für die Beträge von $a(\lambda_1, z_2)$ auf $C \times \mathfrak{R}_2 < \mathfrak{D}$ ist; d. h. $x_2(z_2)$ liegt in einer zu der vorgegebenen Menge $\mathfrak{R}_2$ gehörigen Nullumgebung von $P(\mathfrak{D}_2)$, A ist stetig.

Setzt man $x_1(t_1) = \dfrac{1}{t_1 - \lambda_1}$ in (25) ein, so erhält man nach (21) wieder $a(\lambda_1, z_2)$ zurück. Wir fassen zusammen:

Satz 19. *Die linearen stetigen Abbildungen von $P(\mathfrak{D}_1)$ in $P(\mathfrak{D}_2)$ und die auf $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{D}_2$ lokalanalytischen Funktionen $a(\lambda_1, z_2)$ entsprechen sich eineindeutig bei der durch* (21) *bzw.* (25) *gegebenen Zuordnung.*

8. Die linearen stetigen Abbildungen von $R(\mathfrak{A}_2)$ in $R(\mathfrak{A}_1)$. Bekanntlich sind (vgl. etwa [2]) die linearen stetigen Abbildungen des zu $P(\mathfrak{D}_2)$ dualen Raumes $R(\mathfrak{A}_2)$ in den zu $P(\mathfrak{D}_1)$ dualen Raum $R(\mathfrak{A}_1)$ die adjungierten Abbildungen A' der Abbildungen A von $P(\mathfrak{D}_1)$ in $P(\mathfrak{D}_2)$. Die adjungierte Abbildung ist erklärt durch

$$(26) \qquad x_1[A' u_2] = u_2[A x_1] \text{ für alle } x_1 \in P(\mathfrak{D}_1),\ u_2 \in R(\mathfrak{A}_2).$$

Verwenden wir (25) und (14), so erhalten wir

$$(27) \qquad x_1[A' u_2] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_2} \tilde{u}_2(t_2) \int_{C_1} x_1(t_1)\, a(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2,$$

wobei C_1 und C_2 geeignete, $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ im positiven Sinn umlaufende Kurvensysteme sind. Vertauscht man die Reihenfolge der Integrationen und beachtet man, daß $x_1[A' u_2] = (A' u_2)[x_1]$ und die $A' u_2$ zugeordnete lokalanalytische Funktion auf $\mathfrak{A}_2$ eindeutig bestimmt ist, so folgt

$$(28) \qquad A' u_2 = \tilde{u}_1(\lambda_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \tilde{u}_2(t_2)\, a(\lambda_1, t_2)\, dt_2,$$

C_2 ein $\mathfrak{A}_2$ positiv umlaufendes Kurvensystem. Setzt man $\tilde{u}_2(\lambda_2) = \dfrac{1}{z_2 - \lambda_2}$, $z_2 \in \mathfrak{D}_2$, so erhalten wir

$$(29) \qquad A' \frac{1}{(z_2 - \lambda_2)} = a(\lambda_1, z_2).$$

Wieder ist zu beachten, daß im Vergleich zu (21) in (29) auf der linken Seite das andere Vorzeichen benutzt wurde. Damit ist bewiesen:

Satz 20. *Die linearen stetigen Abbildungen A' von $R(\mathfrak{A}_2)$ in $R(\mathfrak{A}_1)$ und die auf $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{D}_2$ lokalanalytischen Funktionen $a(\lambda_1, z_2)$ entsprechen sich eineindeutig. Zwei zuein-*

ander adjungierten Abbildungen entspricht dieselbe Funktion, aus der man umgekehrt die Abbildungen durch Integration über die eine bzw. die andere Variable erhält.

In Satz 19 und 20 ist die Stetigkeit im Sinn der starken Topologie benützt worden. Es gilt jedoch

Satz 21. *Eine lineare Abbildung A von $P(\mathfrak{D}_1)$ in $P(\mathfrak{D}_2)$ oder von $R(\mathfrak{A}_1)$ in $R(\mathfrak{A}_2)$ ist dann und nur dann stark stetig, wenn sie schwach stetig oder folgenstetig ist.*

Die Identität der stark und schwach stetigen linearen Abbildungen folgt aus [2], th. 15 und [3], prop. 19, corollaire und prop. 20. Die starke Stetigkeit in einem (F)-Raum folgt bereits aus der Folgenstetigkeit, also gilt Satz 21 für die Räume $P(\mathfrak{D})$. Schließlich ergibt sich die starke Stetigkeit aus der Folgenstetigkeit in den Räumen $R(\mathfrak{A})$ folgendermaßen: Bildet A den Raum $R(\mathfrak{A}_1)$ in $R(\mathfrak{A}_2)$ folgenstetig ab, so führt sie beschränkte Mengen in beschränkte Mengen über, wie sich aus der relativen Kompaktheit der beschränkten Mengen sofort ergibt. Das Bild einer Nullumgebung von $B(\overline{\mathfrak{H}}_n^{(1)})$, $\mathfrak{H}_n^{(1)} > \mathfrak{A}_1$, ist also in einer Nullumgebung von $B(\overline{\mathfrak{H}}_{N(n)}^{(2)})$, $\mathfrak{H}_{N(n)}^{(2)} > \mathfrak{A}_2$, für geeignetes $N(n)$ enthalten.

Ist daher eine Umgebung $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} V_n$ in $R(\mathfrak{A}_2)$ vorgegeben, so läßt sich eine Umgebung $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} U_n$ in $R(\mathfrak{A}_1)$ finden, deren Bild in $\Gamma_n V_n$ liegt.

Eine lineare stetige Abbildung heißt ein *Homomorphismus*, wenn sie offen ist, d. h. das Bild jeder Nullumgebung wieder eine Nullumgebung enthält. Ist sie überdies eineindeutig, so heißt sie ein *Isomorphismus*.

Aus [3], th. 7 folgt

Satz 22. *Eine lineare stetige Abbildung A von $P(\mathfrak{D}_1)$ in $P(\mathfrak{D}_2)$ ist dann und nur dann ein starker Homomorphismus, wenn sie ein schwacher Homomorphismus oder wenn A' ein starker oder schwacher Homomorphismus von $R(\mathfrak{A}_2)$ in $R(\mathfrak{A}_1)$ ist oder wenn der Bildraum von A oder von A' abgeschlossen ist.*

9. Differentiation und Integration als stetige Abbildungen. Wir bringen einige einfache Beispiele zur allgemeinen Theorie.

Die identische Abbildung E von $P(\mathfrak{D})$ und $R(\mathfrak{A})$ wird durch die Funktion $a(\lambda, z) = \dfrac{1}{z-\lambda}$ erzeugt. Dies ist nur eine andere Formulierung des Cauchyschen Integralsatzes.

Bildet A den Raum $P(\mathfrak{D}_1)$ in $P(\mathfrak{D}_2)$, B den Raum $P(\mathfrak{D}_2)$ in $P(\mathfrak{D}_3)$ ab, so entspricht dem Produkt $C = BA$ offenbar die Funktion

$$c(\lambda_1, z_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_C a(\lambda_1, t_2)\, b(t_2, z_3)\, dt_2, \tag{29}$$

C ein $\mathfrak{A}_2 = \Omega - \mathfrak{D}_2$ positiv umlaufendes Kurvensystem, das variiert werden muß, um die Funktion c in ihrem ganzen Definitionsbereich zu erhalten.

Die Differentiation $Dx = x'(z)$ ist eine lineare Abbildung sowohl von $P(\mathfrak{D})$ wie von $R(\mathfrak{A})$ in sich. Die zugeordnete Funktion in $P(\mathfrak{D})$ ist nach (21) offenbar $-\dfrac{1}{(z_1-\lambda_1)^2}$, in $R(\mathfrak{A})$ nach (29) aber $\dfrac{1}{(z_1-\lambda_1)^2}$; es gilt also $D' = -D$ nach Satz 20 wie in der Theorie der Distributionen. Ferner ist der Bildraum stets abgeschlossen, Satz 22 ergibt daher

Satz 23. *Die Differentiation D ist sowohl in $P(\mathfrak{D})$ wie in $R(\mathfrak{A})$ ein Homomorphismus, dessen adjungierte Abbildung $D' = -D$ ist. Allgemein gilt $(D^n)' = (-1)^n D^n$.*

Wir untersuchen die Eigenschaften von D etwas genauer im Fall eines einfach zusammenhängenden Gebiets $\mathfrak{G}$, das den Punkt ∞ nicht enthält. Die Konstanten sind in $P(\mathfrak{G})$, also hat D einen Nullraum der Dimension 1 und der Bildraum ist ganz $P(\mathfrak{G})$. In $R(\Omega - \mathfrak{G})$ ist D ein Isomorphismus auf einen Bildraum vom Defekt 1 in $R(\Omega - \mathfrak{G})$, der durch Addition aller komplexen Vielfachen einer Funktion $\frac{1}{\mu - z_0}$, $z_0 \in \mathfrak{G}$, zu $R(\Omega - \mathfrak{G})$ ergänzt wird.

Zu D kann es in $P(\mathfrak{G})$ nur rechte Reziproke J geben, d. h. Abbildungen J mit $DJ = E$; eine solche ist offenbar für $a \in \mathfrak{G}$ die Integration J_a von a bis z. Ist J eine beliebige andere rechte Reziproke, so muß für $K = J - J_a$ gelten $DK = 0$, d. h. K muß eine stetige Abbildung sein, die jedes $x(z)$ in $P(\mathfrak{G})$ auf eine Konstante abbildet, d. h. Kx ist eine stetige Linearfunktion $u_0[x]$.

Alle rechten Reziproken von D haben also die Form

$$Jx = u_0[x] + \int_a^z x(t)\,dt. \tag{30}$$

Darunter sind speziell die Integrationen J_b für beliebiges $b \in \mathfrak{G}$ enthalten.

Die zu J_a gehörige Funktion $i_a(\lambda, z)$ ist nach (21) offenbar

$$i_a(\lambda, z) = \log \frac{z - \lambda}{a - \lambda}, \tag{31}$$

wobei der Hauptzweig mit $\log 1 = 0$ zu nehmen ist. Da ferner zu $u_0[x]$ die Funktion $u_0(\lambda)$ gehört, erhalten wir die Darstellung

$$Jx = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[u_0(t) + \log \frac{z - t}{a - t} \right] x(t)\,dt, \tag{32}$$

(C eine ∞ positiv umkreisende Kurve in $\mathfrak{G}$), die für $u_0 = 0$ bei Fantappié verwendet wird (vgl. [10], S. 46).

Welche funktionentheoretische Deutung hat die adjungierte Abbildung J' in $R(\Omega - \mathfrak{G})$? Offenbar durchläuft $-J'$ alle linken Reziproken von D.

Die zur Linearfunktion $U_0 x = u_0[x]$ adjungierte Abbildung U_0' ist

$$U_0' u = \frac{1}{2\pi i} \int_C u_0(\lambda)\, u(t)\,dt = u_0(\lambda)\, Res\,(u(t)), \tag{33}$$

wobei das Residuum von $u(t)$ im Punkt ∞ zu nehmen ist.

Die Integration von ∞ bis λ in $\Omega - \mathfrak{G}$ führt nur für solche $u(\lambda) \in R(\Omega - \mathfrak{G})$ wieder zu einer Funktion in $R(\Omega - \mathfrak{G})$, deren Koeffizient von $\frac{1}{\lambda}$ in der Entwicklung um den Punkt ∞ verschwindet. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \log \frac{t - \lambda}{a - \lambda} \cdot u(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \log \frac{t - \lambda}{a - \lambda} \cdot \left[u(t) + \frac{Res(u)}{t} \right] dt - \frac{1}{2\pi i} \int_C \log \frac{t - \lambda}{a - \lambda} \cdot \frac{Res(u)}{t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{t - \lambda} \int_\infty^t \left[u(\mu) + \frac{Res(u)}{\mu} \right] d\mu\,dt + Res(u) \cdot \log \frac{-\lambda}{a - \lambda}$$

$$= -\int_\infty^\lambda \left[u(\mu) + \frac{Res(u)}{\mu} \right] d\mu + Res(u) \cdot \log \frac{\lambda}{\lambda - a}.$$

Mit (33) zusammen ergibt dies

Satz 24. *$\mathfrak{G}$ sei ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet. Die zur Abbildung* (30) *adjungierte Abbildung von $R(\Omega - \mathfrak{G})$ in sich ist die Abbildung*

$$(34) \qquad J'u = -\int_{\infty}^{\lambda} \left(u(\mu) + \frac{Res(u)}{\mu}\right) d\mu + \left[u_0(\lambda) + \log\frac{\lambda}{\lambda - a}\right] Res(u).$$

Enthält $\mathfrak{G}$ den Punkt 0, so ist also die zur Integration von 0 bis z in $P(\mathfrak{G})$ adjungierte Abbildung in $R(\Omega - \mathfrak{G})$ die Integration von λ bis ∞ über die Funktionen $u(\mu) + \frac{Res(u)}{\mu}$.

10. Die Multiplikation mit einer Funktion. Wie vorhin sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet. Die Multiplikation $M_a x = a(z)\, x(z)$ mit einer festen Funktion aus $P(\mathfrak{G})$ ist eine lineare stetige Abbildung von $P(\mathfrak{G})$ in sich. Da aus der gleichmäßigen Konvergenz von $a(z)\, x_n(z)$ in $\mathfrak{G}$ die von $x_n(z)$ folgt, ist M_a sogar ein Isomorphismus von $P(\mathfrak{G})$. Dann und nur dann, wenn $a(z)$ keine Nullstellen in $\mathfrak{G}$ besitzt, ist M_a ein Automorphismus von $P(\mathfrak{G})$, d. h. ein Isomorphismus von $P(\mathfrak{G})$ auf sich.

Zu M_a gehört die Funktion $\frac{a(z)}{z - \lambda}$, die adjungierte Abbildung wird durch

$$(35) \qquad M'_a u = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a(t)\, u(t)}{t - \lambda}\, dt,$$

C eine ∞ positiv umlaufende Kurve in $\mathfrak{G}$, gegeben.

Da M_a ein Isomorphismus ist, ist M_a ein Homomorphismus von $R(\Omega - \mathfrak{G})$ auf ganz $R(\Omega - \mathfrak{G})$.

Wir untersuchen, welche Lösungen die homogene Integralgleichung

$$(36) \qquad M'_a u = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a(t)\, u(t)}{t - \lambda}\, dt = 0$$

besitzt.

Wir folgen der von O. Toeplitz ([15], § 5) in einem Spezialfall angewendeten Methode.

$a(t)\, u(t)$ ist in einem C enthaltenden Ringgebiet $(\Omega - \mathfrak{G}_1) \cap \mathfrak{G}_2$ mit $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \mathfrak{G}$ analytisch, also dort eindeutige Summe zweier in $\mathfrak{G}_2$ bzw. $\Omega - \mathfrak{G}_1$ analytischer Funktionen $c_1(z)$ bzw. $c_2(z)$, von denen $c_1(z)$ in ∞ verschwindet. Für eine Lösung $u(t)$ von (36) gilt also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{c_1(t)}{t - \lambda}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{c_2(t)}{t - \lambda}\, dt = 0, \qquad \lambda \text{ außerhalb } C.$$

Der Integrand des ersten Summanden ist innerhalb C analytisch, also verschwindet der erste Summand. Der zweite Summand ist gleich $c_2(\lambda)$, also muß $c_2(\lambda) \equiv 0$ außerhalb C sein. Daraus folgt, daß $a(z)\, u(z) = c_1(z)$ in $\mathfrak{G}_2$ analytisch ist. Daher ist $u(z) = \frac{c_1(z)}{a(z)}$ in $\mathfrak{G}_2$ bis auf die höchstens endlich vielen Nullstellen z_k von $a(z)$ in $\mathfrak{G}_2$ analytisch, kann also als in $\Omega - \mathfrak{G}_1$ analytische, in ∞ verschwindende Funktion nur die Form $\Sigma \frac{\alpha_{kl}}{(z - z_k)^l}$ haben, wobei l höchstens die Vielfachheit der Nullstelle z_k von $a(z)$ erreichen darf. Man bestätigt andererseits sofort, daß diese Funktionen Lösungen von (36) sind, erhält also

Satz 25. *Die sämtlichen Lösungen der homogenen Gleichung* (36) *sind die Linearkombinationen der Funktionen $u_{kl} = \frac{1}{(z - z_k)^l}$, wobei $z_1, z_2, \ldots$ sämtliche Nullstellen von*

$a(z)$ in $\mathfrak{G}$ durchläuft und l die Werte $1, \ldots, m_k$ (m_k die Vielfachheit der Nullstelle z_k von $a(z)$) annimmt.

Die inhomogene Gleichung ist für jede rechte Seite $u_0 \in R(\Omega - \mathfrak{G})$ lösbar.

Die letzte Behauptung folgt daraus, daß M'_a ein Homomorphismus auf ganz $R(\Omega - \mathfrak{G})$ ist.

Die Frage nach einer allgemeinen Lösungsformel der inhomogenen Gleichung ist die Frage nach der Existenz von rechten Reziproken zu M'_a, also die nach linken Reziproken zu M_a. Es gilt nun in Verallgemeinerung eines Resultates von Toeplitz und mir ([5], S. 342)

Satz 26. *Besitzt $a(z)$ unendlich viele Nullstellen in $\mathfrak{G}$, so besitzt der Bildraum von M_a keinen abgeschlossenen Komplementärraum in $P(\mathfrak{G})$, also besitzt der Isomorphismus M_a keine linke Reziproke und der Homomorphismus M'_a von $R(\Omega - \mathfrak{G})$ auf $R(\Omega - \mathfrak{G})$ keine rechte Reziproke.*

Beweis. Die Lösungen des homogenen Systems (36) bilden einen schwach abgeschlossenen Teilraum L von $R(\Omega - \mathfrak{G})$, der nach Satz 25 aus den endlichen Linearkombinationen der $u_{kl} = \dfrac{1}{(z - z_k)^l}$ besteht. Es ist sofort zu sehen, daß durch Vorgeben von beliebigen Werten $l(u_{kl}) = \lambda_{kl}$ auf L eine im Sinn der Topologie $\mathfrak{T}$ von $R(\Omega - \mathfrak{G})$ stetige Linearfunktion erzeugt wird. Also ist L' isomorph zum Raum ω der Vektoren mit abzählbar vielen beliebigen Koordinaten. Nun ist der Bildraum $M_a(P(\mathfrak{G}))$ der Orthogonalraum zu L. Nach [3], prop. 11, ist dann der Quotientenraum $P(\mathfrak{G})/M_a(P(\mathfrak{G}))$ in bezug auf die starke Topologie isomorph ω. Ein abgeschlossener Komplementärraum H zu $M_a(P(\mathfrak{G}))$ müßte also isomorph ω sein. In H gäbe es dann abzählbar viele linear unabhängige Funktionen $x_s(z)$, so daß jede Summe $\sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s x_s(z)$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten α_s wieder in $P(\mathfrak{G})$ läge. Dies ist aber unmöglich, wie leicht zu sehen.

Daß M_a dann keine linke Reziproke R besitzen kann, folgt daraus, daß der Raum aller x mit $Rx = 0$ ein abgeschlossener Komplementärraum zu $M_a(P(\mathfrak{G}))$ sein müßte.

11. Schlußbemerkungen. 1. Die im Vorstehenden entwickelte Dualität zwischen $P(\mathfrak{D})$ und $R(\mathfrak{A})$ legt eine neue Auffassung der analytischen und lokalanalytischen Funktionen nahe. Es sei $\mathfrak{G}$ wieder ein Gebiet, $\mathfrak{A} = \Omega - \mathfrak{G}$. Dann ist die lineare Hülle $H(\mathfrak{A})$ der Funktionen $\dfrac{1}{(\lambda - z_0)^k}$, $z_0 \in \mathfrak{G}$, $k = 1, 2, \ldots$, in $R(\mathfrak{A})$ dicht. Führt man in $H(\mathfrak{A})$ die Topologie von $R(\mathfrak{A})$ oder auch nur den zugehörigen Konvergenzbegriff, die gleichmäßige Konvergenz auf einer geeigneten, $\mathfrak{A}$ enthaltenden, offenen Menge $\mathfrak{H}$, ein, so ist die Gesamtheit der in diesem Sinn stetigen Linearfunktionen auf $H(\mathfrak{A})$ gerade $P(\mathfrak{G})$, also sind damit die in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktionen als die stetigen Linearfunktionen eines einfachen linearen Raumes erklärt. Die analytische Fortsetzung einer Funktion $x(z) \in P(\mathfrak{G})$ auf $\mathfrak{G}' > \mathfrak{G}$ ist dann nichts anderes als die Fortsetzung der auf $H(\mathfrak{A})$ erklärten Linearfunktion auf $H(\mathfrak{A}')$, $\mathfrak{A}' = \Omega - \mathfrak{G}'$. Ein Aufbau der Weierstraßschen Funktionentheorie von diesem Ausgangspunkt ist ohne weiteres möglich, doch scheint auch von diesem Standpunkt aus der Goursatsche Weg für den Beweis der Analytizität einer differenzierbaren Funktion unvermeidlich zu sein.

Auf den Begriff der lokalanalytischen Funktion wurden wir zwangsläufig bei der Betrachtung der stetigen Linearfunktionen auf $P(\mathfrak{G})$ geführt und eine auf der offenen Menge $\mathfrak{H}$ erklärte lokalanalytische Funktion $u(\lambda)$ ist die „lokalanalytische Fortsetzung" einer auf $\mathfrak{H}' < \mathfrak{H}$ erklärten lokalanalytischen Funktion $u_1(\lambda)$, wenn die zugehörige stetige Linearfunktion u auf $R(\Omega - \mathfrak{H})$ eine Fortsetzung der stetigen Linearfunktion u_1 auf

$R(\Omega - \mathfrak{H}')$ auf ganz $R(\Omega - \mathfrak{H})$ ist. Damit ist die lokalanalytische Fortsetzung ebenfalls ein Spezialfall des Hahn-Banachschen Erweiterungssatzes.

2. Betrachtet man in $P(\mathfrak{G})$ einen linearen Differentialoperator

$$L = \sum_{n=1}^{m} a_n(z)\, D^n, \tag{37}$$

so hat der adjungierte Operator nach Nr. **10** und Nr. **11** (man beachte $(M_a D^n)' = (-1)^n D^n M_a'$) die Gestalt

$$L'u = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\sum_1^m \frac{(-1)^n n!\, a_n(t)}{(t-\lambda)^{n+1}} \right] u(t)\, dt. \tag{38}$$

Zum Differentialoperator L in $P(\mathfrak{G})$ ist also adjungiert der Integraloperator L' in $R(\mathfrak{A})$. Die zu den linearen Differentialgleichungen $Lx = x_0$ adjungierten komplexen Integralgleichungen $L'u = u_0$ scheinen bis jetzt noch nicht allgemein untersucht zu sein. Sheffer betrachtet in [12] lineare Abbildungen A von $R(\Omega - \mathfrak{K}_r)$, $\mathfrak{K}_r$ die Menge aller $|z| \leqq r$, in sich, die durch Funktionen $a(\lambda, z)$ der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n a_n(z)}{\lambda^n}$, $a_n(z) \in P(\mathfrak{K}_r)$, $a_n(0) \neq 0$, gegeben sind, und löst die Gleichung $Au = u_0$ explizit und hat damit auch (38) in Spezialfällen gelöst.

3. Welche funktionentheoretischen Eigenschaften von $a(\lambda, z)$ für die dadurch erzeugten linearen Abbildungen A von Bedeutung sind, müßte näher untersucht werden. Von Silva [13] wurde bereits die Frage nach der Kennzeichnung der Automorphismen durch funktionentheoretische Eigenschaften aufgeworfen; dasselbe wäre z. B. für die Homomorphismen zu fragen.

4. Die Auswirkungen der Dualität auf den Operatorenkalkül von Fantappié und die Ausdehnung der für Banachsche Räume entwickelten Spektraltheorie von Dunford, Hille, Lorch und Taylor auf den vorliegenden Fall müßten untersucht werden. Auch dies ist zum Teil bei Silva [13] begonnen worden.

5. Die Übertragung der Theorie auf Funktionen auf Riemannschen Flächen und auf Funktionen mehrerer Variablen wäre ebenfalls zu untersuchen.

Literaturverzeichnis.

1. *S. Banach*, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.
2. *J. Dieudonné*, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques, Ann. Sci. Ecole norm. sup. (3) **59** (1942), 107–139.
3. *J. Dieudonné* und *L. Schwartz*, La dualité dans les espaces (F) et (LF), Ann. Inst. Fourier **1** (1949), 61–101.
4. *V. Ganapathy Iyer*, On the space of integral functions. I., Journ. Indian math. Soc. **12** (1948); II., Quart. J. math. Oxford, 2. ser., **1** (1950), 86–96.
5. *G. Köthe*, Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume, Math. Z. **51** (1948), 317–345.
6. *G. Köthe*, Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume, Math. Z. **52** (1950), 627–630.
7. *G. Köthe*, Über zwei Sätze von Banach, Math. Z. **53** (1950), 203–209.
8. *G. W. Mackey*, On infinite-dimensional topological linear spaces, Trans. Amer. math. Soc. **57** (1945), 155–207.
9. *G. W. Mackey*, On convex topological linear spaces, Trans. Amer. math. Soc. **60** (1946), 519–537.
10. *F. Pellegrino*, Die analytischen Funktionale und ihre Anwendungen, Mat. Tidskrift B (1949), 31–62.
11. *L. Schwartz*, Théorie des distributions I., II., Actual. sci. industr. **1091**, **1122** (1950/1).
12. *I. M. Sheffer*, On the solution of sum-equations, Amer. J. Math. **72** (1950), 835–848.
13. *J. S. e Silva*, As funções analíticas e a análise funcional, Port. Math. **9** (1950), 1–130.
14. *J. S. e Silva*, Sobre a topologia dos espaços funcionais analíticos, Rev. Fac. Cienc. Lisboa, 2. ser., A **1** (1950), 23–102.
15. *O. Toeplitz*, Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie, Comm. math. Helvetici **23** (1949), 222–242.

Eingegangen 5. Juni 1951.

Über Hüllen- und Kernbildungen auf Verbänden.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Georg Aumann* in München.

0. Im folgenden wird der Fall betrachtet, daß in einem vollständigen Verband gleichzeitig eine Hüllen- und davon unabhängig eine Kernbildung vorliegen. Das Zusammenwirken dieser beiden Operationen führt zum Begriff des assoziierten Elementepaares. Naheliegende Anwendungen auf topologische Räume liefern die sogenannten minimal begrenzten Mengen, auf die Theorie der reellen Funktionen die sogenannten minimal unstetigen Funktionen, und auf die Theorie der monotonen Abbildungen die verallgemeinerten Ortsfunktionen, wie sie in spezieller Form von C. Carathéodory betrachtet worden sind.

1. Allgemeines.

1. 1. Es bezeichne A einen Verband mit der Ordnungsrelation $\leqq$. Wie im klassischen Falle der linearen Ordnung definieren wir das *A-Supremum* s einer nicht leeren Teilmenge B von A:

A-sup $B = s$ heißt, daß erstens $s \in A$, zweitens $s \geqq b$ für alle $b \in B$, und drittens aus $t \geqq b$ für alle $b \in B$ allemal $t \geqq s$ folgt. Analog definieren wir A-inf $B = i$. A heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *vollständig*, wenn A-sup B (bzw. A-inf B) für jede nicht leere Teilmenge B von A existiert.

1. 2. Im folgenden betrachten wir den Fall, daß A nach oben und nach unten vollständig, daß die Teilmenge F von A nach unten, die Teilmenge G von A nach oben vollständig sind und daß A-sup $A \in F$ und A-inf $A \in G$ gilt. Im übrigen wird zwischen G und F keine weitere Beziehung vorausgesetzt. Für ein beliebiges $h \in A$ definieren wir

$$h^s = A\text{-inf}\, f \;/\, h \leqq f \in F\,/\,, \quad h^i = A\text{-sup}\, g \;/\, h \geqq g \in G\,/\,^{1)};$$

h^s heißt die *F-Hülle*, h^i der *G-Kern* von h.

Offenbar ist allemal $G \ni h^i \leqq h \leqq h^s \in F$; ferner folgt aus $h_1 \leqq h_2$ stets $h_1^x \leqq h_2^x$ für $x = s, i$.

1. 3. Statt $(h^x)^y$ schreiben wir kürzer h^{xy}. Es gilt dann:

$$h^{xx} = h^x \text{ für } x = s, i, (si), (is).$$

In der Tat, für $x = i, s$ ist die Behauptung eine unmittelbare Folge der einseitigen Vollständigkeit von G bzw. F. Für $x = p = (si)$ z. B. hat man: $h^{ps} \geqq h^p = h^{si}$, also $h^{pp} = h^{psi} \geqq h^{sii} = h^p$. Andererseits schließt man aus $h^p = h^{si} \leqq h^s$ auf $h^{ps} \leqq h^{ss} = h^s$, und damit auf

$$h^{pp} = h^{psi} \leqq h^{si} = h^p,$$

womit $h^{pp} = h^p$ bewiesen ist. Analog für $x = (is)$.

[1]) Zwischen den Schrägstrichen stehen die Eigenschaften, welche die Konkurrenzmenge charakterisieren.

1. 4. Das Elementepaar (g, f) heißt ein *assoziiertes Paar* (und dabei g *Unter-* und f *Oberteil*) *bezüglich* G, F, wenn $g \in G$, $f \in F$, $g^s = f$ und $f^i = g$.

Aus dieser Definition folgt leicht:

h ist dann und nur dann Unterteil eines assoziierten Paares, wenn $h^{si} = h$; alsdann ist (h, h^s) das betreffende assoziierte Paar. Entsprechend ist $h^{is} = h$ notwendig und hinreichend dafür, daß h Oberteil eines assoziierten Paares ist.

1. 5. Daß es assoziierte Paare gibt, lehrt der folgende Satz:

Ist $h \in A$, so sind (h^{isi}, h^{is}) und (h^{si}, h^{sis}) assoziierte Paare; diese fallen insbesondere dann zusammen, wenn $h \in G \dotplus F$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus **1. 3.**

1. 6. $\tilde{G}$ sei die Menge aller h aus A mit $h^{si} = h$, $\tilde{F}$ die aller h aus A mit $h^{is} = h$. Dann gilt:

$\tilde{G}$ und $\tilde{F}$ sind vollständige Verbände mit $\tilde{G} \subset G$ und $\tilde{F} \subset F$; sie sind durch $\tilde{G} \ni g \to g^s \in \tilde{F}$ mit der Umkehrung $\tilde{F} \ni f \to f^i \in \tilde{G}$ isomorph aufeinander bezogen.

Beweis. Nach den vorausgehenden Betrachtungen bedarf wohl nur die Vollständigkeit eines Beweises. Ich zeige hierzu: Ist $G_1 \subset \tilde{G}$, so haben wir

$$\tilde{G}\text{-sup } G_1 = (A\text{-sup } G_1)^{si}, \quad \tilde{G}\text{-inf } G_1 = (A\text{-inf } G_1)^{si}.$$

In der Tat, es sei $s = A$-sup G_1 gesetzt. Dann ist offenbar $s^{si} \in G$; ferner ist für $g_1 \in G_1$ stets $g_1 \leqq s$, also $g_1 = g_1^{si} \leqq s^{si}$. Wenn andererseits für ein $\sigma \in \tilde{G}$ die Relation $\sigma \geqq g_1$ für alle $g_1 \in G_1$ gilt, so folgt daraus $\sigma \geqq s$, also $\sigma = \sigma^{si} \geqq s^{si}$. Damit sind alle $\tilde{G}$-sup-Eigenschaften für s^{si} nachgewiesen.

Analog beweist man die zweite Gleichung und die Vollständigkeit von $\tilde{F}$.

2. Anwendungen.

2. 1. Die minimal begrenzten Mengen. T_0 sei ein topologischer Raum, $\mathfrak{T}$ der vollständige Verband aller Teilmengen T von T_0, ferner $\mathfrak{G}$ das System der offenen, $\mathfrak{F}$ das System der abgeschlossenen Mengen von T_0. Für $T \in \mathfrak{T}$ ist T^i der offene Kern und T^s die abgeschlossene Hülle. $\tilde{\mathfrak{G}}$ ist das System der *minimal begrenzten offenen*, $\tilde{\mathfrak{F}}$ das der *minimal begrenzten abgeschlossenen* Mengen. Allgemein definiert man: Die Menge T heißt *minimal begrenzt*, wenn der offene Kern T^i und die abgeschlossene Hülle T^s ein assoziiertes Paar (T^i, T^s) bilden.

Die minimal begrenzten offenen Mengen bilden sogar einen vollständigen Booleschen Verband mit T_0 als Einselement, und zwar ist das Komplement einer minimal begrenzten offenen Menge G in diesem Verband die Menge $(T_0 - G)^i$. Analoges gilt für das System der minimalbegrenzten abgeschlossenen Mengen wegen **1. 6**[2]).

2. 2. 1. Die minimal unstetigen Funktionen. Wieder sei T_0 ein topologischer Raum und A der vollständige Verband aller reellen Funktionen $h \mid T_0$ mit der natürlichen Ordnung. Ferner sei G das System der nach unten halbstetigen, F das der nach oben halbstetigen Funktionen auf T_0. Da das Supremum (Infimum) einer beliebigen Menge von nach unten (nach oben) halbstetigen Funktionen wieder halbstetig nach unten (oben) ist, so ist G nach oben und F nach unten vollständig; h^i bedeutet hier die *untere* (*volle*) *Limesfunktion*, h^s die *obere*, wie man unschwer beweist. $\tilde{G}$ ist alsdann das System der *minimal unstetigen nach unten halbstetigen*, $\tilde{F}$ das aller *minimal unstetigen nach oben halbstetigen* Funktionen. Im Sinne dieser Bezeichnung definiert man allgemein:

---

[2]) *C. Carathéodory*, Entwurf einer Algebraisierung des Integralbegriffs, Sitz. Ber. Bayer. Akad. 1938, S. 43.

$f \mid T_0$ heißt *minimal unstetig*, wenn (f^i, f^s) ein assoziiertes Paar ist, d. h. wenn

$$f^{si} = f^i \leqq f \leqq f^s = f^{is}.$$

Gleichbedeutend mit der letzten Forderung ist übrigens $f^{si} \leqq f \leqq f^{is}$; denn dies ist einerseits in den obigen Bedingungen enthalten, andererseits folgt daraus z. B. $f^{si} = f^{sii} \leqq f^i$, und wegen $f^{si} \geqq f^i$ sodann $f^{si} = f^i$.

2. 2. 2. Die Bezeichnung *minimal unstetig* rechtfertigt folgender Satz:

Ist T_0 ein vollständiger (metrischer) Raum und ist $f \mid T_0$ minimal unstetig, so gibt es keine Funktion $\varphi \mid T_0$, welche in allen Stetigkeitspunkten von f mit f übereinstimmt und mehr Stetigkeitspunkte besitzt als f.

Beweis. 1. Ist $f \mid T_0$ irgendeine reelle Funktion, so ist f^{is} als halbstetige Funktion punktiert unstetig, d. h. mit einer überall dichten Menge von Stetigkeitspunkten ausgestattet[3]). Sei nun a eine Unstetigkeitsstelle von f^{is}; dann gibt es zwei Zahlen $\beta_1 < \beta_2$, so daß es in jeder Umgebung $U(a)$ Punkte b_1 und b_2 gibt mit

$$f^{is}(b_1) < \beta_1 < \beta_2 < f^i(b_2).$$

Da f^{is} nach oben halbstetig ist, so gibt es eine Umgebung $U(b_1) \subset U(a)$, worin $f^{is} < \beta_1$ ist, und daher auch einen Stetigkeitspunkt c_1 von f^{is} in $U(a)$ mit $f^{is}(c_1) < \beta_1$. Analog findet man in $U(a)$ einen Stetigkeitspunkt c_2 von f^i mit $\beta_2 < f^i(c_2)$. Aber c_2 ist auch Stetigkeitspunkt von f^{is}. Daher kann keine Abänderung von f^{is} in Unstetigkeitspunkten von f^{is} den Punkt a als Unstetigkeitspunkt beseitigen. Analoges gilt für f^{si}.

2. Wenn nun f minimal unstetig ist im Sinne von **2. 2. 1**, also $f^{si} = f^i \leqq f \leqq f^s = f^{is}$ gilt, so ist jeder Stetigkeitspunkt c von f^i auch ein solcher von f^{is}, d. h. von f^s, und umgekehrt, und zwar mit $f^i(c) = f^s(c) = f(c)$, so daß wegen dieser Gleichungen c auch Stetigkeitspunkt von f ist. Da f nicht mehr Stetigkeitspunkte haben kann als f^i oder f^s, so haben die Funktionen f, f^i, f^s, f^{is} und f^{si} alle dieselben Stetigkeitspunkte; für jeden Unstetigkeitspunkt a von f muß daher dasselbe Verhalten, wie es in 1. für f^{is} dargelegt wurde, gelten, d. h. es gibt keine Funktion $\varphi \mid T_0$, wie sie im Satz beschrieben ist.

Bemerkung. Daß der obige Satz nicht umkehrbar ist, lehrt das folgende Beispiel: Im E^2 der Punkte (x, y) sei $f(x, y)$ bzw. $= 0, 2, 1$, je nachdem x bzw. $>, =, < 0$ ist. Hier ist $f^s \neq f^{is}$, aber keine nur die Unstetigkeitsstellen $x = 0$ betreffende Abänderung von f kann die Stetigkeitspunkte mehren.

2. 3. 1. Assoziierte Paare von monotonen Abbildungen. Wir setzen folgendes voraus:

Es sei V eine teilweise geordnete Menge, A ein vollständiger Verband und T der vollständige Verband aller Abbildungen t von V in A mit der Ordnung $t_1 \leqq t_2$, wenn $t_1(v) \leqq t_2(v)$ für alle $v \in V$ gilt. G bezeichne das System aller gegensinnig monotonen t aus T (aus $v_1 \leqq v_2$ folgt $t(v_1) \geqq t(v_2)$) und F das aller gleichsinnig monotonen t (mit $t(v_1) \leqq t(v_2)$ für $v_1 \leqq v_2$). Offenbar sind beide Systeme vollständig, sodaß die Überlegungen von **1.** anwendbar sind.

Neben den Definitionsgleichungen für t^i und t^s gemäß **1. 1** gelten hier noch folgende Darstellungen:

Für $x \in V$ ist $t^i(x) = A\text{-inf}\, t(y) \;/\, y \leqq x\,/$, $t^s(x) = A\text{-sup}\, t(y) \,/\, y \leqq x\,/$.

Beweis. Für $t \in T$ und $x \in V$ setzen wir $\underline{t}(x) = A\text{-inf}\, t(y) \;/\, y \leqq x\,/$. Dann ist offenbar $\underline{t} \leqq t$, aber auch $\underline{t} \in G$; denn für $x' \leqq x$ gilt $[\hat{y} \leqq x'] \subset [\hat{y} \leqq x]$, also $\underline{t}(x') \geqq \underline{t}(x)$. Ferner ist mit $g \in G$ stets $\underline{g} = g$, wie unmittelbar aus der Definition hervorgeht. Da nach Definition $t^i = T\text{-sup}\, g \;/\, \underline{t} \geqq g \in G\,/$, so folgt $t^i \geqq \underline{t}$. Andererseits ergibt sich für $g \in G$ und $t \geqq g$ unmittelbar $\underline{t} \geqq \underline{g} = g$, so daß $\underline{t} \geqq t^i$, also die Behauptung bezüglich t^i bewiesen ist. Analog beweist man die für t^s.

[3]) *H. Hahn*, Reelle Funktionen I (1932), S. 299.

2. 3. 2. Ein wichtiges Beispiel zu **2. 3. 1** liefern die *verallgemeinerten Ortsfunktionen*; sie ergeben sich, wenn A die durch $\pm\infty$ vervollständigte Zahlgerade bedeutet; es handelt sich also um assoziierte Paare (p, q) von auf V erklärten reellen Funktionen (mit $p^i = p$, $p^s = q$, $q^i = p$, $q^s = q$). Besondere Bedeutung erlangen diese, wenn $V = \mathfrak{B} - \{0\}$ und $\mathfrak{B}$ ein Boolescher Verband ist. Mit gewissen Zerlegungseigenschaften versehen, sind sie die Carathéodoryschen Ortsfunktionen[4]). Ohne näher darauf einzugehen, wollen wir nur folgende Charakterisierung hervorheben:

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Boolescher Verband und q eine reelle Funktion auf $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B} - \{0\}$. Dann und nur dann ist q Oberteil eines assoziierten Paares (p, q), wenn für jede nicht leere Teilmenge $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}_0$, zu der $\mathfrak{B}$-sup $\mathfrak{C} = S$ existiert, gilt:

$$q(S) = \sup q(C) \;/\; C \in \mathfrak{C} \,/.$$

Beweis. Wir setzen $\bar{q} = \sup q(C) \;/\; C \in \mathfrak{C} \,/$. **1.** Es sei q Oberteil eines assoziierten Paares (p, q). Da alsdann q gleichsinnig monoton ist, so gilt $q(C) \leqq q(S)$ für $C \leqq S$ und somit $\bar{q} \leqq q(S)$. Andererseits ist nach **2. 3. 1** $q(S) = p^s(S) = \sup p(X) \;/\; 0 \neq X \leqq S \,/$. Nun gibt es aber in einem Booleschen Verband zu $0 \neq X \leqq S$ ein $C_X \in \mathfrak{C}$ mit $XC_X \neq 0$, so daß $p(X) \leqq p(XC_X) \leqq q(XC_X) \leqq q(C_X)$, womit wir

$$q(S) \leqq \sup q(C_X) \;/\; 0 \neq X \leqq S \,/ \leqq \sup q(C) \;/\; C \in \mathfrak{C} \,/$$

erhalten. Damit ist $q(S) = \bar{q}$ bewiesen.

2. Sei jetzt $q(S) = \bar{q}$ für jedes $\mathfrak{C}$, zu welchem S existiert. Wir überzeugen uns zunächst, daß q gleichsinnig monoton ist. In der Tat, ist $X \leqq Y$, so existiert $Z = \mathfrak{B}$-sup $\{X, Y\} = Y$ und es gilt somit $q(Y) = q(Z) = \max\{q(X), q(Y)\} \geqq q(X)$, was die behauptete Monotonie bedeutet. Nun definieren wir für $X \in \mathfrak{B}_0$

$$P(X) = q^i(X) = \inf q(Y) \;/\; 0 \neq Y \leqq X \,/.$$

Dann ist $P(X) \leqq q(X)$ und

$$P^s(X) = \sup P(Y) \;/\; 0 \neq Y \leqq X \,/ \leqq \sup q(Y) \;/\; 0 \neq Y \leqq X \,/ = q(X).$$

Machen wir die Annahme, daß für ein $X_0 \neq 0$ die Ungleichung $P^s(X_0) < q(X_0)$ bestände. Um dazu einen Widerspruch zu gewinnen, wählen wir ein r mit $P^s(X_0) < r < q(X_0)$ und betrachten die Menge $\mathfrak{Z}$ aller Z mit $0 \neq Z \leqq X_0$ und $q(Z) \leqq r$. Die Menge $\mathfrak{Z}$ ist nicht leer, da es sogar zu jedem Y mit $0 \neq Y \leqq X_0$ ein $Z_Y \in \mathfrak{Z}$ mit $Z_Y \leqq X_0$ gibt; es ist nämlich $P(Y) \leqq P^s(X_0) < r$, so daß nach Definition von $P(Y)$ ein Z mit $0 \neq Z \leqq Y$ und $q(Z) \leqq r$ existiert. Wir zeigen jetzt: $\mathfrak{B}$-sup $\mathfrak{Z} = X_0$. In der Tat, die sup-Eigenschaft „$Z \leqq X_0$ für alle $Z \in \mathfrak{Z}$" ist klar. Wäre etwa für ein T zwar $Z \leqq T$ für alle $Z \in \mathfrak{Z}$, jedoch X_0 nicht $\leqq T$, so wäre $0 \neq X_0 - X_0T = Y \leqq X_0$, wozu nach obiger Bemerkung ein $Z_Y \leqq Y$ gehört, im Widerspruch dazu, daß ja $Z_Y \leqq T$ ist. Also erfüllt X_0 alle sup-Eigenschaften und es ist $\mathfrak{B}$-sup $\mathfrak{Z} = X_0$. Somit folgt $q(X_0) = \sup q(Z) \;/\; Z \in \mathfrak{Z} \,/ \leqq r$, der gewünschte Widerspruch.

Es gilt also $P^s(X) = q(X)$ für $X \in \mathfrak{B}_0$. Nach **1. 4** ist damit q als Oberteil eines assoziierten Paares gekennzeichnet.

Bemerkung. Eine analoge Charakterisierung gilt auch für das Unterteil eines assoziierten Paares. In beiden Fällen sagt sie aus, daß auf einem Booleschen Verband ein assoziiertes Paar „von beliebig kleinen Teilen her" vollständig bestimmt ist. Dies wird noch deutlicher, wenn man endliche Zerlegungen $X = A_1 + \cdots + A_n$ betrachtet; denn dafür gilt

$$p(X) = \min\{p(A_1), \ldots, p(A_n)\}, \quad q(X) = \max\{q(A_1), \ldots, q(A_n)\}.$$

[4]) Vgl. l. c.[2]), S. 61.

Eingegangen 7. Februar 1952.

Über eine Verallgemeinerung des Normalkörperbegriffs.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Wolfgang Krull* in Bonn.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat Herr Barbilian als Hauptergebnis den Satz bewiesen:

Ist $\mathfrak{L}$ ein beliebiger (kommutativer) Oberkörper des Körpers $\mathfrak{K}$ und bedeutet $\mathfrak{G}$ die Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$, so entsprechen dann und nur dann die Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ umkehrbar eindeutig den Untergruppen von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ endlich algebraisch, normal und separabel ist.

Das wichtigste Beweishilfsmittel ist dabei eine neue Definition des *Normalkörpers*, die sich im algebraischen Fall mit der üblichen deckt, aber es gleichzeitig gestattet, auch bei transzendenten Erweiterungskörpern von Normalität oder Nichtnormalität zu reden[1]). Der neue Normalkörperbegriff scheint mir nun auch, abgesehen von seiner Bedeutung für das oben formulierte Theorem, selbständiges Interesse zu besitzen. Die vorliegende Note möchte dementsprechend dazu beitragen, ihn allgemeiner bekannt zu machen.

In § 1 werden verschiedene begriffliche Definitionen und die einfachsten Grundeigenschaften der allgemeinen Normalkörper besprochen. In § 2 wird das wichtigste sie betreffende Ergebnis von Barbilian auf möglichst einfachem und elementarem Wege hergeleitet und in verschiedenen Richtungen ergänzt. § 3 beschäftigt sich mit dem konstruktiven Aufbau allgemeiner Normalkörper. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten geben Anlaß zu einigen grundsätzlichen Bemerkungen über die Bildung von unendlichen Erweiterungskörpern. In den Schlußbemerkungen wird vor allem ausführlich die noch ungelöste Frage besprochen, ob es nichtalgebraische Normalkörper gibt, die nicht gleichzeitig ganz abgeschlossen sind. Die Absicht ist dabei, zu zeigen, daß hier ein bemerkenswertes Problem vorliegt, das eine ausführlichere Untersuchung verdient.

§ 1. Allgemeine Normalkörper.

Es sei $\mathfrak{L}$ ein nichtalgebraischer Oberkörper des beliebigen Körpers $\mathfrak{K}$. Stets bedeute $\mathfrak{M}$ einen Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}^*$ den Körper aller über $\mathfrak{M}$ algebraischen Eemente aus $\mathfrak{L}$. Von einer *Steinitzschen Zerlegung* $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} \leq \mathfrak{L}$ soll gesprochen werden, wenn $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{K}$ rein transzendent, $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{T}$ algebraisch ist. Für Steinitzsche Zerlegungen gelten die folgenden Hilfssätze, deren Beweise ihrer Einfachheit halber unterdrückt werden dürfen. (Es handelt sich um triviale, gegebenenfalls transfinite Induktionsschlüsse.)

Hilfssatz 1. *Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{T}_1$ rein transzendent über $\mathfrak{K}$, so gibt es stets eine Steinitzsche Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} \leq \mathfrak{L}$, bei der $\mathfrak{T}$ entweder gleich $\mathfrak{T}_1$ oder ein rein transzendenter Oberkörper von $\mathfrak{T}_1$ ist.*

---

[1]) *D. Barbilian*, Solutia exhaustiva a problemai lui Steinitz (Rumänisch mit russischem und französischem Résumé). Acad. Republ. popu. Române, Studii Cerc. mat. 2 (1950), S. 189—253. Im folgenden kurz mit „B" zitiert.

Hilfssatz 2. a) *Ist $a \in \mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ transzendent oder separabel algebraisch, so gibt es eine Steinitzsche Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} \leqq \mathfrak{L}$ mit $a \notin \mathfrak{T}$, bei der a über $\mathfrak{T}$ separabel algebraisch ist.*

b) *Ist $\mathfrak{K}$ von Charakteristik $p \neq 0$ und $a \in \mathfrak{L}$ transzendent über $\mathfrak{K}$, so gibt es eine Steinitzsche Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} < \mathfrak{L}$ mit $a \notin \mathfrak{T}$, $a^p \in \mathfrak{T}$.*

Hilfssatz 3. *Ist $a \in \mathfrak{M}^*$ über $\mathfrak{M}$ Nullstelle des irreduziblen Polynoms $p(x)$, so gibt es eine Steinitzsche Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} < \mathfrak{L}$ derart, daß $p(x)$ auch über dem Vereinigungskörper $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{M}$ irreduzibel ist.*

Wir definieren jetzt im inhaltlichen, wenn auch nicht im wörtlichen Anschluß an Barbilian[2]): $\mathfrak{L}$ soll *über $\mathfrak{K}$ normal* heißen, wenn für jeden Zwischenkörper $\mathfrak{M}$ stets $\mathfrak{M}^*$ ein algebraischer Normalkörper von $\mathfrak{M}$ im üblichen Sinne des Wortes ist.

Satz 1. *$\mathfrak{L}$ ist dann und nur dann über $\mathfrak{K}$ normal, wenn* a) *bei jeder Steinitzschen Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} \leqq \mathfrak{L}$ stets $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{T}$ algebraisch normal ist; oder* b) *bei beliebiger Vorgabe endlich vieler über $\mathfrak{K}$ algebraisch unabhängiger Elemente $t_1, \ldots, t_n$ und eines beliebigen weiteren Elementes a aus $\mathfrak{L}$ stets der kleinste a enthaltende algebraische Normaloberkörper $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{K}(t_1, \ldots, t_n)$ Unterkörper von $\mathfrak{L}$ ist.*

Bei a) ist natürlich nur zu zeigen, daß die Bedingung hinreicht. Es sei also $\mathfrak{M}$ beliebig, $a \in \mathfrak{M}^*$ und $p(x)$ das über $\mathfrak{M}$ irreduzible Polynom mit der Nullstelle a. Ferner sei nach Hilfssatz 3 die Steinitzsche Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} \leqq \mathfrak{L}$ so bestimmt, daß $p(x)$ auch über $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{M}$ irreduzibel ist. Dann ist a über $\mathfrak{T}$ Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $P(x) = p(x) \cdot q(x)$. Ist nun $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{T}$ normal, so liegen alle Nullstellen von $P(x)$ und damit erst recht alle von $p(x)$ in $\mathfrak{L}$. D. h. aber, es wird sicher $\mathfrak{M}^*$ über $\mathfrak{M}$ normal, wenn bei jeder Steinitzschen Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} \leqq \mathfrak{L}$ stets $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{T}$ normal ist.

Die Äquivalenz von a) und b) ist bei Benutzung von Hilfssatz 1 und 3 mühelos einzusehen. Bedingung b) besitzt den Vorzug, klar zu zeigen, daß die Normalität von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ nur von dem Verhalten der über $\mathfrak{K}$ endlichen Unterkörper von $\mathfrak{L}$ abhängt. Besitzt $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ einen endlichen Transzendenzgrad N, so kann natürlich $n = N$ in b) gesetzt werden; im anderen Falle muß man beliebig große n zulassen.

Aus der ursprünglichen Definition der Normalität folgt sofort: *Ist $\mathfrak{L}$ normal über $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{L}$ auch normal über jedem Körper $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}$.* Was die Existenz von Normaloberkörpern von $\mathfrak{K}$ angeht, so ist klar, daß jeder *algebraisch abgeschlossene Körper* $\mathfrak{L}_a$ über $\mathfrak{K}$ normal ist. Daß ferner zu jedem Oberkörper $\tilde{\mathfrak{L}}$ von $\mathfrak{K}$ ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter *kleinster*, $\mathfrak{L}$ *enthaltender Normaloberkörper* $\tilde{\mathfrak{L}}$ *von* $\mathfrak{K}$ existiert, folgt sofort aus:

Satz 2. *Sind beliebig viele über $\mathfrak{K}$ normale Oberkörper $\mathfrak{L}_\tau$ gegeben, die alle in einem festen Oberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ enthalten sind, so ist immer auch $\bigcap_\tau \mathfrak{L}_\tau$ über $\mathfrak{K}$ normal.*

Zum Beweis von Satz 2 hat man nur zu beachten: Ist $\mathfrak{M}$ ein Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\bigcap_\tau \mathfrak{L}_\tau$, und bedeutet $\mathfrak{M}_\tau^*$ den Körper aller über $\mathfrak{M}$ algebraischen Elemente aus $\mathfrak{L}_\tau$, so ist stets $\bigcap_\tau \mathfrak{M}_\tau^*$ über $\mathfrak{M}$ normal, falls alle $\mathfrak{M}_\tau^*$ über $\mathfrak{M}$ normal sind.

Man könnte auf den ersten Blick vermuten, ein rein transzendenter Oberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ sei stets über $\mathfrak{K}$ normal. Daß das falsch ist, zeigt:

Satz 3. *Ist $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} < \mathfrak{L}$ eine Steinitzsche Zerlegung von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ normal, so ist stets $\mathfrak{L}$ ein unendlicher algebraischer Oberkörper von $\mathfrak{T}$*[3]).

---

[2]) Herr Barbilian spricht im nichtalgebraischen Fall von *lokaler* Normalität; doch könnte man mit ebenso guten Gründen von totaler Normalität reden. Im folgenden soll daher von Normalkörpern schlechthin gesprochen und nur dort, wo es das Verständnis erfordert, zwischen „allgemeinen" und „algebraischen" Normalkörpern unterschieden werden.

[3]) Satz 3 stammt, einschließlich des Grundgedankens des Beweises, aus B. Die Durchführung der Rechnung im einzelnen weicht allerdings, insbesondere durch die Benutzung der Formel (1), von B ab.

Es sei t ein Element aus einem System von algebraisch unabhängigen Erzeugenden von $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{K}$. Dann genügt es offenbar, zu zeigen: Es gibt für beliebig große n Polynome $p(x, t)$ vom Grade n in x mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}(t)$, die über $\mathfrak{K}(t)$ irreduzibel sind und über $\mathfrak{L}$ in Linearfaktoren zerfallen. Es sei nun $v = \frac{f(t)}{g(t)}$ ein beliebiges, als Quotient von teilerfremden Polynomen dargestelltes Element aus $\mathfrak{K}(t)$. Dann ist t Nullstelle des über $\mathfrak{K}(v)$ irreduziblen Polynoms $f(x) - vg(x)$, und aus der Normalität von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ folgt, daß *alle* Nullstellen von $f(x) - vg(x)$ zu $\mathfrak{L}$ gehören. Das gleiche gilt dann auch für die Nullstellen des mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}[t]$ versehenen Polynoms

$$(1) \quad p(x, t) = \frac{g(t)}{x-t}\left(f(x) - vg(x)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(f^{(i)}(t)\, g(t) - g^{(i)}(t)\, f(t)\right)(x-t)^{i-1}.$$

(Natürlich besitzt die Summe auf der rechten Seite von (1) immer nur endlich viele Glieder, und es haben die Koeffizienten der Potenzen von $x - t$ auch bei Primzahlcharakteristik einen wohldefinierten Sinn.) Setzt man nun z. B. $f(x) = x^{n+1} + x^n + \cdots + 1$, $g(x) = f(x) - x$ $(n = 2, 3, \ldots)$, so ergibt sich — bei beliebiger Charakteristik — aus (1) leicht, daß $p(x, t)$ ein Polynom n-ten Grades in $x - t$ und damit in x darstellt, bei dem der Koeffizient von $(x-t)^0$ bzw. $(x-t)^n$ modulo t kongruent 1 bzw. modulo t^2 kongruent t ist, während alle übrigen Koeffizienten durch t teilbar sind. $p(x, t)$ wird also bei der angegebenen Koeffizientenspezialisierung nach dem Schönemann-Eisensteinschen Satze irreduzibel. Damit ist der für den Beweis von Satz 3 entscheidende Existenzbeweis abgeschlossen.

Setzt man (unter Beibehaltung der eingeführten Bezeichnungen) $f(x^n) = x$, $g(x) = 1$, so wird $p(x, t) = \prod_{k=1}^{n-1} (x - \varepsilon^k t)$, falls ε eine primitive n-te Einheitswurzel bedeutet, und da alle Nullstellen von $p(x, t)$ im Normalitätsfalle zu $\mathfrak{L}$ gehören müssen, hat man:

Satz 4. *Ein Normalkörper enthält (bei beliebiger Charakteristik) immer alle Nullstellen aller Polynome* $x^n - 1$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Diese Bemerkung zeigt: Ist $\mathfrak{T}$ rein transzendent über $\mathfrak{K}$, so kann der kleinste $\mathfrak{T}$ umfassende, über $\mathfrak{K}$ normale Körper Elemente enthalten, die über $\mathfrak{K}$ echt algebraisch sind — eine auf den ersten Blick überraschende Feststellung.

§ 2. Normalkörper und dedekindsche Körper.

Es sei $\mathfrak{L}$ ein beliebiger Oberkörper von $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{G}$ bedeute die Gruppe aller Automorphismen A von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{M}$ ein Körper zwischen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}$, so werde die Gruppe aller der $A \in \mathfrak{G}$, die $\mathfrak{K}$ elementweise festlassen, mit $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ bezeichnet. Im Anschluß an Baer [4]) soll $\mathfrak{L}$ ein *dedekindscher Oberkörper von* $\mathfrak{K}$ genanntwerden, wenn die Zwischenkörper $\mathfrak{M}$ durch ihre zugehörigen Gruppen $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ *eindeutig* bestimmt sind, wenn also $\mathfrak{M}$ stets *alle* $u \in \mathfrak{L}$ enthält, die gegenüber sämtlichen Abbildungen $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ invariant sind. Ein Normalkörper kann im folgenden sowohl ein algebraischer Normalkörper im üblichen Sinne als auch ein Normalkörper im Sinne von § 1 sein. Es gilt dann zunächst, wie wohlbekannt [5]):

[4]) *R. Baer*, Abbildungseigenschaften von algebraischen Erweiterungen, Math. Zeitschrift 33 (1931), S. 451—479.

[5]) Vgl. etwa die unter [4]) zitierte Baersche Arbeit. Natürlich ist nur die Notwendigkeit der angegebenen Bedingungen zu zeigen. Hinsichtlich der Normalität und Separabilität sind die nötigen Überlegungen ganz elementar: Es sei $p(x)$ ein über $\mathfrak{K}$ irreduzibles Polynom; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seien die untereinander verschiedenen Nullstellen von $p(x)$. Enthält dann $\mathfrak{L}$ zwar $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, aber nicht $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$ $(1 \leqq m \leqq n-1)$, und bedeuten $\beta_1, \ldots, \beta_m$ die elementarsymmetrischen Funktionen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, so wird $\mathfrak{M} = \mathfrak{K}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ wegen der Irreduzibilität von $p(x)$ ein echter Oberkörper von $\mathfrak{K}$, und man hat $\mathfrak{U}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{G}$, weil jedes $A \in \mathfrak{G}$ die Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ nur untereinander vertauscht. Die gleichen Schlüsse gelten auch für $m = n$, wenn $p(x) = ((x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n))^q$ mit $q > 1$. — Um die Endlichkeitsbedingung von Hilfssatz 4 als notwendig zu erweisen, hat man den Satz heranzuziehen, daß bei einem unendlichen algebraischen Oberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ für jedes $\mathfrak{M}$ die Gruppe $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ im Sinne der natürlichen Topologie von $\mathfrak{G}$ abgeschlossen sein muß.

Hilfssatz 4. *Der algebraische Oberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann ein dedekindscher Oberkörper von $\mathfrak{K}$, wenn $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ normal und separabel ist.*

Beachtet man nun, daß ein dedekindscher Oberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$ auch über jedem Zwischenkörper $\mathfrak{M}$ insbesondere über jedem $\mathfrak{T}$ einer Steinitzschen Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} \leqq \mathfrak{L}$ dedekindsch sein muß, und zieht man den zweiten Teil von Hilfssatz 2 sowie Satz 1, a) heran, so erhält man auf Grund von Hilfssatz 4 sofort:

Satz 5. *Bei Charakteristik p muß jeder dedekindsche Oberkörper von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}$ algebraisch sein. Bei Charakteristik 0 ist jeder dedekindsche Oberkörper von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}$ normal*[6]).

Um im folgenden die Primzahlcharakteristiken nicht ausschließen zu müssen, verallgemeinern wir den Begriff des dedekindschen Oberkörpers ein wenig. Wir definieren zunächst: Der Körper $\mathfrak{L}$ heißt *über $\mathfrak{M}$ algebraisch separabel*[7]), wenn $\mathfrak{M}^*$ über $\mathfrak{M}$ im üblichen Sinne algebraisch separabel ist. Bei Primzahlcharakteristik p ist a ein *Wurzelelement hinsichtlich* $\mathfrak{M}$, wenn $a^{p^f} \in \mathfrak{M}$ für hinreichend großes f gilt. Bei Charakteristik 0 ist natürlich stets $\mathfrak{L}$ über allen Körpern $\mathfrak{M}$ algebraisch separabel. Bei Primzahlcharakteristik p ergibt sich leicht aus bekannten Steinitzschen Sätzen:

Hilfssatz 5. *Ist $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ normal, so gibt es zu jedem $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{L}$ einen kleinsten Körper $\mathfrak{M}^+ \geqq \mathfrak{M}$ derart, daß $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{M}^+$ algebraisch separabel ist. $\mathfrak{M}^+$ besteht aus allen und nur den $a \in \mathfrak{M}^*$, die hinsichtlich $\mathfrak{M}$ Wurzelelemente sind. — Es wird stets $\mathfrak{U}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{M}^+)$.*

Da bei Hilfssatz 5 die Normalität von $\mathfrak{L}$ wesentlich ist und wir uns im folgenden auf Hilfssatz 5 stützen wollen, verallgemeinern wir den Begriff des dedekindschen Oberkörpers nur für Normalkörper. Der über $\mathfrak{K}$ normale Körper $\mathfrak{L}$ soll *dedekindscher Oberkörper von $\mathfrak{K}$ im weiteren Sinne heißen*, wenn für jeden Zwischenkörper $\mathfrak{M}$ stets $\mathfrak{M}^+$ aus *allen* hinsichtlich sämtlichen Automorphismen $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ invarianten Elementen a besteht, wenn also die Körper $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^+$, über denen $\mathfrak{L}$ separabel algebraisch ist, sämtlich durch ihre zugehörigen Gruppen $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ eindeutig bestimmt sind. Es gilt

Satz 6. *Jeder über $\mathfrak{K}$ normale Körper $\mathfrak{L}$ ist ein dedekindscher Oberkörper im weiteren Sinne.*

Zum Beweis brauchen wir nur zu zeigen: Ist $\mathfrak{L}$ über dem Körper $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^+$ algebraisch separabel, a ein nicht zu $\mathfrak{M}$ gehöriges Element aus $\mathfrak{L}$, so gibt es in $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ stets einen Automorphismus A, der a echt abbildet. Dabei dürfen wir, da $\mathfrak{L}$ nicht nur über $\mathfrak{K}$, sondern über jedem $\mathfrak{M}$ normal ist, unbedenklich $\mathfrak{K} = \mathfrak{M}$ annehmen. Ist $a \notin \mathfrak{K}$, so ist a wegen $\mathfrak{K} = \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^+$ entweder über $\mathfrak{K}$ separabel algebraisch oder über $\mathfrak{K}$ transzendent. Nach Hilfssatz 2 existiert daher eine Steinitzsche Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} < \mathfrak{L}$ derart, daß a über $\mathfrak{T}$ Nullstelle eines irreduziblen Polynoms $p(x) = (x - a) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_n)$ $(n \geqq 2)$ mit lauter verschiedenen Nullstellen ist. Nach der bekannten Theorie der algebraischen Normalkörper gibt es nun für $i = 2, \ldots, n$ in $\mathfrak{U}(\mathfrak{T})$, also erst recht in $\mathfrak{U}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{G}$,

---

[6]) Satz 5 und der spätere Satz 6a bilden hinsichtlich der allgemeinen Normalkörper das Hauptergebnis von B. Dedekindsche Körper im weiteren Sinne, wie wir sie für den allgemeinen Satz 6 brauchen, werden in B nicht beachtet. Man beachte, daß aus Satz 5 und Satz 3 zusammengenommen bereits das in der Einleitung formulierte Theorem, die „volle Lösung des Steinitzschen Problems" im Sinne von B, folgt. Sollen nämlich die Körper $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ umkehrbar eindeutig den Untergruppen von $\mathfrak{G}$ entsprechen, so muß $\mathfrak{L}$ nach Satz 5 jedenfalls über $\mathfrak{K}$ normal sein. Ist ferner $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ transzendent und $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} < \mathfrak{L}$ eine Steinitzsche Zerlegung, so zeigt im Falle der Normalität von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ die Kombination von Satz 3 und Hilfssatz 4, daß die gewünschte Eineindeutigkeit nicht einmal für die Körper zwischen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{L}$ und die Untergruppen von $\mathfrak{U}(\mathfrak{T})$ gilt. Im Falle der Eineindeutigkeit ist also bestimmt $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ algebraisch und man kommt auf Hilfssatz 4 zurück.

[7]) Es wird hier von „algebraisch separabel" gesprochen, um die Verwechslung mit anderen, übrigens durch die Mannigfaltigkeit der Anwendungsmöglichkeiten wichtigeren, Separabilitätsdefinitionen für transzendente Oberkörper zu vermeiden. Zu derartigen Definitionen vgl. etwa: *E. Snapper*, Completely primary rings. III., Annals of Math. **53** (1951), S. 207—234; Abschn. 1. S. 234. Vgl. ferner: *S. Mac Lane*, Modular fields I., Duke Math. Journ. **5** (1939), S. 372—393.

je ein A_i, daß a in a_i überführt. — Für den Fall der Charakteristik 0, wo die dedekindschen Oberkörper im weiteren Sinne stets auch im ursprünglichen engeren Sinne dedekindsch sind, erhält man durch Kombination von Satz 5 und Satz 6

Satz 6a. *Bei Charakteristik* 0 *ist* $\mathfrak{L}$ *dann und nur dann ein dedekindscher Oberkörper von* $\mathfrak{K}$, *wenn* $\mathfrak{L}$ *über* $\mathfrak{K}$ *normal ist*[6]).

Bei Charakteristik p ergibt sich kein formell ebenso eleganter Satz, weil wir den Begriff des dedekindschen Oberkörpers im weiteren Sinne nur für Normaloberkörper eingeführt hatten. Wir kümmern uns um diesen, hier nebensächlichen, Schönheitsfehler nicht weiter und ergänzen Satz 6 durch:

Satz 7. *Ist* $\mathfrak{L}$ *über* $\mathfrak{K}$ *normal und* $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ *in* $\mathfrak{G}$ *invariant, so ist* $\mathfrak{M}$ *sicher Normaloberkörper von* $\mathfrak{K}$.

In der Tat, es ist $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ dann und nur dann invariant in $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{M}$ (als Gesamtkörper, nicht notwendig elementweise) bei jedem Automorphismus $A \in \mathfrak{G}$ in sich selbst übergeht. Ist nun $\mathfrak{M}$ über $\mathfrak{K}$ nicht normal, so gibt es zu $\mathfrak{M}$ eine Steinitzsche Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T}_1 < \mathfrak{M}$ derart, daß $\mathfrak{M}$ über $\mathfrak{T}$ nicht algebraisch normal ist. Es existiert also über $\mathfrak{T}_1$ ein irreduzibles Polynom $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ derart, daß $\mathfrak{M}$ zwar mindestens ein a_i, etwa a_1, aber nicht alle a_i enthält. Nach Hilfssatz 3 gibt es ferner zu $\mathfrak{L}$ eine Steinitzsche Zerlegung $\mathfrak{K} < \mathfrak{T} < \mathfrak{L}$, bei der $p(x)$ auch über $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{T}_1$ irreduzibel ist, und wegen der algebraischen Normalität von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{T}_1$ existiert für jedes i in $\mathfrak{U}(\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{T}_1)$ ein Automorphismus A_i, der a_1 in a_i überführt. (Ob $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{T} \cdot \mathfrak{T}_1$ separabel ist, spielt hier keine Rolle.) Nach Wahl von $p(x)$ können nun nicht alle A_i den Körper $\mathfrak{M}$ im ganzen in Ruhe lassen, d. h. es kann $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ nicht in $\mathfrak{G}$ invariant sein.

Ein wesentlicher Nachteil der Theorie der allgemeinen Normalkörper gegenüber der der algebraischen besteht darin, daß Satz 7 sich nicht umkehren läßt. Um hierzu ein an sich interessantes Beispiel zu geben, bemerken wir:

Satz 8. *Sind* $\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{L}_a > \mathfrak{K}$ *algebraisch abgeschlossen, so ist für keinen Zwischenkörper* $\mathfrak{M}$ *die Gruppe* $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ *in* $\mathfrak{G}$ *invariant.*

Es sei nämlich t_1 bzw. t_2 ein beliebiges zu $\mathfrak{M}$, aber nicht zu $\mathfrak{K}$ bzw. zu $\mathfrak{L}_a$, aber nicht zu $\mathfrak{M}$ gehöriges Element. Dann sind wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von $\mathfrak{K}$ sowohl t_1 als t_2 über $\mathfrak{K}$ transzendent; es existieren daher nach Hilfssatz 1 zwei Steinitzsche Zerlegungen $\mathfrak{K} < \mathfrak{T}_1 < \mathfrak{L}_a$ bzw. $\mathfrak{K} < \mathfrak{T}_2 < \mathfrak{L}$ mit $t_1 \in \mathfrak{T}_1$ bzw. $t_2 \in \mathfrak{T}_2$. Weiter gibt es wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}_a$ ein $A \in \mathfrak{G}$, das $\mathfrak{T}_1$ in $\mathfrak{T}_2$ überführt und daher $\mathfrak{M}$ einen Bildkörper $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{M}$ zuordnet. — Hat nun $\mathfrak{L}_a$ über $\mathfrak{K}$ mindestens den Transzendenzgrad 2, und bedeutet t ein zu $\mathfrak{L}_a$, aber nicht zu $\mathfrak{K}$ gehöriges Element, $\mathfrak{M}_a$ den kleinsten in $\mathfrak{L}_a$ enthaltenen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper von $\mathfrak{K}(t)$, so ist $\mathfrak{K} < \mathfrak{M}_a < \mathfrak{L}_a$ und es ist $\mathfrak{M}_a$ über $\mathfrak{K}$ normal, obwohl $\mathfrak{U}(\mathfrak{M}_a)$ nach Satz 8 *nicht* in $\mathfrak{G}$ invariant ist.

Auf die weiteren Fragen, die man anknüpfend an die Sätze 5—7 bei den nichtalgebraischen Normalkörpern im Sinne einer verallgemeinerten Galoisschen Theorie stellen könnte, soll erst in den Schlußbemerkungen kurz eingegangen werden.

§ 3. Konstruktion von Normalkörpern.

Der Einfachheit halber gehen wir von einem abzählbaren Körper $\mathfrak{K}_0$ aus. Es sei $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_0(x_1, \ldots, x_n)$ ein rein transzendenter Oberkörper von $\mathfrak{K}_0$ vom Transzendenzgrade n; $\tilde{\mathfrak{N}}$ bedeute den zu $\mathfrak{K}_1$ gehörigen algebraisch abgeschlossenen Körper, $\mathfrak{N}$ den in $\tilde{\mathfrak{N}}$ enthaltenen kleinsten über $\mathfrak{K}_0$ normalen Oberkörper von $\mathfrak{K}_1$. Eine Oberkörperkette $\mathfrak{K}_1 \leqq \mathfrak{K}_2 \leqq \ldots$ möge als *Aufbaukette* (von $\mathfrak{N}$ über $\mathfrak{K}_1$) bezeichnet werden, wenn $\mathfrak{K}_i$ jeweils einen endlichen algebraischen Oberkörper von $\mathfrak{K}_{i-1}$ darstellt und $\mathfrak{N}$ der Vereinigungskörper aller $\mathfrak{K}_i$ wird.

Um Aufbauketten bequem bilden zu können, definieren wir allgemein: Ist $\mathfrak{M}$ irgendein Körper zwischen $\mathfrak{K}_0$ und $\tilde{\mathfrak{N}}$, $\{\alpha_\varrho\}$ $(\varrho=1,\ldots,n)$ ein n-Tupel von über $\mathfrak{K}_0$ algebraisch unabhängigen Elementen aus $\tilde{\mathfrak{N}}$, so möge $\mathfrak{N}(\mathfrak{M};\ \{\alpha_\varrho\})$ gleich $\mathfrak{M}$ gesetzt werden, falls nicht alle α_i zu $\mathfrak{M}$ gehören. Ist dagegen $\alpha_\varrho \in \mathfrak{M}$ $(\varrho=1,\ldots,n)$, so bedeute $\mathfrak{N}(\mathfrak{M};\ \{\alpha_\varrho\})$ den kleinsten über $\mathfrak{K}_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ normalen Oberkörper von $\mathfrak{M}$.

Aus der Abzählbarkeit von $\mathfrak{K}_0$ folgt die von $\mathfrak{K}_1$ und $\tilde{\mathfrak{N}}$; ebenso ist die Menge N_n aller n-Tupel $\{\alpha_\varrho\}$ $(\varrho=1,\ldots,n)$ von über $\mathfrak{K}_0$ algebraisch unabhängigen Elementen aus $\tilde{\mathfrak{N}}$ abzählbar. Ist nun eine feste Abzählung $\{\alpha_\varrho^{(1)}\}, \{\alpha_\varrho^{(2)}\}, \{\alpha_\varrho^{(3)}\}, \ldots$ von N_n gegeben, so bilden wir mit ihrer Hilfe eine Oberkörperkette $\mathfrak{K}_1 \leqq \mathfrak{K}_2 \leqq \mathfrak{K}_3 \leqq \cdots$ nach folgendem Schema: Es sei $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_0(x_1,\ldots,x_n)$. Sind ferner die Körper $\mathfrak{K}_k$ $\left(k=1,2,\ldots,\binom{i}{2}\right)$ bereits festgelegt, so wird $\mathfrak{K}_{\binom{i}{2}+\mu} = \mathfrak{N}(\mathfrak{K}_{\binom{i}{2}+\mu-1};\ \{\alpha_\varrho^{(\mu)}\})$ $(\mu=1,2,\ldots,i)$ gesetzt. (Das wesentliche bei diesem Körperaufbau ist, daß schrittweise immer längere *Abschnitte* der abgezählten Menge N_n herangezogen werden. Nicht ausreichend wäre es für unsere Zwecke, wenn wir einfach $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_0(x_1,\ldots,x_n)$; $\mathfrak{K}_{i+1} = \mathfrak{N}(\mathfrak{K}_i;\ \{\alpha_\varrho^{(i)}\})$ $(i=1,2,\ldots)$ setzen.) Es ist unmittelbar klar, daß in der gebildeten Kette $\mathfrak{K}_1 \leqq \mathfrak{K}_2 \leqq \mathfrak{K}_3 \leqq \cdots$ durchweg $\mathfrak{K}_{i+1}$ über $\mathfrak{K}_i$ endlich algebraisch ist. Ebenso zeigt eine triviale Induktion, daß alle $\mathfrak{K}_i$ Unterkörper von $\mathfrak{N}$ sind. Darüber hinaus gilt:

Satz 9. *$\mathfrak{N}$ ist der Vereinigungskörper aller $\mathfrak{K}_i$. Jede Abzählung aller über $\mathfrak{K}_0$ algebraisch unabhängigen n-Tupel liefert also eine eindeutig bestimmte Aufbaukette von $\mathfrak{N}$.*

Zum Beweis hat man nach Satz 1 nur zu zeigen: Ist $\{\alpha_\varrho\}$ irgendein n-Tupel über $\mathfrak{K}_0$ algebraisch unabhängiger Elemente aus $\mathfrak{N}' = \mathfrak{K}_1 \vee \mathfrak{K}_2 \vee \cdots$, so enthält $\mathfrak{N}'$ gleichzeitig mit einem beliebigen γ auch den kleinsten über $\mathfrak{K}_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ normalen Oberkörper von $\mathfrak{K}_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\ \gamma)$. Nach Definition von $\mathfrak{N}'$ ist nun $\mathfrak{K}_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\ \gamma) \leqq \mathfrak{K}_i$ für $i > i_0$. Weiter können wir ein $i_1 > i_0$ so wählen, daß $\{\alpha_\varrho\} = \{\alpha_\varrho^{(k)}\}$ mit $k \leqq i_1$ gilt. Dann wird aber nach Definition

$$\mathfrak{K}_{\binom{i}{2}+k} = \mathfrak{N}(\mathfrak{K}_{\binom{i}{2}+k-1};\ \{\alpha_\varrho\} \geqq \mathfrak{N}(\mathfrak{K}_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\ \gamma);\ \{\alpha_\varrho\})$$

wegen $\mathfrak{K}_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\ \gamma) \leqq \mathfrak{K}_{\binom{i}{2}+k-1}$. Ist speziell $\mathfrak{K}_0$ der Körper der rationalen Zahlen oder auch ein endlicher algebraischer Zahlkörper, so weiß man, daß über $\mathfrak{K}_1$ und jedem endlichen algebraischen Oberkörper $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{K}_1$ jedes Polynom rational mit einer endlichen, in jedem Einzelfall sogar beschränkten Anzahl von Schritten in seine irreduziblen Faktoren zerlegt werden kann[8]). Unter diesen Umständen wird man naturgemäß die Frage nach der Existenz einer Aufbaukette schärfer fassen, etwa folgendermaßen: Gegeben sei eine Abzählung $p_1(z,x), p_2(z,x), p_3(z,x) \cdots$ der Menge aller über $\mathfrak{K}_1$ irreduziblen Polynome in z (und damit in gewissem Sinne der Körper $\tilde{\mathfrak{N}}$). Kann man dann eine Aufbaukette $\mathfrak{K}_1 \leqq \mathfrak{K}_2 \leqq \mathfrak{K}_3 \leqq \cdots$ für $\mathfrak{N}$ finden, bei der sich jeder der Körper $\mathfrak{K}_i$ rational mit endlich vielen Schritten nach einem eindeutigen Schema konstruieren läßt? Die Frage ist zu *bejahen*; doch soll der Beweis, der wesentlich umständlichere Überlegungen erfordert als Satz 9, hier nicht näher angeführt werden. Denn einerseits folgt aus der Endlichkeit der Anzahl der für den Aufbau jedes einzelnen $\mathfrak{K}_i$ nötigen Rechenoperationen noch keineswegs die in unserem Falle erwünschte Beschränktheit, und andererseits liegt es hier viel näher, unmittelbar zu fragen:

---

[8]) Die Beschränktheit ist natürlich so gemeint, daß in jedem Einzelfall von vornherein eine Schranke für die Zahl der nötigen Rechenschritte angegeben werden kann. In Zukunft sagen wir in solchen Fällen, „es sei jedes Einzelproblem mit einer beschränkten Schrittzahl zu lösen".

Ist es möglich, von jedem einzelnen, über $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_0(x_1, \ldots, x_n)$ *irreduziblen Polynom* $p(z, x)$ *rational mit beschränkt vielen Schritten zu entscheiden, ob die Nullstellen von* $p(z, x)$ *zu* $\mathfrak{N}$ *gehören oder nicht?*

Zur Lösung dieses Problems aber helfen die Aufbauketten nicht. Sie liefern uns nicht einmal eine Antwort auf die Frage, *ob etwa stets* $\mathfrak{N} = \tilde{\mathfrak{N}}$ *wird.* Über die Wege, auf denen hier möglicherweise die Entscheidung gefunden werden kann, bringen die Schlußbemerkungen einige Andeutungen. Zunächst wollen wir die Mängel der Aufbauketten genauer analysieren. Dabei sollen einige grundsätzliche Betrachtungen über die Bildung unendlicher algebraischer Oberkörper von gegebenem Grundkörper den Ausgangspunkt bilden.

Es sei $\mathfrak{K}_1$ ein beliebiger Körper mit der Eigenschaft, daß über $\mathfrak{K}_1$ und jedem endlichen Oberkörper von $\mathfrak{K}_1$ jedes einzelne Polynom rational mit beschränkt vielen Schritten in seine irreduziblen Faktoren zerlegt werden kann. $\tilde{\mathfrak{N}}$ sei der zu $\mathfrak{K}_1$ gehörige algebraisch abgeschlossene Körper. Um umständliche Isomorphiebetrachtungen zu vermeiden, wollen wir nur (algebraische) Normalkörper von $\mathfrak{K}_1$ betrachten. Es ist dann jeder zugelassene Körper $\mathfrak{L}$ eindeutig bestimmt durch die Menge der über $\mathfrak{K}_1$ irreduziblen Polynome aus $\mathfrak{K}_1[x]$, die in $\mathfrak{L}$ einen Linearfaktor abspalten. Ist N eine Menge von *endlichen* algebraischen Normaloberkörpern $\mathfrak{K}_\tau$ von $\mathfrak{K}_1$, die mit $\mathfrak{K}_\tau$ auch jeden über $\mathfrak{K}_1$ normalen Unterkörper $\mathfrak{K}'_\tau$ von $\mathfrak{K}_\tau$ und mit $\mathfrak{K}_{\tau_1}$ und $\mathfrak{K}_{\tau_2}$ immer auch den Vereinigungskörper $\mathfrak{K}_{\tau_1} \cdot \mathfrak{K}_{\tau_2}$ enthält, so wollen wir N als eine *Aufbaumenge* des Vereinigungskörpers $\mathfrak{L}_n$ aller $\mathfrak{K}_\tau \in N$ bezeichnen. Weiter wollen wir sagen, es sei $\mathfrak{L}_n$ durch N *faßlich definiert*, wenn von jedem einzelnen endlichen algebraischen Normaloberkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{K}_1$ rational mit beschränkt vielen Schritten entschieden werden kann, ob $\mathfrak{K}$ zu N gehört oder nicht.

Faßlich definiert ist trivialerweise $\tilde{\mathfrak{N}}$. Im übrigen definiert N z. B. dann $\mathfrak{L}_n$ faßlich, wenn N alle und nur die endlichen Normaloberkörper von $\mathfrak{K}_1$ umfaßt, deren Galoisgruppe über $\mathfrak{K}_1$ eine bestimmte ausgezeichnete Eigenschaft besitzt. Denn die Galoisgruppe von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_1$ kann bei jedem einzelnen endlichen Normaloberkörper von $\mathfrak{K}_1$ immer rational mit beschränkt vielen Schritten bestimmt werden.

Insbesondere ist also der größte abelsche Normaloberkörper von $\mathfrak{K}_1$ in unserem Sinne faßlich definiert. — Man beweist leicht:

Satz 10. *Ist* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_n$ *faßlich definiert, so läßt sich jedes einzelne Polynom* $p(x)$ *aus* $\mathfrak{L}[x]$ *rational mit beschränkt vielen Schritten in seine über* $\mathfrak{L}$ *irreduziblen Faktoren zerlegen.*

Zunächst nämlich bildet der kleinste, die Koeffizienten von $p(x)$ enthaltende Normaloberkörper von $\mathfrak{K}_1$ einen der Körper $\mathfrak{K}_\tau$ aus N. In $\mathfrak{K}_\tau$ findet man dann durch beschränkt viele Rechnungen ein durch $p(x)$ teilbares Polynom $P(x) \in \mathfrak{K}_1[x]$. Offenbar genügt es, zu zeigen, daß $P(x)$ über $\mathfrak{L}$ rational mit beschränkt vielen Schritten in irreduzible Faktoren zerlegbar ist. Die gewünschte Zerlegung von $P(x)$ aber kann dadurch gefunden werden, daß man die endlich vielen überhaupt möglichen Faktorzerlegungen $P(x) = p_1^{(\nu)}(x) \cdots p_{s_\nu}^{(\nu)}(x)$ herstellt, jeweils den kleinsten, die Koeffizienten aller $p_i^{(\nu)}(x)$ $(i = 1, \ldots, s_\nu)$ enthaltenden Normaloberkörper $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ von $\mathfrak{K}_1$ bildet und nachprüft, ob $\mathfrak{K}^{(\nu)}$ zur Menge N gehört oder nicht[9]).

Auf Grund von Satz 10 kann man in einem faßlich definierten unendlichen Normaloberkörper $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}_1$ genau so bequem rechnen wie in einem endlichen; denn bei jeder einzelnen Rechnung müssen ja immer nur endlich viele Polynome $p_\nu(x)$ aus $\mathfrak{L}[x]$ herangezogen werden. Wählen wir jetzt wieder für $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_0(x_1, \ldots, x_n)$ eine endliche, rein

[9]) Die Ausführung des Beweises im einzelnen erfordert nur Überlegungen, wie sie ohne weiteres in der Lehrbuchliteratur zu finden sind. Vgl. z. B. *O. Haupt*, Lehrbuch der Algebra 1, Leipzig 1929, insbesondere 11, 6 und 13, 4.

transzendente Erweiterung des Körpers $\mathfrak{K}_0$ der rationalen Zahlen, so kann man zu dem kleinsten über $\mathfrak{K}_0$ normalen Oberkörper $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{K}_1$ auf Grund von Satz 9 sofort eine Aufbaumenge N im Sinne unserer allgemeinen Betrachtungen gewinnen. Man braucht nur zu jedem Körper $\mathfrak{K}_i$ der in Satz 9 untersuchten Aufbaukette den kleinsten über $\mathfrak{K}_1$ normalen Körper $\mathfrak{K}_i^*$ zu bilden, und als Elemente von N die $\mathfrak{K}_i^* = \mathfrak{U}_{i_0}$ und ihre über $\mathfrak{K}_1$ normalen Unterkörper $\mathfrak{U}_{ik}(k \geqq 1)$, so wie alle Vereinigungskörper $\mathfrak{U}_{i_1 k_1} \cdots \mathfrak{U}_{i_n k_{i_n}}$ $(n \geqq 1)$ zu wählen.

Aber die Menge N liefert diesmal keine *faßliche* Definition von $\mathfrak{N}$. Suchen wir nämlich ein charakteristisches Merkmal dafür, daß ein gegebener endlicher Normaloberkörper $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{K}_1$ zu N gehört, so kommen wir nach den weiter oben über die Aufbauketten gemachten Bemerkungen zwar zu einem Kriterium des folgenden Typus: $\mathfrak{K}$ liegt dann und nur dann in N, wenn ein wohldefiniertes Konstruktionsverfahren in endlich vielen Schritten von $\mathfrak{K}_1$ zu einem in N liegenden Oberkörper $\mathfrak{K}_i^*$ von $\mathfrak{K}$ führt. Aber man ist dabei nicht imstande, im Einzelfalle stets eine Schranke für die Anzahl der zum Aufbau vom $\mathfrak{K}_i^*$ nötigen Schritte zu finden, auch wenn jeder einzelne $\mathfrak{K}_i^*$ mit einer beschränkten Anzahl von Rechenoperationen konstruierbar sein sollte. Denn unsere Überlegungen liefern uns bei gegebenem $\mathfrak{K}$ keineswegs eine Schranke für den Index i des kleinsten Körpers $\mathfrak{K}_i^*$, der $\mathfrak{K}$ im Falle $\mathfrak{K} < \mathfrak{N}$ enthält. Daher gibt unser Kriterium keine wirkliche Entscheidungsmöglichkeit über die Zugehörigkeit von $\mathfrak{K}$ zu $\mathfrak{N}$ und wir können dementsprechend, wie schon oben hervorgehoben, unsere Aufbauketten bzw. -mengen nicht zur näheren Untersuchung der Eigenschaften von $\mathfrak{N}$ benutzen.

Die Schwierigkeit, die sich uns bei der Betrachtung von $\mathfrak{N}$ entgegenstellt, beruht also auf dem wohlbekannten Unterschied zwischen *mit endlich vielen Schritten* und *mit einer beschränkten Anzahl von Schritten*, ein Unterschied, dessen Bedeutung z. B. in Band 1 des Lehrbuches der Algebra von O. Haupt sehr anschaulich klargemacht wird[10]).

Obwohl die Bildung der Aufbauketten (bzw. Aufbaumengen) allein zur wirklichen Beherrschung des Körpers $\mathfrak{N}$ bestimmt nicht ausreicht, scheint mir die Einführung dieser Ketten grundsätzlich wichtig. Denn da die ursprüngliche Definition von $\mathfrak{N}$ nicht von $\mathfrak{K}_0$, sondern von $\tilde{\mathfrak{N}}$ ausgeht, und $\mathfrak{N}$ aus einer von vornherein in keiner Weise übersehbaren Menge von Unterkörpern von $\tilde{\mathfrak{N}}$ durch eine Minimaleigenschaft aussondert, läge an sich der Gedanke nahe, angesichts der auftauchenden Schwierigkeiten irgendwie die logische Berechtigung einer derartigen Einführung von $\mathfrak{N}$ anzufechten oder zum mindesten die von $\mathfrak{K}_1$ „aufbauenden" den von $\tilde{\mathfrak{N}}$ aus „abbauenden" Definitionen gegenüber zu stellen und für die ersten eine Vorzugsstellung gegenüber den letzten in Anspruch zu nehmen. Satz 9 zeigt nun, daß damit ein falscher Weg eingeschlagen würde. Es ist kein tieferes logisches Problem, was hier zu lösen wäre. Man kann durchaus die Betrachtung von $\tilde{\mathfrak{N}}$ und der Menge aller über $\mathfrak{K}_0$ normalen Unterkörper von $\tilde{\mathfrak{N}}$ nach $\mathfrak{K}_1$ und den endlichen Normaloberkörpern von $\mathfrak{K}_1$ verlegen. Nach dieser Umformung erst zeigen sich die Schwierigkeiten, zu deren Überwindung anscheinend die einfachsten, unmittelbar aus der ursprünglichen Definition von $\mathfrak{N}$ ableitbaren Folgerungen nicht genügen.

§ 4. Schlußbemerkungen.

Die wichtigsten Ergebnisse der Betrachtungen von § 1 bis § 3 lassen sich kurz so zusammenfassen:

1. Die an und für sich einfache und elegante begriffliche Definition der allgemeinen Normalkörper hat den Nachteil, daß sich aus ihr auch in den einfachsten nichtalgebraischen

[10]) Vgl. *O. Haupt*, a. a. O. [9]), 11, 6. Zusatz 2—4 (S. 247ff.).

Fällen keine Vorschrift zum faßlichen konstruktiven Aufbau dieser Körper ableiten läßt. So muß vorerst dahingestellt bleiben, ob es überhaupt algebraisch nicht abgeschlossene, nichtalgebraische Normalkörper gibt.

2. Die allgemeinen Normalkörper liefern aber nicht nur Beispiele für die Schwierigkeiten, mit denen man rechnen muß, wenn man „nicht-faßlich" definierte unendliche Oberkörper gegebener Grundkörper betrachten will. Ihre in § 2 besprochenen Grundeigenschaften sichern ihnen im Rahmen der allgemeinen Körpertheorie im Sinne von Steinitz das Recht auf selbständige Beachtung; vor allem die Frage nach der *Existenz oder Nichtexistenz von nichttrivialen, nichtalgebraischen Normalkörpern* ist ein Problem, das nicht einfach übergangen werden darf.

3. Gibt es nichttriviale, nichtalgebraische Normalkörper, so wird man natürlich ihre „Galoissche Theorie" im Sinne von § 2 weiter zu entwickeln suchen. Die wichtigsten, unmittelbar an die Sätze 5 bis 7 anknüpfenden Fragen dürften dabei folgende sein:

a) Es sei $\mathfrak{N}$ ein Normaloberkörper von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ ein beliebiger Körper zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$. Läßt sich dann immer jede über $\mathfrak{K}$ isomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf einen Unterkörper $\mathfrak{M}'$ von $\mathfrak{N}$ zu einem Automorphismus von $\mathfrak{N}$ über $\mathfrak{K}$ erweitern?

b) Kann man diejenigen Untergruppen $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{N}$ über $\mathfrak{K}$, die den Körpern $\mathfrak{M}$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$ zugeordnet sind, irgendwie genauer charakterisieren?

Bei b) überzeugt man sich leicht, daß man jedenfalls vor einer viel schwierigeren Aufgabe steht als im Falle der unendlichen algebraischen Normalkörper. Zu a) vergleiche man die Bemerkungen weiter unten.

Was das Hauptproblem der Existenz von nichttrivialen, nichtalgebraischen Normalkörpern angeht, so dürfte es sich empfehlen, vom allereinfachsten Spezialfall auszugehen, d. h. vom kleinsten über dem Körper $\mathfrak{K}_0$ der rationalen Zahlen normalen Körper $\mathfrak{N}$, der eine gegebene einfach transzendente Erweiterung $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_0(x)$ von $\mathfrak{K}_0$ enthält. Hier liegt es zunächst nahe, anknüpfend an Satz 4 zu versuchen, ob sich nicht weitere Aussagen über die Menge der zu $\mathfrak{N}$ gehörigen algebraischen Zahlen herleiten lassen. Auch könnte man daran denken, im Falle einer Variablen x zunächst irgendwelche genaueren Aussagen über die Menge aller rein transzendenten Oberkörper von $\mathfrak{K}_0$ zu gewinnen, die in dem zu $\mathfrak{N}$ gehörigen algebraisch abgeschlossenen Körper $\tilde{\mathfrak{N}}$ enthalten sind. Doch zeigen schon die ersten Versuche, in dieser Richtung weiterzukommen, daß man das rationale Rechnen in transzendenten Körpern auch in den einfachsten Fällen auch heute noch sehr viel weniger beherrscht als das ganz-rationale Rechnen in Polynomringen von beliebig vielen Unbestimmten. Vor allem aber dürfte bloßes Rechnen ohne einen begrifflichen Leitgedanken kaum zum Ziel führen. Einen solchen Leitgedanken nun liefert die oben unter 3a) aufgeworfene Frage. Ist $\mathfrak{L}$ ein Oberkörper von $\mathfrak{K}$, A ein Isomorphismus von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$, der $\mathfrak{L}$ auf einen echten Unterkörper $\mathfrak{L}'$ abbildet, so kann A trivialerweise nicht zu einem Automorphismus von $\mathfrak{L}$ über $\mathfrak{K}$ erweitert werden. Daraus folgt leicht, daß die Frage von 3a) zu *verneinen* ist, wenn der Normalkörper $\mathfrak{N}$ über seinem Grundkörper $\mathfrak{K}$ *unendlichen Transzendenzgrad* besitzt[11]). Bei endlichem Transzendenzgrad, insbesondere bei dem uns zunächst interessierenden Transzendenzgrad 1, dagegen, läßt sich jedenfalls der algebraisch abgeschlossene Körper $\tilde{\mathfrak{N}}$ *nicht* isomorph auf einen echten Unterkörper abbilden, und man schließt aus dieser Bemerkung mühelos, daß die Isomorphismen der Unterkörper

[11]) Vgl. die Schlußbemerkungen in der klassischen Steinitzschen Arbeit (Algebraische Theorie der Körper, Journ. f. Math. **137** [1910], S. 137—309).

von $\tilde{\mathfrak{N}}$ im Sinne von 3a) zu Automorphismen von $\tilde{\mathfrak{N}}$ erweitert werden können. Unter diesen Umständen liegt es nun auf der Hand, zunächst im allereinfachsten Fall, also bei dem kleinsten über $\mathfrak{K}_0$ normalen Oberkörper $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{K}_0(x)$ zu untersuchen, ob eine isomorphe Abbildung A von $\mathfrak{N}$ auf einen echten Unterkörper $\mathfrak{N}'$ existiert oder nicht. Hier besteht eine gewisse Aussicht, verhältnismäßig elementar zu einer Entscheidung zu kommen, und zwar vermute ich, daß man wie bei $\tilde{\mathfrak{N}}$ ein „Nein" als Antwort erhält. Damit wäre gleichzeitig, analog wie bei $\tilde{\mathfrak{N}}$ gezeigt, daß Frage 3a) für $\mathfrak{N}$ zu bejahen ist, und man hätte eine feste Grundlage für die Weiterarbeit gewonnen. Gleichzeitig wäre die Untersuchung der allgemeineren Normalkörper in einen größeren Rahmen eingeordnet: „Bestimmung aller nicht-algebraischen Oberkörper eines Grundkörpers $\mathfrak{K}$, die *nicht* isomorph über $\mathfrak{K}$ auf einen echten Unterkörper abgebildet werden können".

Eingegangen 29. Februar 1952.

Über die Glaisher'sche Verallgemeinerung eines Euler'schen Satzes über Partitionen.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag am 5. März 1952 in alter Freundschaft gewidmet.

Von *Heinrich Tietze* in München.

Der ursprüngliche Euler'sche Satz ist rund 200 Jahre alt, aber auch die weniger bekannt gewordene J. W. L. Glaisher'sche Verallgemeinerung (Nr. 1, Satz 2) ist schon vor etwa 70 Jahren publiziert worden und kann auf mannigfache Art bewiesen werden. Wir kommen darauf, sowie auf den Vergleich verschiedener Beweise hinsichtlich ihrer „Einfachheit" nachher (Nr. 6 bis 8) noch zurück, wobei in Nr. 7 gewisse Verallgemeinerungen erwähnt werden, über deren Neuheit ich aber in der gegenwärtigen Lage (vgl. Nr. 6, Anm. [9])) nichts zu behaupten wage.

1. Unter einer Partition einer natürlichen Zahl m versteht man bekanntlich eine Zerlegung

$$m = a_1 + \cdots + a_n,$$

derart, daß die Summanden $a_1, \ldots, a_n$ selbst natürliche Zahlen sind, wobei es auf die Reihenfolge der Summanden nicht ankommt. Wenn man will, kann man also

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n > 0$$

annehmen. Die Anzahl der im genannten Sinn wesentlich verschiedenen Partitionen von m möge $p(m)$ heißen [1]).

Ein bekannter Satz von Euler besagt dann, daß die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl m in lauter ungerade Summanden ebenso groß ist, wie die Anzahl der Partitionen von m in lauter verschiedene Summanden [2]). Es ist das ein spezieller Fall des folgenden Satzes:

Satz 1. *Seien m und k zwei natürliche Zahlen. Sei $D_k(m)$ die Anzahl der Partitionen von m, bei denen wenigstens ein Summand durch k teilbar ist. Sei ferner $E_k(m)$ die Anzahl*

---

[1]) Man kann eine Partition von m auch repräsentieren durch eine unendliche Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\nu + \cdots$$

mit der Summe m, wobei alle Summanden ganz sind und $a_\nu \geqq a_{\nu+1}$, $a_\nu \geqq 0$ für $\nu \geqq 1$ gilt. Dehnt man diese Erklärung auf Zahlen $m \leqq 0$ aus, dann erhält man

(1) $$p(0) = 1 \text{ und } p(m) = 0 \text{ für } m < 0.$$

[2]) Vgl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, 1. Auflage, 1. Band, Arithmetik und Algebra, II. Teil (1900—1904), Artikel I C 3 (Bachmann, Analytische Zahlentheorie), p. 637 und Encyclopédie des Sciences mathématiques, éd. franc., tome 1, vol. 3, art. I 17 (Bachmann-Hadamard-Maillet, Propositions transcendantes de la théorie des nombres), p. 218 und die dort angegebene Literatur. Neben mannigfachen anderen älteren und neueren Ergebnissen über Partitionen findet man den oben erwähnten Satz in dem Buch von *G. H. Hardy-E. M. Wright*, An Introduction to the theory of numbers, Oxford 1938, chap. XIX., p. 275.

der Partitionen von m, bei denen unter den Summanden wenigstens ein System von k einander gleichen Zahlen vorkommt. Dann ist stets

$$D_k(m) = E_k(m). \tag{2}$$

Dieser Satz ist trivial sowohl für $k = 1$, wo $D_1(m)$ und $E_1(m)$ beide gleich $p(m)$ sind, als auch für $k > m$, wo $D_k(m) = E_k(m) = 0$ ist. Übrigens kann man natürlich Satz 1 auch folgendermaßen formulieren:

Satz 2. *Es ist die Anzahl $p(m) - D_k(m)$ derjenigen Partitionen von m, bei denen kein Summand durch k teilbar ist, ebenso groß wie die Anzahl $p(m) - E_k(m)$ derjenigen Partitionen von m, bei denen sich unter den Summanden keine k einander gleichen finden.*

Es liefert dann $k = 2$ den oben erwähnten Euler'schen Satz. Der Beweis von Satz 1 läßt sich leicht erbringen mit Hilfe der in der folgenden Nr. 2 eingeführten Anzahlen (3).

2. Es seien $n, c_1, \ldots, c_n, h_1, \ldots, h_n$ natürliche Zahlen, wobei die Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ untereinander verschieden seien. Es bezeichne dann

$$A(m; c_1, \ldots, c_n; h_1, \ldots, h_n) \tag{3}$$

die Anzahl derjenigen Partitionen der ganzen Zahl m, bei denen für jedes ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ unter den Summanden wenigstens h_ν den Wert c_ν haben. Streicht man, falls

$$h_1 c_1 + \cdots + h_n c_n < m \tag{4}$$

ist, unter den Summanden einer Partition der genannten Art für jedes ν je h_ν Summanden $= c_\nu$, dann bilden die übrigen Summanden eine Partition der Zahl

$$m - h_1 c_1 - \cdots - h_n c_n, \tag{5}$$

während man umgekehrt von jeder solchen Partition durch Hinzufügen von je h_ν Summanden $= c_\nu$ eindeutig zu einer der betrachteten Partitionen von m gelangt. Es ist also

$$A(m; c_1, \ldots, c_n; h_1, \ldots, h_n) = p(m - h_1 c_1 - \cdots - h_n c_n); \tag{6}$$

und diese Formel gilt gemäß (1) in Anm. [1]) auch, wenn (4) nicht erfüllt und die Zahl (5) gleich null oder negativ ist.

3. Die in Satz 1 auftretenden Zahlen $D_k(m)$, $E_k(m)$ lassen sich nun durch gewisse Zahlen (3) ausdrücken. Was zunächst die Zahlen $D_k(m)$ betrifft, so sind hier alle Partitionen von m zu betrachten, unter deren Summanden sich wenigstens eine der Zahlen λk (mit $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) findet.

Es ist aber natürlich zu beachten, daß es auch Partitionen geben kann, unter deren Summanden sich zwei oder mehrere verschiedene der Zahlen λk befinden. Man erkennt nun leicht die Gültigkeit der Gleichung

$$\begin{aligned} D_k(m) = {} & \sum_\lambda A(m; \lambda k; 1) - \sum_{\lambda<\mu} A(m; \lambda k, \mu k; 1, 1) + \\ & + \sum_{\lambda<\mu<\nu} A(m; \lambda k, \mu k, \nu k; 1, 1, 1) - \cdots, \end{aligned} \tag{7}$$

wobei sich die Summen der Reihe nach über alle natürlichen Zahlen λ, dann über alle Paare zweier verschiedener Zahlen λ, μ, dann über alle Tripel λ, μ, ν usw. erstrecken [3]).

4. Was andererseits die Zahlen $E_k(m)$ betrifft, so sind hier alle Partitionen zu betrachten, unter deren Summanden sich wenigstens ein System von k Zahlen befindet, die alle $= 1$ sind, oder alle $= 2, \ldots$, allgemein alle $= \lambda$. Wobei nun zu beachten ist, daß

---

[3]) Ganz allgemein ist ja, wenn $M_1, \ldots, M_n$ irgend welche endliche Mengen sind, die Anzahl der Elemente ihrer Vereinigungsmenge gegeben durch

$$\sum_\lambda A_\lambda - \sum_{\lambda<\mu} A_{\lambda,\mu} + \sum_{\lambda<\mu<\nu} A_{\lambda,\mu,\nu} - \cdots + (-1)^{n-1} A_{1,2,\ldots,n}, \tag{8}$$

dabei unter A_λ die Anzahl der Elemente von M_λ verstanden, unter $A_{\lambda,\mu}$ bzw. $A_{\lambda,\mu,\nu}$ usw. die Anzahl der Elemente der Durchschnittsmenge $M_\lambda M_\mu$ bzw. $M_\lambda M_\mu M_\nu$ usw.

Im Fall der Formel (7) ist M_λ die Menge der Partitionen von m mit wenigstens einem Summanden $= \lambda k$.

es Partitionen geben kann, bei denen für mehrere verschiedene Zahlen λ sich solche Systeme von k einander gleichen Zahlen befinden. Das führt durch eine Überlegung, die jener in Nr. 3 ganz analog ist[4]), zu der Gleichung

$$(9) \qquad E_k(m) = \sum_{\lambda} A(m;\, \lambda;\, k) - \sum_{\lambda<\mu} A(m;\, \lambda,\, \mu;\, k, k) + \\ + \sum_{\lambda<\mu<\nu} A(m;\, \lambda,\, \mu,\, \nu;\, k, k, k) - \cdots.$$

5. Gemäß (6) hat nun allgemein sowohl

$$A(m;\, \lambda_1 k, \ldots, \lambda_s k;\, 1, \ldots, 1)$$

als auch

$$A(m;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_s;\, k, \ldots, k)$$

den Wert $p(m - \lambda_1 k - \cdots - \lambda_s k)$. Die Summen in (7) und (9) stimmen also überein, woraus die Gleichung (2), d. h. die Behauptung folgt.

Die hier betrachteten Sätze beziehen sich einerseits auf gewisse Unterscheidungen der Summanden einer Partition bezüglich der Restklassen nach einem Modul $k \geqq 2$, denen die Summanden angehören, andererseits auf die Mehrfachheit des Auftretens gleicher Summanden. Man könnte darüber hinaus überhaupt das Auftreten gewisser Restklassen oder Systeme von Restklassen mod. k unter den Summanden einer Partition ins Auge fassen, sowie Vielfachheiten bezüglich der Summanden aus den einzelnen Restklassen. Doch soll dem nicht weiter nachgegangen werden.

6. Von dem in Nr. 1 bis 5 dargelegten Beweis des Satzes 1 bzw. des gleichwertigen Satzes 2 habe ich vor Jahren eine kurze Skizze gegeben[5]) und nachher (von Satz 2) einen „zweiten Beweis"[6]) publiziert, der aber, wie ich inzwischen erfuhr, ebensowenig neu war, wie der Satz selbst, — eine Kenntnis, die ich dem Referat in Math. Reviews verdanke[7]). Damals aber waren meine Bemühungen, um festzustellen, ob der fragliche Satz schon bekannt oder neu sei, ergebnislos geblieben[8]), — zum Teil durch mein Verschulden[9]). An den l. c.[2]) angegebenen Stellen fand ich nur den Euler'schen Fall $k = 2$,

---

[4]) Bei Anwendung der Formel (8) aus der vorigen Anm. [3]) ist jetzt für M_λ die Menge aller Partitionen von m zu nehmen mit wenigstens k Summanden $= \lambda$.

[5]) Sitz. Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., math. naturwiss. Kl., Jahrgang 1947, Bericht über die Sitzung vom 7. Febr. 1947, Punkt 3, S. 3*/4* (München 1949).

[6]) Ibidem, Sitzung vom 2. Mai 1947, Punkt 4, S. 6* und S. 45—46.

[7]) Mathematical Reviews, vol. 9, No. 10, Nov. 1949, p. 571; Referent *D. H. Lehmer*, Berkeley, Calif.

[8]) Unter anderem hatte ich an *G. H. Hardy*, der mir gelegentlich der Glückwünsche der Bayer. Akademie der Wiss. zu seinem 70. Geburtstag sehr herzlich geschrieben hatte, eine briefliche Mitteilung gemacht und die obigen Ausführungen (Nr. 1—5) übersendet, — seinen ungünstigen Gesundheitszustand nicht ahnend, der ihn noch im selben Jahr (Dez. 1947) uns entrissen hat.

[9]) Trotz der kümmerlichen Bibliotheks- und erschwerten Lebensverhältnisse hätte ich in dem Werk von *L. E. Dickson*, History of the theory of numbers (das unter den unzerstörten Büchern des Mathematischen Instituts der Universität München noch vorhanden war) in vol. II die Stellen finden dürfen, an denen (p. 140) über *J. W. L. Glaishers* Arbeit (The Messenger of Math. 12 (1883), p. 158—170) berichtet wird, sowie (p. 138) über eine denselben Satz behandelnde Arbeit von *F. Franklin* (John Hopkins Univ. Circ., 72). (Auf beide Stellen hat mich nachher Herr Kollege *R. Steuerwald* aufmerksam gemacht.) Die Originalarbeiten sind mir freilich auch heute noch nur schwierig oder gar nicht erreichbar, da speziell von den Beständen der Bayer. Staatsbibliothek manches zerstört, manches verlagert ist und auch der frühere ausgedehnte gegenseitige Leihverkehr zwischen den großen Bibliotheken sehr reduziert ist. Das dämpft — neben den geminderten persönlichen Kräften — auch jetzt noch den Mut, sich über Vorarbeiten zu informieren; und nicht ohne Wehmut denke ich an meine ersten Publikationen über Kettenbrüche, für die ich, um ja nichts Einschlägiges zu übersehen, systematisch die Bände des Jahrbuchs über die Fortschritte sowie E. Wölffing's Zusammenstellung vornahm, und wo die durch den Tauschverkehr der Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik mit Fachzeitschriften reich ausgestattete Bibliothek des Mathematischen Seminars der Wiener Universität für das Studium der Originalarbeiten zur Verfügung stand.

sowie neben dem auf erzeugende Funktionen gestützten Beweis noch jenen Beweis, der die dyadische Darstellung der natürlichen Zahlen benützt [10]) und dessen Verallgemeinerung (l.c.[6])) auf eine beliebige Basis $k \geqq 2$, wie l.c.[7]) hervorgehoben, den ursprünglichen Glaisher'schen Beweis darstellt, der durch die Herstellung einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung zwischen den Partitionen der beiden Arten besonders eindrucksvoll ist. Schon von Anfang an hatte ich (zunächst für den Fall $k = 2$) nach einem Beweis gesucht, der sich *nicht* erzeugender Funktionen bedient, dabei zunächst den oben (Nr. 1 bis 5) entwickelten Beweis [11]), erst nachher den „zweiten Beweis" gefunden, also jenen, den schon Glaisher gegeben hat. Auf die erzeugenden Funktionen, ihre Verwendung durch Euler [12]) und die Einfachheit des (für $k = 2$) mit ihrer Hilfe geführten Beweises hatte mich alsbald Herr Kollege Perron hingewiesen. Und Herr D. H. Lehmer bemerkt l.c.[7]), daß sich aus der Identität

$$\frac{1 - x^{k\lambda}}{1 - x^{\lambda}} = 1 + x^{\lambda} + x^{2\lambda} + \cdots + x^{(k-1)\lambda} \tag{10}$$

unmittelbar der allgemeine Satz (der obige Satz 2 für beliebiges k) gewinnen läßt. In der Tat, bildet man von der linken Seite von (10) das Produkt über alle $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, was $\prod_h{}' \frac{1}{1 - x^h}$, erstreckt über alle $h \not\equiv 0 \pmod{k}$, ergibt, und entwickelt man dieses Produkt in eine Potenzreihe, so hat diese als Koeffizienten von x^m die Anzahl aller Partitionen von m mit lauter nicht durch k teilbaren Summanden; die gleiche Produktbildung über die rechte Seite von (10) liefert aber als Koeffizienten von x^m die Anzahl aller Darstellungen von m in der Gestalt $\sum_\lambda \nu_\lambda \lambda$, wo $0 \leqq \nu_\lambda \leqq k - 1$ für jedes λ gilt; und jede solche Darstellung kann angesehen werden als Partition, wo der einzelne Summand λ genau ν_λ-mal, also keiner öfter als $(k - 1)$-mal auftritt.

7. Man mag sich dem Reiz dieser Schlußweise nicht entziehen, die überdies die Möglichkeit der Verallgemeinerung in sich schließt. Nimmt man etwa an Stelle eines festen k ein System von ganzen positiven Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ so, daß die unendlich vielen Zahlen

$$1 \cdot k_1, 2 \cdot k_2, \ldots, \lambda \cdot k_\lambda, \ldots \tag{11}$$

alle voneinander verschieden ausfallen, dann erhält man aus

$$\prod_h{}' \frac{1}{1 - x^h} = \prod_\lambda \frac{1 - x^{k_\lambda \lambda}}{1 - x^{\lambda}} = \prod_\lambda (1 + x^{\lambda} + \cdots + x^{(k_\lambda - 1)\lambda})$$

(wo links das Produkt sich über alle h erstreckt, die nicht in (11) auftreten), durch Vergleich des Koeffizienten von x^m links und rechts, daß jede Zahl m ebensoviel Partitionen in lauter von den Zahlen (11) verschiedene Summanden hat, wie in lauter Summanden, unter denen keine Zahl λ öfter als $(k_\lambda - 1)$-mal vorkommt. Wählt man beispielsweise $k_\lambda = \lambda$ (allgemeiner $= \lambda^{g-1}$), so ergibt sich, daß *die Anzahl der Partitionen einer Zahl m in Summanden, unter denen keine Quadratzahl (bzw. keine g-te Potenz) vorkommt, ebenso groß ist wie die Anzahl der Partitionen von m, in denen kein Summand λ öfter als $(\lambda - 1)$-mal (bzw. $(\lambda^{g-1} - 1)$-mal) auftritt.*

---

[10]) *G. H. Hardy-E. M. Wright*, l.c.[2]), p. 275.

[11]) Eine — mit liebenswürdiger Unterstützung von Herrn Kollegen *Robert Schmidt* verfaßte — englische Übertragung von Nr. 1 bis 5 legte ich vor etwa zwei Jahren brieflich Herrn Kollegen *E. Hopf* vor.

[12]) Introductio in analysin infinitorum, Lausanne bei M. M. Bousquet, 1748 = Opera Omnia, Ser. I, vol. VIII, cap. XVI, De partitione numerorum, Nr. 325, p. 333—334; ferner: Novi comment. acad. scient. Petropolitanae **3** (1750/51), 1753 und **14** (1769), 1770 = Opera Omnia, ser. I, vol. II, p. 285 (Nr. 47) und Ser. I, vol. III, p. 131—147.

8. Der Glätte der mit Heranziehung erzeugender Funktionen ausgeführten Beweise steht natürlich gegenüber, daß sie eines Unterbaues bedürfen, sei es daß man die Begriffe der Konvergenz unendlicher Reihen und Produkte[13]) (und mit dem Begriff der Irrationalzahl ein dem Fragenkreis der Partitionen ganzer Zahlen fremdes Element) einführt, sei es daß man zur Vermeidung von Konvergenzbetrachtungen den Aufbau einer ad hoc zu schaffenden rein formalen Theorie von Potenzreihen und unendlichen Produkten ins Auge faßt.

Was man bevorzugt, ist dann eine Frage des Geschmacks oder der jeweiligen Zielsetzung[14]). Wer die Eleganz bewundert, mit der sich, gestützt auf den Cauchy'schen Integralsatz und den Residuensatz, der „Fundamentalsatz der Algebra" beweisen läßt, mag darum nichts desto weniger jene Beweise dieses Satzes schätzen[15]), die sich auf wesentlich elementarere Betrachtungen stützen und sich von allen Hilfsmitteln freihalten, die dem Bereich des zu beweisenden Satzes fremd sind.

Wenn schon von den obigen Entwicklungen über Partitionen manche nicht neu waren, so sind es noch weniger die letzten methodischen Bemerkungen, die damit auf ein sehr bescheidenes Spezialgebiet der Partitionen bezogen werden. Doch unbeschadet der Geringfügigkeit dieses Beitrags sind die Glückwünsche, die ich damit verbinde, nicht weniger herzlich.

München, im März 1952.

---

[13]) Vgl. etwa *L. Kronecker*, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. I (1901), 3. Vorlesung §§ 4, 5 (S. 48ff.); *G. H. Hardy-E. M. Wright*, l.c.[2]), chap. 19, p. 273, 274.

[14]) Wie mir Herr *R. Steuerwald* vor mehr als Jahresfrist mitteilte, hat er für Satz 1 bzw. 2 (Nr. 1) einen elementaren Induktionsbeweis von m auf $m+1$ entworfen, der, wie ich hoffe, bald publiziert wird.

[15]) Natürlich ist bei diesen Beweisen einerseits auf die Angemessenheit der methodischen Hilfsmittel, andererseits aber auch auf die Eleganz mancherlei Sorgfalt verwendet worden; vgl. dazu etwa *O. Haupt*, Einführung in die Algebra, Bd. II (1929), Kap. 16; *O. Perron*, Annali di Mat. pura e appl., Bologna, IV. ser. 28, p. 183 (1949).

Eingegangen 10. März 1952.

Ableitungsbasen, Prätopologie und starker Vitalischer Satz[1].

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Christian Pauc* in Cape Town.

1. Einleitung. Orientierung am klassischen Fall.

Aus dem ursprünglichen Lebesgueschen Maß wurde allmählich der Begriff einer reinen Maßstruktur herausgearbeitet, indem euklidische Struktur, Metrik, Topologie, sogar Punkte abgeschafft wurden. Als Mathematiker, die zu diesem Abstrahierungsprozeß wesentlich beigetragen haben, dürfen wir Carathéodory, Radon, Fréchet, Nikodym, Olmsted erwähnen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine abstrakte Theorie der Differentiation von Mengenfunktionen. Wir beginnen mit einer Deutung der elementaren Definition einer numerischen Funktion einer reellen Variablen x $(\alpha < x < \beta)$:

$$f'(a) = \lim\,(f(a+h) - f(a))/h,$$

wenn h gegen Null strebt. Falls h positiv ist, fassen wir den Nenner des Differenzenquotienten als Maß des (abgeschlossenen) Intervalles $[a, a+h]$ und den Zähler als den Wert der Intervallfunktion $\Psi(J) = f(v) - f(u)$ für $J = [u, v]$, $u < v$, auf, wobei $u = a$, $v = a + h$ ist. Der Fall $h < 0$ läßt sich ebenso interpretieren, indem wir den Differenzenquotienten in die Form $(f(a) - f(a+h))/(-h)$ schreiben. Der Grenzübergang erfolgt mittels punktweise sich zusammenziehender Intervalle.

Nach dieser kurzen Vorbereitung wollen wir die abstrakte Übertragung darlegen, die auf de Possel[2]) wesentlich zurückgeht.

1. 1. Rahmen der Untersuchung, Definition einer Ableitungsbasis. Im folgenden bedeute

μ: σ-endliches nicht negatives Maß mit dem Booleschen σ-Verband $\mathfrak{M}$ als Definitionsbereich.

μ heißt das Grundmaß. Die Elemente von $\mathfrak{M}$ sind Teilmengen einer Grundmenge $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}$ gehört zu $\mathfrak{M}$. Das Maß $\mu(\mathfrak{R})$ von $\mathfrak{R}$ ist entweder endlich oder unendlich; im letzteren Fall bedeutet die σ-Endlichkeit die Existenz einer abzählbaren Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{M}$-Mengen endlichen Maßes.

---

[1]) Diese Arbeit gibt in ausführlicher Form den Inhalt dreier Vorträge wieder, die der Verfasser am 8., 9. und 10. Januar 1952 im mathematischen Seminar der Erlanger naturwissenschaftlichen Fakultät dank einer Einladung der Erlanger Mathematiker hielt. Derselbe Stoff in abgekürzter Fassung wurde auch in zwei Vorträgen im Pariser „Séminaire d'Analyse" am 15. und 22. Januar 1952 behandelt.

Die Theorie entstand im Zusammenhang mit der brieflichen Mitwirkung des Verfassers an der zweiten Auflage von *Haupt-Aumann*, Differential- und Integralrechnung **3**, Walter de Gruyter, Berlin 1952.

Verfasser möchte Herrn Haupt für zahlreiche Anregungen (insbesondere den Hinweis auf die Bedeutung der *Denjoy*schen Arbeiten in C. R. Paris **231** (1950), S. 560, 600, 737, 1013, **232** (1951), S. 195, Amer. J. Math. **73** (1951), S. 314—356), kritische Bemerkungen und ständige Ermunterung seine tiefste Dankbarkeit ausdrücken.

Zur abstrakten Differentiationstheorie von Mengenfunktionen und Literaturangaben, siehe *H. Hahn-A. Rosenthal*, Set Functions, Albuquerque, New Mexiko, 1948, Chapter V. Weitere Literaturangaben in *Haupt-Pauc*, Sitz.Ber. Bayer. Ak. Wiss. 1950, S. 187—207.

[2]) C. R. Paris **201** (1935), S. 579; Journal Math. pures et app., IX s., **15** (1936), S. 391—409.

$\mathfrak{N}$: System der μ-Nullmengen N,
μ^*: vollständige Erweiterung von μ,
$\mathfrak{N}^*$: System der μ^*-Nullmengen N^*.

Da $\mathfrak{N}^*$ ein σ-Ideal im Booleschen σ-Ring aller Teilmengen von $\mathfrak{R}$ ist, benutzen wir die Bezeichnung $A = B \pmod{\mathfrak{N}^*}$ für zwei Mengen A und B in $\mathfrak{R}$ in dem Sinne: Die Stonesche Differenz $A - B$, d. h. die Diskrepanz $(A - A \cdot B) + (B - B \cdot A)$ gehört zu $\mathfrak{N}^*$. Und $A > B \pmod{\mathfrak{N}^*}$ heißt $B - B \cdot A \in \mathfrak{N}^*$. Jede $\mathfrak{N}^*$-Menge ist Teilmenge einer $\mathfrak{N}$-Menge. Unter „fast überall" verstehen wir „überall bis auf eine $\mathfrak{N}^*$-Menge".

$\mathfrak{N}^* \cdot A$: System der Mengen $N^* \cdot A$,
$\bar{\mu}$: μ entsprechendes, auf allen Teilmengen von $\mathfrak{R}$ erklärtes äußeres Maß,
$X^\times$: eine der Maßhüllen[3]) der Teilmenge X von $\mathfrak{R}$.

Eine *Ableitungsbasis* $\mathcal{B}$ wird folgendermaßen definiert: Den Punkten x einer Teilmenge E von $\mathfrak{R}$ sind Morse-Smithsche Folgen M_ι von $\mathfrak{M}$-Mengen positiven, endlichen Maßes zugeordnet, die *definitionsgemäß auf x konvergieren*. Es gilt das *Fréchetsche Konvergenzaxiom*: Jede (konfinale) Teilmenge einer auf x konvergierenden Folge konvergiert auch auf x. Das System $\mathcal{B}$ der punktierten konvergenten Folgen, d. h. der punktweise konvergierenden Folgen M_ι, je mit einem Konvergenzpunkt x versehen, in Zeichen $\langle M_\iota, x\rangle$, heißt *Ableitungsbasis* mit $E = D(\mathcal{B})$ als Definitionsbereich. Einer punktweise konvergierenden Folge dürfen mehrere Konvergenzpunkte entsprechen. Es wird nicht gefordert, daß $\lim \mu(M_\iota) = 0$ ist; es darf sogar $\lim \mu(M_\iota)$ unendlich sein. Es sei (E) das Axiom:

(E) Zu jeder x-konvergenten Folge existiert ein Index ι^* derart, daß

$$(\iota > \iota^*) \to (x \in M_\iota).$$

Gilt (E), so heißen die x-konvergenten Folgen auch *x-kontrahierende Folgen*. Wir nennen $\mathcal{B}$-Konstituenten diejenigen Mengen, die in den $\mathcal{B}$-Folgen vorkommen, und bezeichnen mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathcal{B})$ das System der $\mathcal{B}$-Konstituenten. Ein Teilsystem $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{B}$, für welches das obige Konvergenzaxiom gilt, heißt *Teilbasis von $\mathcal{B}$*. Der Definitionsbereich $E' = D(\mathcal{B}')$ ist die Menge der Punkte x, die mit x-konvergenten $\mathcal{B}'$-Folgen versehen sind.

1. 2. **Beispiele von Basen.** Wir betrachten zunächst zwei einfache Fälle.

1. 21. *Lineare Basen.* Die Grundmenge ist die Zahlengerade, μ ist das Lebesguesche Maß, die Moore-Smithschen Folgen sind gewöhnliche Folgen. Für jedes x in $\mathfrak{R}$ sind die x-konvergenten Folgen als Folgen von abgeschlossenen Intervallen $J_\iota = [\alpha_\iota, \beta_\iota]$ $(\beta_\iota > \alpha_\iota)$, durch eine der folgenden Forderungen definiert:

$(\mathcal{B}^1_{1'})$ x ist Mittelpunkt von $[\alpha_\iota, \beta_\iota]$, $\lim \alpha_\iota = \lim \beta_\iota = x$;
$(\mathcal{B}^1_{1''})$ ein Endpunkt von $[\alpha_\iota, \beta_\iota]$ fällt mit x zusammen, $\lim \alpha_\iota = \lim \beta_\iota = x$;
$(\mathcal{B}^1_2)$ $\alpha_\iota \leqq x \leqq \beta_\iota$, $\lim \alpha_\iota = \lim \beta_\iota = x$;
$(\mathcal{B}^1_3)$ $\lim \alpha_\iota = \lim \beta_\iota = x$.

1. 22. *Ebene Basen.* Die Grundmenge ist die kartesische euklidische Ebene, μ ist das Lebesguesche Maß, die Moore-Smithschen Folgen sind gewöhnliche Folgen. Für jedes x sind die x-konvergenten Folgen folgendermaßen erklärt:

$(\mathcal{B}^2_{1'})$ Folgen von abgeschlossenen Quadraten Q_ι, mit zur x-Achse bzw. y-Achse parallelen Seiten und x als Mittelpunkt von Q_ι und $\lim \mu(Q_\iota) = 0$;

$(\mathcal{B}^2_{1''})$ Folgen von abgeschlossenen Kreisscheiben K_ι mit x als Mittelpunkt von K_ι und $\lim$ (K_ι-Radius) $= 0$;

$(\mathcal{B}^2_2)$ Folgen von abgeschlossenen Intervallen (d. h. achsenparallelen Rechtecken) J_ι, die x enthalten und deren Seiten gegen 0 konvergieren.

---

[3]) *Hahn-Rosenthal*, loc. cit. [1]), S. 68.

1. 23. *Morsesche Basen.* Die eben angeführten Basen sind Spezialfälle der Morseschen Basen, die wir jetzt definieren: $\mathfrak{R}$ ist ein metrischer Raum, $\delta(X)$ bezeichnet den Durchmesser der Teilmenge X von $\mathfrak{R}$. Jedem Punkt einer Teilmenge E^0 von $\mathfrak{R}$ ist ein System $\mathfrak{F}(x)$ von Borelschen Mengen mit

$$\inf \delta(M + \{x\}) = 0 \quad \text{für} \quad M \in \mathfrak{F}(x)$$

zugeordnet. $\mathfrak{F}$ heißt „blanket"[4]), auf deutsch „Bedeckung". Eine Morsesche Bedeckung wird zu einer Ableitungsbasis durch Zugrundelegung eines Radon-Maßes μ, Tilgung der Konstituenten M mit $\mu(M) = 0$ und folgende Verabredung: Die x-konvergenten Folgen sind gewöhnliche Folgen von Mengen des reduzierten Systems mit $\lim \delta(M_i + \{x\}) = 0$. Der Definitionsbereich E der so entstehenden Basis braucht nicht mit E^0 übereinzustimmen. Unter Morses weiteren Voraussetzungen gilt $E = E^0 \pmod{\mathfrak{N}^*}$. Ein für uns wesentlicher Charakter der Morseschen Basen ist das *Vorhandensein einer Metrik in* $\mathfrak{R}$ und die *Erklärung des Konvergenzprozesses mittels dieser Metrik.*

Allgemein verstehen wir unter *metrischer* bzw. *topologischer Ableitungsbasis* eine Ableitungsbasis, in welcher der Konvergenzprozeß mit Hilfe einer Metrik bzw. Topologie erklärt wird. Im Verlaufe des x-Konvergenzprozesses sind die Konstituenten in *metrisch kleinen* bzw. *topologisch kleinen* Umgebungen von x enthalten.

1. 24. *Streifenbasis* $\mathfrak{S}$. Als Gegenstück zu den topologischen Basen bringen wir nun das einfache Beispiel der *Streifenbasis* $\mathfrak{S}$[5]): $\mathfrak{R}$ = Quadrat $[0, 0; 1, 1]$, μ = Lebesguesches Maß. Die x-konvergenten Folgen sind gewöhnliche Folgen M_i von Intervallen $[\alpha_i, 0; \beta_i, 1]$ mit $\alpha_i < \beta_i$, $\alpha_i \leqq$ Abszisse von $x \leqq \beta_i$, $\lim \alpha_i = \lim \beta_i =$ Abszisse von x. Die x-kontrahierenden Intervalle werden *maßklein, nicht aber metrisch klein.*

1. 25. *U-Basen.* Die Basen $\mathfrak{B}_3^1$, $\mathfrak{B}_2^2$ und $\mathfrak{S}$ gehören alle zu den U-Basen, die folgendermaßen definiert sind: Es liegen eine mit einem Grundmaß μ versehene Grundmenge $\mathfrak{R}$, ein System $\mathfrak{S}$ von μ-meßbaren Mengen endlichen positiven Maßes und eine positive (endliche) numerische Funktion δ mit $\mathfrak{S}$ als Definitionsbereich vor. Eine x-konvergente Folge wird als eine Folge von $\mathfrak{S}$-Mengen M_i definiert, mit $x \in M_i$, $i = 1, 2, \ldots$, und $\lim \delta(M_i) = 0$. Die dadurch entstehende Basis nennen wir *U-Basis* und bezeichnen sie mit $[\mathfrak{S}, \delta]$. *Die Funktion δ fassen wir als den numerischen Index uniformer Kontraktion* auf. In $\mathfrak{B}_3^1$ und $\mathfrak{B}_2^2$ kann man als δ den Durchmesser wählen, in $\mathfrak{S}$ das Maß. Bemerkenswert bei einer U-Basis ist die Bestimmung durch das bloße System $\mathfrak{S}$ der Konstituenten, wenn nur die Funktion δ festgelegt ist. Jedes Teilsystem $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ bestimmt also eine Teilbasis $[\mathfrak{T}, \delta]$, die allgemeine U-Teilbasis von $[\mathfrak{S}, \delta]$. Eine ähnliche Situation begegnet uns in der allgemeinen Topologie. Ein Fréchetscher Raum wird durch die Angabe eines Umgebungssystems in jedem Punkt erklärt, „Umgebung" heißt dabei „punktierte Umgebung" in Zeichen U^x[6]) oder „Fréchetsche Umgebung". Um aber eine topologische Struktur im Sinne von Bourbaki zu definieren, können wir einfacher eine globale Basis von Umgebungen $\mathfrak{U}$ im Sinne von Hausdorff angeben.

1. 26. *Konkrete Basis mit nicht gewöhnlichen Folgen.* Für das erste veröffentlichte Beispiel einer Ableitungsbasis mit nicht gewöhnlichen punktweise konvergenten Folgen verweisen wir auf Dieudonné[7]).

---

[4]) *A. P. Morse*, Trans. Am. Math. Soc. **55** (1944), S. 213.

[5]) *C. Pauc*, C. R. Paris, **232** (1951), S. 13. Dieses Beispiel diente dem Verfasser als Wegweiser und Prüfstein für die folgende Theorie.

[6]) Die Bezeichnungen „U^x" und „U-Basis" stammen von Herrn O. Haupt her. Siehe: *Haupt-Pauc*, Über Meßbarkeitsbasen, Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss. 1953, § 3 (in Vorbereitung).

[7]) Fund. Math. **37** (1950), S. 247.

1. 3. $\mathcal{B}$-Derivierte oder $\mathcal{B}$-Ableitung. Wir kommen auf eine allgemeine Basis $\mathcal{B}$ zurück. Φ bezeichnet eine numerische endliche Funktion mit $\mathfrak{S}$ als Definitionsbereich. In jedem Punkte x von E werden die obere bzw. untere Derivierte oder Ableitung $\overline{D\Phi}(x)$ bzw. $\underline{D\Phi}(x)$ als lim sup bzw. lim inf $\Phi(M_\iota)/\mu(M_\iota)$ erklärt, wobei sich der Grenzübergang auf *alle* x-konvergenten Folgen bezieht. Genauer ist $\overline{D\Phi}(x)$ das Supremum der lim sup $\Phi(M_\iota)/\mu(M_\iota)$ für alle x-konvergenten Folgen, $\underline{D\Phi}(x)$ das Infimum der lim inf $\Phi(M_\iota)/\mu(M_\iota)$ für alle x-konvergenten Folgen. Dabei sind für die Derivierten die Werte $+\infty$ und $-\infty$ zugelassen. Gilt $\overline{D\Phi}(x) = \underline{D\Phi}(x)$, so heißt der gemeinsame Wert *Derivierte* oder *Ableitung* von Φ in x, in Zeichen $D\Phi(x)$.

Beispiele. Der Basis $\mathcal{B}^1_{1''}$ entspricht im Falle $\Phi(J) = f(v) - f(u)$, $J = [u, v]$ der elementare Ableitungsbegriff. $\mathcal{B}^1_2$ liefert eine äquivalente Definition, nicht aber im Falle einer allgemeinen Intervallfunktion. Der $\mathcal{B}^1_3$-Ableitung für $\Phi(J) = f(v) - f(u)$ entspricht geometrisch die scharfe Tangente. Die $\mathcal{B}^2_2$-Ableitung ist die „strong derivative" bei Saks[8]).

Die angeführten Beispiele legen den Vergleich von Ableitungsbasen nahe und in dieser Hinsicht haben wir die untere Numerierung dementsprechend gewählt. Anschaulich ausgedrückt: Je reicher die Ableitungsbasis in x ist, desto mehr fordert die Existenz der Ableitung in x. $\mathcal{B}$ heißt in x *reicher* oder *feiner* als $\mathcal{B}'$, in Zeichen $\mathcal{B}_x > \mathcal{B}'_x$, wenn zu jeder x-konvergenten $\mathcal{B}'$-Folge eine (konfinale) Teilfolge in $\mathcal{B}$ vorhanden ist. Existiert die $\mathcal{B}$-Ableitung in x, dann auch die $\mathcal{B}'$-Ableitung, aber nicht umgekehrt, wie aus den angeführten Beispielen hervorgeht. Gilt $\mathcal{B}_x > \mathcal{B}'_x$ für jedes x in E, so heißt $\mathcal{B}$ *schlechthin feiner* als $\mathcal{B}'$ und wir schreiben $\mathcal{B} > \mathcal{B}'$.

2. Die durch eine (de Posselsche) Ableitungsbasis induzierte Prätopologie.

2. 1. Maßfreie Begriffe. In den meisten Arbeiten über abstrakte Differentiationstheorie von Mengenfunktionen wird $\mathcal{R}$ euklidisch oder wenigstens topologisch angenommen (vgl. 1. 23). De Possel war der erste, der eine Ableitungsbasis unabhängig von einer zugrundeliegenden Topologie aufgefaßt hat. Bei ihm ist der *Konvergenzprozeß* nicht von einer Topologie abgeleitet, sondern als *undefiniert* oder *primär* vorangestellt.

Der *Leitgedanke* in der vorliegenden Arbeit läßt sich formulieren wie folgt: Durch eine Ableitungsbasis können wir Begriffe einführen, die den üblichen topologischen Begriffen sehr ähnlich sind und die letzteren ersetzen können. *Die fehlende Topologie kann durch eine sogenannte „Prätopologie" vertreten werden*[9]). Wir übernehmen Bezeichnungen und Begriffe aus 1. 1.

2. 11. *Äußere Begriffsbildungen.* x heißt *total innerer*[10]) Punkt der Teilmenge X von $\mathcal{R}$, wenn zu *jeder* x-konvergenten Folge M_ι ein Index ι' existiert derart, daß

$$(\iota > \iota') \to (M_\iota < X)$$

ist, oder (äquivalente Definition), wenn *jede* x-konvergente Folge eine (konfinale) Teilfolge enthält, deren Konstituenten in X liegen.

Die Menge der *totalinneren* Punkte von X heißt das *T-Innere* von X, in Zeichen $I(X)$.

x heißt *partiell innerer*[10]) Punkt von X, wenn *eine* x-konvergente Folge existiert, deren Konstituenten in X liegen.

Die Menge der partiell inneren Punkte von X heißt das *P-Innere* von X, in Zeichen $\underline{X}$.

Beispiel. $\mathcal{B} = \mathcal{B}^2_2$, X = abgeschlossenes Intervall, dann gilt

$$I(X) = \text{euklidisches Innere}, \quad \underline{X} = X;$$

---

[8]) Theory of the Integral, Warszawa-Lwow, 1937, S. 106.

[9]) Seit der Ausarbeitung der prätopologischen Begriffe hat Herr O. Haupt diesen Standpunkt immer empfohlen.

[10]) *C. Pauc*, C. R. Paris **231** (1950), S. 1406. Die von A. P. Morse (loc. cit. [4]), S. 217) mit $F \cdot \alpha$ bezeichnete Menge ist das T-Innere von α.

oder Y = abgeschlossene Kreisscheibe, dann gilt

$$I(X) = \underline{X} = \text{euklidisches Innere.}$$

Dualistisch definieren wir die *T-Hülle* $F(X)$ als die Menge der Punkte x derart, daß (wenigstens) *eine* x-konvergente Folge existiert, deren sämtliche Konstituenten mit X einen nichtleeren Durchschnitt haben, und die *P-Hülle* $\overline{X}$ als die Menge der Punkte x derart, daß *jede* x-konvergente Folge eine Teilfolge enthält, deren sämtliche Konstituenten mit X einen nichtleeren Durchschnitt haben.

$I(X)$, $\underline{X}$, $F(X)$ und $\overline{X}$ sind Teilmengen von E. Es gelten folgende Relationen:

$$I(X) < \underline{X}, \quad F(X) > \overline{X}, \quad F(\emptyset) = \overline{\emptyset} = \emptyset$$

($<$ bedeutet Inklusion, Gleichheit *nicht* ausgeschlossen, $\emptyset$ = leere Teilmenge von R),

$$I(X \cdot Y) = I(X) \cdot I(Y), \quad F(X \cup Y) = F(X) \cup F(Y),$$

$$\underline{X \cdot Y} < \underline{X} \cdot \underline{Y}, \qquad \overline{X \cup Y} > \overline{X} \cup \overline{Y},$$

$$E - F(X) = I(R - X), \quad E - I(X) = F(R - X),$$

$$E - \overline{X} = \underline{R - X}, \qquad E - \underline{X} = \overline{R - X}.$$

Liegt der Punkt x in schließlich allen Konstituenten jeder x-konvergenten Folge (Axiom (E)), so gelten:

$$I(X) < X, \quad \underline{X} < X, \quad F(X) > X, \quad \overline{X} > X^{11}).$$

Der Mengenoperator F erfüllt also drei der Kuratowskischen Axiome für eine Topologie, der Operator $\overline{}$ zwei. Jeder definiert eine Topologie im Sinne von Nöbeling[12]), die wir die T- bzw. P-Nöbelingsche Topologie nennen.

Die Spaltung zwischen T- und P-Begriffe läßt sich auf das Fehlen eines Durchschnittsaxiomes für die Konstituenten einer punktweise konvergenten Folge zurückführen. Im folgenden werden nur die T-Begriffe Verwendung finden.

$$X \text{ heißt } \left\{\begin{array}{ll} \text{auf } E\ T\text{-abgeschlossen,} & \text{wenn } E \cdot X > F(X) \\ T\text{-abgeschlossen,} & \text{wenn } X = F(X) \\ \text{auf } E\ T\text{-offen,} & \text{wenn } E \cdot X < I(X) \end{array}\right\} \text{ gilt.}$$

Es sei nur erwähnt, daß der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler T-offenen Mengen wiederum T-offen ist.

Unter *$\mathfrak{B}$-feiner Überdeckung* einer Menge $X < E$ *im strengen Sinne* verstehen wir ein Teilsystem $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{S}$ derart, daß es zu *jedem* Punkt x von X eine x-konvergente Folge gibt, deren Konstituenten $\mathfrak{V}$ angehören.

Äquivalente Definition: $\mathfrak{V}$ ist das System der Konstituenten einer Teilbasis von $\mathfrak{B}$, deren Bereich $> X$ ist.

2. 12. *Innere Begriffsbildungen. Relativisierung.* Wenn wir die Folgen M_ι durch die Folgen $M_\iota \cdot E$ ersetzen, so definieren wir die in bezug auf E *relative Prätopologie.* Die T-abgeschlossenen Mengen in der relativen Prätopologie stimmen mit den schlechthin T-abgeschlossenen Mengen überein. Die relativ T-offenen Mengen sind die E-Spuren der auf E T-offenen Mengen.

---

[11]) Herr G. Nöbeling hat mit Recht gegen die Benennungen „T- bzw. P-Hülle (Inneres)" den Einwand erhoben, daß die eben angeführten, erwarteten Beziehungen im allgemeinen Fall nicht zu gelten brauchen. Aus Mangel an Besserem sind wir in dieser Arbeit bei der kritisierten Terminologie geblieben, insbesondere um den Anschluß an die „orthodoxe" — wir meinen — „Kuratowskische" Topologie aufrechtzuerhalten.

[12]) Sitz.Ber. Bayer. Ak. Wiss. 1950, S. 131. Es ist erstaunlich, wie es Herrn G. Nöbeling geglückt ist, unter Annahme der Axiome $X < \overline{X}$ und $(X' < X'') \to (\overline{X'} < \overline{X''})$, die übliche Kuratowskische Theorie zu übertragen. Eine ausführliche Darstellung soll unter dem Titel „Analytische Topologie" voraussichtlich 1953 erscheinen.

2. 2. Vom Maße abhängige Begriffe. In den folgenden Definitionen wird das Maß herangezogen, genauer das System $\mathfrak{N}$ der μ-Nullmengen und das davon abgeleitete System $\mathfrak{N}^*$. Es bedeute

$\mathcal{B}$-feine Überdeckung $\mathfrak{V}$ einer Menge X: Fast überall auf X gibt es (mindestens) *eine* x-konvergente Folge, deren Konstituenten $\mathfrak{V}$ angehören. Äquivalente Definition: $\mathfrak{V}$ ist das System der Konstituenten einer Teilbasis von $\mathcal{B}$, deren Bereich $> X$ (mod $\mathfrak{N}^*$) ist.

Volle $\mathcal{B}$-feine Überdeckung $\mathfrak{W}$ einer Menge X: Fast überall auf X enthält *jede* x-konvergente Folge eine (konfinale) Teilfolge, deren Konstituenten $\mathfrak{W}$ angehören.

Aussagen: Der Durchschnitt zweier vollen $\mathcal{B}$-feinen Überdeckungen ist auch eine volle $\mathcal{B}$-feine Überdeckung, kurz $\mathfrak{W}' \cdot \mathfrak{W}'' = \mathfrak{W}$. Es gilt $\mathfrak{V}' \cdot \mathfrak{W} = \mathfrak{V}$, aber $\mathfrak{V}' \cdot \mathfrak{V}''$ braucht nicht ein $\mathfrak{V}$ zu sein.

Außen $\mathcal{D}$-offene Menge G: $E \cdot G < I(G)$ (mod $\mathfrak{N}$),
außen $\mathcal{D}$-abgeschlossene Menge A: $E \cdot A > F(A)$ (mod $\mathfrak{N}$),
innen $\mathcal{D}$-offene Menge O: Durchschnitt von E mit einer Menge G,
innen $\mathcal{D}$-abgeschlossene Menge C: Durchschnitt von E mit einer Menge A.

Die Bezeichnungen G, A, O und C werden wir bald generell, bald individuell benutzen. Die entsprechenden Mengensysteme bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{C}$.

$\mathcal{D}$ weist auf Denjoy (siehe Fußnote [1])) hin, der, im speziellen Falle seiner Basen, $\mathfrak{O}$- und $\mathfrak{C}$-Mengen unter den Namen „ensembles-enveloppes" und „ensembles-noyaux" betrachtet und mit deren Hilfe den klassischen Einschließungsprozeß der Lebesguemeßbaren Mengen durch offene Obermengen und abgeschlossene Teilmengen übertragen hat.

$\mathfrak{G}$ ist ein σ, d-System, definiert also nach Nikodym[13]) eine *Pseudotopologie*, die wir *äußere Pseudotopologie* nennen. Ebenso ist $\mathfrak{O}$ ein σ, d-System, das die *innere Pseudotopologie* definiert.

Eine $\mathfrak{G}$-Menge bleibt bei Hinzufügung einer μ-Nullmenge eine $\mathfrak{G}$-Menge. Entsprechendes gilt für eine $\mathfrak{O}$-Menge, wenn die $\mathfrak{N}$-Menge in E liegt.

Eine $\mathfrak{A}$-Menge bleibt bei Wegnahme einer μ-Nullmenge eine $\mathfrak{A}$-Menge. Entsprechendes gilt für die $\mathfrak{C}$-Mengen.

Die Haupteigenschaften der $\mathfrak{G}$-Mengen im Hinblick auf unsere Untersuchung sind:

(1) Das System der in G enthaltenen $\mathcal{B}$-Konstituenten ist eine volle $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von $G \cdot E$.

(2) *Für jede $\mathcal{B}$-feine Überdeckung $\mathfrak{V}$ von $G \cdot E$ überdecken die in G enthaltenen $\mathfrak{V}$-Konstituenten noch $G \cdot E$ $\mathcal{B}$-fein.*

Die Eigenschaften (1) und (2) kennzeichnen die $\mathfrak{G}$-Mengen, wenn μ vollständig ist, also für $\mu = \mu^*$.

Äquivalente Definitionen für die $\mathfrak{C}$-Mengen:

$$C < E, \quad C > F(C) \text{ (mod } \mathfrak{N}) \quad \text{oder} \quad C = E - O.$$

Haupteigenschaften der $\mathfrak{C}$-Mengen:

(1) $C < E$ und das System der zu C fremden $\mathcal{B}$-Konstituenten ist eine volle $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von $E - C$.

(2) *Für jede $\mathcal{B}$-feine Überdeckung $\mathfrak{V}$ von $E - C$ überdecken die zu C fremden $\mathfrak{V}$-Konstituenten $E - C$ $\mathcal{B}$-fein.*

---

[13]) C. R. Paris **229** (1949) S. 16, 169, 288 und 863. Derselbe Begriff in *A. D. Alexandroff*, Rec. Math. **8** (50), Nr. 2 (1940), S. 314.

3. Starke Vitali-Eigenschaften und Halobildungen nach dem Muster von A. P. Morse.

3. 1. Einleitende Betrachtungen. Das Hauptziel der gegenwärtigen abstrakten Differentiationstheorie von Mengenfunktionen besteht darin, *Bedingungen für die Basis $\mathcal{B}$* aufzufinden, die die Existenz der $\mathcal{B}$-Ableitung der Funktion Φ fast überall gewährleisten, wenn Φ einer *bestimmten Klasse von Funktionen* angehört, und die Beziehung der $\mathcal{B}$-Ableitung zu Φ zu untersuchen. Beispiele: Φ ist eine (eventuell unendliche) σ-additive Funktion mit $\mathfrak{M}$ als Definitionsbereich; Φ ist ein μ-Integral im weiteren Sinne[14]) oder ein μ-Integral im engeren Sinne[14]) (μ-Integral einer L-Funktion); Φ ist μ-Integral einer L^p-Funktion; Φ ist μ-Integral einer M-Funktion; Φ ist ein topologisches μ-Integral[15]).

Es ist klar, daß je umfassender die vorgeschriebene Klasse von Funktionen ist, desto stärker die an $\mathcal{B}$ zu stellenden Forderungen sind. Es seien zwei extreme Beispiele angeführt:

(I) $\mathcal{R} = E^1$ (Zahlengerade), μ = Lebesguesches Maß, f = über jedem (endlichen) Intervall beschränkte Riemann-integrierbare Funktion, $\Phi(M) = \int_M f \cdot d\mu$ für beschränktes M. Lassen wir als x-konvergente Folgen jede Folge M_i von beschränkten $\mathfrak{M}$-Mengen mit $\lim \delta(M_i + \{x\}) = 0$ zu, so existiert $D\Phi$ fast überall und ist $= f \pmod{\mathfrak{N}}$.

(II) $\mathcal{R} = E^2$ (Ebene), μ und Φ sind irgendwelche Radon-Maße. Die x-konvergenten Folgen bestehen aus Kreisscheiben mit x als Zentrum, deren Radien gegen Null streben. Nach Besicovitch[16]) existiert $D\Phi$, ausgenommen in den Punkten einer μ-Nullmenge, und ist gleich einem Radon-Nikodymschen μ-Integranden von Φ.

Zur Existenz mod $\mathfrak{N}^*$ der Ableitung in den oben angeführten Beispielen fordert man von der Basis Eigenschaften vom Vitali-Typ.

3. 2. Eigenschaften vom starken Vitali-Typ. Bekanntlich bedeutet

Starke Vitali-Eigenschaft (abgekürzt: S.V.) für eine Ableitungsbasis $\mathcal{B}$ und eine Teilmenge X von E: Zu *jeder* $\mathcal{B}$-feinen Überdeckung $\mathfrak{V}$ von X und jedem $\varepsilon > 0$, existieren $V_i \in \mathfrak{V}$ ($i = 1, 2, \ldots, p$ oder $1, 2, \ldots$) mit folgenden Eigenschaften:

(1, 1) $X < S \pmod{\mathfrak{N}^*}$, wobei $S = \cup V_i$ ist,

(1, 2) $\mu(S - S \cdot X^\times) < \varepsilon$,

(2) die V_i sind paarweise fremd.

Starke Vitalieigenschaft für eine Ableitungsbasis $\mathcal{B}$: Es gilt S.V. für $\mathcal{B}$ und *jedes* $X < E$.

(1, 1) ist eine 0-*Überdeckungseigenschaft*, (1, 2) eine *Approximationseigenschaft*. $\mu(S - S \cdot X^\times)$ nennen wir X-*Überdeckungsexzeß*; (1, 2) drückt die Möglichkeit aus, diesen Exzeß beliebig klein zu machen. (2) ist eine Überlappungseigenschaft[17]) in dem Sinne, daß die V_i nicht überlappen, im Gegensatz zu der schwachen Vitali-Eigenschaft[18]) oder den Vitali-Hayes-Eigenschaften[19]), bei denen kleine Überlappungen zugelassen werden.

Wenn wir (1, 2) weglassen, erhalten wir die *reduzierte starke Vitali-Eigenschaft* (abgekürzt: R.S.V.).

---

[14]) *Haupt-Aumann*, Integralrechnung, Walter de Gruyter, Berlin 1938, S. 81 und 60.

[15]) *C. Pauc*, C. R. Paris **230** (1950), S. 810.

[16]) Proc. Camb. Phil. Soc. **41** (1945), S. 103—110 und **42** (1946), S. 1—10.

[17]) *Haupt-Pauc*, loc. cit. [1]), S. 193.

[18]) *De Possel*, loc. cit. [2]), S. 404—405. *Haupt-Pauc*, loc. cit. [1]), S. 193. *Pauc*, **232** (1951), S. 1727.

[19]) *C. A. Hayes*, Pseudostrength properties, Proc. Camb. Phil. Soc. **11** (im Druck).

Als Hilfsmittel in den Beweisen definieren wir

die *scharfe R.S.V.*[20]), indem wir verlangen, daß in der Definition der R.S.V. irgendwelche endlich vielen, paarweise fremden *vorgeschriebenen* $\mathfrak{B}$-Mengen unter den V_i auftreten dürfen, und

die scharfe S.V., indem wir verlangen, daß in der Definition der S.V. irgendwelche endlich vielen, paarweise fremden *vorgeschriebenen* $\mathfrak{B}$-Mengen mit einer X-Überdeckungsexzeß $< \varepsilon$ unter den V_i auftreten dürfen.

3. 3. Halobildungen nach A. P. Morse[21]). Unter den Annahmen über $\mathcal{B}$, aus welchen S.V. oder R.S.V. folgen, treten die Haloeigenschaften besonders hervor. Wir bezeichnen mit Δ eine *Morsesche Hilfsfunktion* oder *Aussonderungsfunktion*, d. h. eine beliebige endliche, positive, auf $\mathfrak{S}$ definierte Funktion. Die Funktion Δ wird von vornherein nicht festgelegt. Gerade dieser Wahlmöglichkeit verdankt Morses Theorie ihre große Anwendungsfähigkeit[22]). In konkreten Beispielen bedeutet Δ den Durchmesser, das Maß, eine Potenz des Maßes. α bezeichnet eine *feste* Zahl $\geqq 1$, bei Morse ist $\alpha = 2$; aber solche Festlegung ist irrelevant, jede Zahl > 1 würde bei ihm dieselben Dienste leisten. Das *Morsesche Halo* $H(V_0)$ einer Konstituente, des sogenanntes *Kernes*, ist die Vereinigung aller Konstituenten V, die zu V_0 nicht fremd sind und für die $\Delta(V) \leqq \alpha \cdot \Delta(V_0)$ gilt. Die *Halodilatation* erklären wir als $\varrho(V_0) = \bar{\mu}(H(V_0))/\mu(V_0)$. Da $H(V_0) > V_0$ gilt, ist $\varrho(V_0) \geqq 1$. Dabei müssen wir die Abweichung vom üblichen Gebrauch des Wortes „Halo" berücksichtigen, nach welchem man $H(V_0) - V_0$ als Halo erwarten würde. Um der einfacheren Bezeichnungen willen nehmen wir diese Abweichung in Kauf. Man beachte, daß die Halodefinition nur $\mathfrak{S}$ und Δ verwendet; sie nimmt auf den Konvergenzbegriff in $\mathcal{B}$ und auf das Maß keinen Bezug.

Beispiele. (I) $\mathfrak{S}$ = System der abgeschlossenen Quadrate Q in E^2, $\Delta(Q)$ = Durchmesser von Q, $\alpha = 1$; das Halo von Q_0 mit Zentrum x und Seite s_0 ist ein konzentrisches abgeschlossenes Quadrat mit der Seite $3s_0$, $\varrho(Q_0) = 3^2 = 9$.

(II) Ähnliches mit Kreisscheiben.

(III) $\mathfrak{S}$ = System der abgeschlossenen Intervalle J in E^2, $\Delta(J)$ = Maß von J, $\alpha \geqq 1$; $H(J)$ ist eine kreuzartige Menge, die sich in den Achsenrichtungen ins Unendliche dehnt, $\varrho(J) = \infty$.

(IV) $\mathfrak{S}$ = System der abgeschlossenen Intervalle J in E^2, $\Delta(J)$ = Durchmesser von J, $\alpha \geqq 1$; diesmal ist $\varrho(J)$ endlich. Elementargeometrische Betrachtungen ergeben, daß $\varrho(J)$ über $\mathfrak{S}$ nicht beschränkt ist[23]).

In den folgenden Abschnitten setzen wir globale Beschränktheit, später punktale[24]) Endlichkeit von Δ und der Halodilatation voraus.

---

[20]) „Vitali property" bei *A. P. Morse*, loc. cit.[4]), S. 212. Bezüglich dieser Eigenschaft siehe den interessanten Satz in *A. P. Morse*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), S. 426, §§ 3. 4.

[21]) *A. P. Morse*, loc. cit. [4]), S. 207—208, §§ 2. 8.

[22]) Vgl. *A. P. Morse*, loc. cit. [4]), S. 215, §§ 7. 2. und S. 229, Def. von Δ^*; *C. A. Hayes-A. P. Morse*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), S. 727. In „Perfect Blankets" (Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), S. 418—442) verwendet Morse eine andere Technik, die er im Anschluß an Besicovitch (loc. cit. [16])) entwickelte.

[23]) Tatsächlich ist die Intervallbasis eine schwache, nicht aber starke Ableitungsbasis (*H. Busemann-W. Feller*, Fund. Math. **22** (1934), S. 226—256, insbesondere S. 229). Kürzlich (loc. cit. [19])) hat Hayes ein Beispiel für eine schwache Ableitungsbasis gegeben, die nicht stark ist. Die Konstituenten sind Würfel mit kleinen Trabanten. Die nicht beschränkte Funktion, deren Integral sich nicht differenzieren läßt, nimmt nur positive ganzzahlige Werte an.

[24]) *Haupt-Aumann-Pauc*, Differential- und Integralrechnung **1**, Walter de Gruyter, Berlin 1948, S. 210.

4. Abstrakte Auffassung des Vitali-Satzes nach Banachschem Muster.

Hierbei bezieht sich die Bezeichnung „abstrakt" auf die Abschaffung des metrischen Hintergrunds.

4. 1. Einleitende Betrachtungen. Wir werden A. P. Morse folgen, doch mit einem wesentlichen Unterschied, den wir schon hervorgehoben haben. Bei Morse liegt ein metrischer Raum vor, die punktweise Zusammenziehung wird mittels der Metrik definiert. *Es wird die R.S.V. bewiesen. Tatsächlich folgt bei Morse die S.V. aus der R.S.V.* Wir können nämlich der Menge X mit $\mu(X) < \infty$ eine offene Menge G zuordnen, derart, daß

$$X \subset G \text{ und } \mu(G) < \bar{\mu}(X) + \varepsilon \qquad (\varepsilon\text{-Einschließbarkeit})$$

ist, und dann die $\mathfrak{B}$-Mengen tilgen, die in G nicht enthalten sind. Die übrig bleibenden $\mathfrak{B}$-Mengen bilden noch eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von X, und für jede Folge von solchen Mengen ist trivialerweise der Überdeckungsexzeß $< \varepsilon$. In dieser einfachen Betrachtung liegt der Grund, warum viele Autoren nur die R.S.V. im Auge haben, obgleich man beim Beweise des vollen Differentiationssatzes[2]) die (volle) S.V. benötigt.

Den geschilderten Prozeß der Tilgung der $\mathfrak{B}$-Konstituenten, die über G hinaus reichen, nennen wir $\mathfrak{G}$-*Tilgungsprozeß*. Die Möglichkeit, dadurch den Überdeckungsexzeß beliebig klein zu machen, beruht auf der ε-Einschließbarkeitseigenschaft der offenen Mengen, mit anderen Worten, auf dem *zweiten Adaptionsaxiom*[25]) *zwischen Maß und Topologie.*

Wir kommen jetzt auf den in **1. 1** festgelegten Rahmen zurück. In **4. 2** und **4. 4** wird außerdem (E) gefordert: *Schließlich alle Konstituenten jeder x-konvergenten Folge enthalten x.*

4. 2. Der spezielle $\mathcal{B}$-Vitali-Satz. In **4. 2**, **4. 3** und **4. 4** handelt es sich um eine topologiefreie Übertragung von Morse, genauer um eine Übertragung, in welcher die Prätopologie die Rolle der fehlenden Topologie übernimmt.

Satz I. *Voraussetzungen. X ist eine Teilmenge von E, die in einer $\mathfrak{G}$-Menge G von endlichem äußeren Maße enthalten ist. $\mathfrak{B}$ ist eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von X, deren Konstituenten $\mathfrak{A}$-Mengen sind. (Gleichmäßige Beschränktheit von Δ und der Halodilatation, abgekürzt: GH_α.) Es existiert eine beschränkte Δ-Funktion, ein $\alpha > 1$ und ein (endliches) λ derart, daß $\varrho(V) < \lambda$ auf $\mathfrak{B}$ ist.*

Behauptung. $\mathfrak{B}$ enthält ein abzählbares System von paarweise fremden Mengen, die X (mod $\mathfrak{N}^*$) überdecken.

Beweis[26]). 1. Schritt. Durch den $\mathfrak{G}$-Tilgungsprozeß bewirken wir die Inklusion $\bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V \subset G$, wobei wir die Bezeichnung $\mathfrak{B}$ für das verringerte System beibehalten, für welches alle Voraussetzungen gelten.

2. Schritt. Konstruktion einer ausgezeichneten Folge. Wir setzen Δ_1 = Supremum von Δ auf $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$, V_1 = irgendeine $\mathfrak{B}_1$-Menge, für welche $\Delta(V_1) > \Delta_1/\alpha$ gilt.

Aufsaugende Wirkung des Halokernes: Jede $\mathfrak{B}$-Menge, die mit V_1 einen nichtleeren Durchschnitt hat, wird von $H(V_1)$ aufgesogen.

Wir setzen dann V_2 = System der $\mathfrak{B}$-Mengen, die V_1 nicht treffen, Δ_2 = Supremum von Δ auf $\mathfrak{B}_2$, V_2 = irgendeine $\mathfrak{B}_2$-Menge, für welche $\Delta(V_2) > \Delta_2/\alpha$ gilt.

Transfinites induktives Gesetz: Wir nehmen an, daß $\mathfrak{B}_\gamma$ für $\gamma < \lambda$ schon definiert ist. Wir setzen $\mathfrak{B}_\lambda$ = System der $\mathfrak{B}$-Mengen, die kein V_γ treffen, vorausgesetzt, daß es solche

---

[25]) *Haupt-Pauc*, C. R. Paris **230** (1950), S. 711.

[26]) Die somatische Fassung von Satz I samt Beweis findet sich in *Haupt-Pauc*, Halobedingungen und Vitalische Eigenschaft von Somensystemen, Sitz.Ber. Bayer. Ak. Wiss. 1953.

Mengen gibt. Falls es keine gibt, bricht der Prozeß für λ ab. Δ_λ = Supremum von Δ auf $\mathfrak{B}_\lambda$, V_λ = irgendeine $\mathfrak{B}_\lambda$-Menge, für welche $\Delta(V_\lambda) > \Delta_\lambda/\alpha$ gilt.

Indem wir nur die Beschränktheit von Δ heranziehen, erzeugen wir ein System in transfiniter Folge V_λ ($\lambda < \lambda_0$) mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die V_λ sind paarweise fremd.

(2) Zu jeder $\mathfrak{B}$-Menge existiert (wenigstens) ein V_λ derart, daß $V \cdot V_\lambda$ nicht leer und $V < H(V_\lambda)$ ist.

Korollar: $\bigcup H(V_\lambda) > X \pmod{\mathfrak{N}^*}$.

3. Schritt. Wir ziehen (E) und die Voraussetzung heran, daß die $\mathfrak{B}$-Mengen $\mathfrak{A}$-Mengen sind, und wollen zeigen, daß nach Tilgung endlich vieler V_λ, nämlich $W_1, \ldots, W_p$, die Inklusion

$$\bigcup{}' H(V_\lambda) > X - X \cdot \bigcup W_j \pmod{\mathfrak{N}^*}$$

gilt, wobei das $'$ neben $\bigcup$ auf die Tilgung hinweist.

Fast überall auf X existiert zu x eine x-konvergente Folge M_i, deren Konstituenten $\mathfrak{B}$ angehören und x enthalten. Da $W_1, \ldots, W_p$ $\mathfrak{A}$-Mengen sind, existiert fast überall auf $X' = X - X \cdot UW_j$ in x eine x-konvergente Folge M_i, deren Konstituenten x enthalten, $\mathfrak{B}$ angehören und zu $W_1, \ldots, W_p$ fremd sind. Es bezeichne V irgendeine dieser M_i. Zu V gibt es ein $V_{\lambda'}$ derart, daß $V \cdot V_{\lambda'} \neq \emptyset$ und $V < H(V_{\lambda'})$ gelten. Wegen der ersten Relation ist $V_{\lambda'} \neq W_j$ für $j = 1, \ldots, p$. Folglich ist V, also auch x, im Halo einer V_λ-Menge enthalten, nämlich $V_{\lambda'}$, die von allen W_j verschieden ist. Schließlich gilt

$$\bigcup{}' H(V_\lambda) > X' \pmod{\mathfrak{N}^*}.$$

Daraus folgt $\bigcup W_j \cup \bigcup{}' H(V_\lambda) > X \pmod{\mathfrak{N}^*}$, mit anderen Worten: Die Haloüberdeckungseigenschaft $\bigcup H(V_\lambda) > X \pmod{\mathfrak{N}^*}$ bleibt erhalten, wenn man endlich viele Halomengen $H(V_\lambda)$ durch die Kernmengen V_λ ersetzt.

4. Schritt. Indem wir die Meßbarkeit der $\mathfrak{B}$-Mengen, die Positivität ihrer Maße und die σ-Endlichkeit des Maßes berücksichtigen, dürfen wir behaupten: Die Folge V_λ ist eine gewöhnliche Folge.

5. Schritt. Umbenennung: V_i anstatt V_λ. Wir setzen

$$H_i = H(V_i), \quad S_i = V_1 + V_2 + \cdots + V_i, \quad \bar{\mu}(X - X \cdot S_i) = \varepsilon_i.$$

Es gilt

$$S_i \cup \bigcup_{j>i} H_j > X \pmod{\mathfrak{N}^*},$$

mithin

$$X - X \cdot S_i < \bigcup_{j>i} H_j \pmod{\mathfrak{N}^*},$$

folglich

$$\bar{\mu}(X - X \cdot S_i) \leqq \sum_{j>i} \bar{\mu}(H_j) < \lambda \cdot \sum_{j>i} \mu(V_j).$$

Da die V_j zueinander fremd sind, ist $\mu(\bigcup V_i) = \Sigma \mu(V_i)$.

Wegen $\bigcup V_i < G$, $\bar{\mu}(G) < \infty$, ist $\mu(\bigcup V_i)$ endlich, also die Reihe

$$\mu(V_1) + \mu(V_2) + \cdots$$

konvergent. Demnach strebt $\sum_{j>i} \mu(V_j)$ gegen Null für $i \to \infty$, also auch ε_i, d. h.

$$S = \bigcup V_i > X \pmod{\mathfrak{N}^*}.$$

Bemerkungen. Die Haloforderung bezieht sich auf das System $\mathfrak{B}$, nicht auf $\mathcal{B}$.

Daß die erste Voraussetzung des Satzes nicht entbehrt werden kann, zeigt ein Beispiel von Denjoy[27]).

[27]) Amer. Journ. Math. 73 (1951), S. 334.

Folgendes Beispiel erläutert die Rolle der Annahme (E): $\mathcal{B} = \mathcal{B}_3^1$, $X =$ Cantorsches Diskontinuum positiven Maßes, $\mathfrak{V} =$ System der zu X fremden abgeschlossenen Intervalle. $\mathfrak{V}$ ist eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von X, doch läßt sich kein einziger Punkt von X durch eine $\mathfrak{V}$-Menge überdecken.

Zusatz. Unter den Voraussetzungen des speziellen $\mathcal{B}$-Vitali-Satzes kann man die Behauptung verschärfen. Sind nämlich $W_1, \ldots, W_p$ paarweise fremde $\mathfrak{V}$-Mengen, so läßt sich immer erreichen, daß das ausgesonderte abzählbare System $\{V_i\}$ die Mengen $W_1, \ldots, W_p$ enthält. Es gilt also die *scharfe R.S.V. für* $\mathfrak{V}$ *und* X[28]). Der einfache Beweis dafür verläuft nach klassischem Muster, indem die $\mathfrak{A}$-Mengen die Rolle der topologisch abgeschlossenen Mengen übernehmen.

4. 3. Eine σ-Invarianzeigenschaft der scharfen R. S.V. in bezug auf ein System von meßbaren Mengen[29]). Wir wollen zeigen:

Voraussetzungen. Y ist eine Teilmenge von E, $Y = \lim Y_l \pmod{\mathfrak{N}^*}$, $l = 1, 2, \ldots$, die Y_l bilden eine nicht abnehmende Folge und jede hat endliches äußeres Maß. $\mathfrak{V}$ ist ein System von μ-meßbaren Mengen. Es gilt die scharfe R.S.V. für $\mathfrak{V}$ und jedes Y_l.

Behauptung. Es gilt die scharfe R.S.V. für $\mathfrak{V}$ und Y.

Beweis. $W_1, \ldots, W_p$ seien vorgeschriebene paarweise fremde $\mathfrak{V}$-Mengen; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l, \ldots$ sei eine abnehmende Nullfolge von positiven Zahlen; $V_1^1, V_1^2, \ldots, V_1^i, \ldots$ sei Überdeckungsfolge für Y_1 aus $\mathfrak{V}$ mit

$$V_1^1 = W_1,\ V_1^2 = W_2, \ldots, V_1^p = W_p.$$

Wir setzen $S_1^i = \bigcup_{i' \leq i} V_1^{i'}$ und wählen $p_1 > p$ derart, daß

$$\mu(Y_1^\times - S_1^{p_1} \cdot Y_1^\times) < \varepsilon_1,$$

was auf Grund der Endlichkeit von $\bar{\mu}(Y_1)$ möglich ist.

Wir wenden die verschärfte R.S.V. auf $\mathfrak{V}$ und Y_2 an, mit $V_1^1, \ldots, V_1^{p_1}$ als vorgeschriebenen Konstituenten, und erhalten eine Folge $V_2^1, V_2^2, \ldots, V_2^i, \ldots$ mit

$$V_2^i = V_1^i \text{ für } i = 1, 2, \ldots, p_1 \text{ und } \bigcup V_2^i > Y_2 \pmod{\mathfrak{N}^*}.$$

Wir wählen $p_2 > p_1$ derart, daß

$$\mu(Y_2^\times - S_2^{p_2} \cdot Y_2^\times) < \varepsilon_2, \quad \text{wobei } S_2^i = \bigcup_{i' \leq i} V_2^{i'} \text{ ist,}$$

die Möglichkeit der Wahl folgt aus der Endlichkeit von $\bar{\mu}(Y_2)$.

Wir wollen zeigen, daß die Folge $V_1^1, \ldots, V_1^{p_1}, V_2^{p_1+1}, \ldots, V_2^{p_2}, \ldots$, deren Konstituenten paarweise fremd sind und die die vorgeschriebenen $W_1, \ldots, W_p$ enthält, die Menge $Y \pmod{\mathfrak{N}^*}$ überdeckt.

Es sei S die Vereinigung der Mengen der Folge.

Für $\nu \geqq n$ gilt $\mu(Y_\nu^\times - S_\nu^{p_\nu} \cdot Y_\nu^\times) < \varepsilon_n$, also erst recht

$$\mu(Y_\nu^\times - S \cdot Y_\nu^\times) < \varepsilon_n.$$

Die Folge $Y_\nu^\times - S \cdot Y_\nu^\times$ nimmt mod $\mathfrak{N}^*$ nicht ab und es gilt

$$Y^\times - S \cdot Y^\times = \lim (Y_\nu^\times - S \cdot Y_\nu^\times) \pmod{\mathfrak{N}^*},$$

folglich

$$\mu(Y^\times - S \cdot Y^\times) \leqq \varepsilon_n.$$

---

[28]) In Nr. 3. 2 haben wir die scharfe R. S. V. für eine Basis erklärt. „Scharfe R. S. V. für $\mathcal{B}$" heißt „scharfe R. S. V. für jede Teilmenge X von E und jede $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von X".

[29]) Unmittelbare Übertragung von *A. P. Morse*, loc. cit. [4]), S. 212.

Da diese Ungleichung für jedes n gilt, ergibt sich

$$\mu(Y^{\times} - S \cdot Y^{\times}) = 0$$

oder

$$S > Y \pmod{\mathfrak{N}^*}.$$

Bemerkung. Der vorangehende Satz nimmt auf $\mathcal{B}$ keinen Bezug, er ist rein somatisch[30]).

4. 4. Der allgemeine $\mathcal{B}$-Vitali-Satz. Es gilt

Satz II. *Voraussetzungen.* (*G*) *Jede Teilmenge von E vom endlichen Maß ist Teilmenge einer $\mathfrak{G}$-Menge von endlichem äußerem Maß.* (*A*) *Die Basiskonstituenten sind $\mathfrak{A}$-Mengen.* (*Punktuale Endlichkeit von Δ und der Halodilatation für ein $\alpha > 1$, abgekürzt: H_α.*) *Es existiert eine Δ-Funktion derart, daß fast überall auf E*

$$\limsup_{V \to x} (\Delta(V) + \varrho(V))$$

endlich ist; dabei bezieht sich der Grenzübergang auf x-kontrahierende Folgen von $\mathcal{B}$-Konstituenten.

Behauptung: Für jede Teilmenge X von E und jede $\mathcal{B}$-feine Überdeckung $\mathfrak{V}$ von X gibt es ein abzählbares System von paarweise fremden $\mathfrak{V}$-Mengen, das X (mod $\mathfrak{N}^*$) überdeckt.

Beweis. Wir setzen $E^{(n)}$ = Menge der Punkte x, in welchen

$$\limsup_{V \to x} (\Delta(V) + \varrho(V)) < n$$

ist, und $X^{(n)} = X \cdot E^{(n)}$. Es gilt $E = \lim E^{(n)} \pmod{\mathfrak{N}^*}$, $X = \lim X^{(n)} \pmod{\mathfrak{N}^*}$.

Jedes $X^{(n)}$ wird dann in abzählbare viele Teilmengen zerlegt, je von endlichem äußeren Maß. Dadurch gelangen wir zu einer Darstellung

$$X = \lim X_p \pmod{\mathfrak{N}^*}, \text{ mit } X_1 < X_2 < \ldots, \bar{\mu}(X_p) < \infty \text{ für } p = 1, 2, \ldots,$$
$$\limsup_{V \to x} (\Delta(V) + \varrho(V)) < \varkappa_p < \infty \text{ für } x \in X_p.$$

Wir führen eine X_p enthaltende $\mathfrak{G}$-Menge G_p von endlichem äußeren Maße ein und bezeichnen mit $\mathfrak{V}_p$ das System der in G_p liegenden $\mathfrak{V}$-Mengen V, die der Ungleichung $\Delta(V) + \varrho(V) < \varkappa_p$ genügen.

$\mathfrak{V}_p$ ist eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von X_p. Die Voraussetzungen des speziellen $\mathcal{B}$-Vitali-Satzes sind erfüllt. Es gilt also die scharfe R.S.V. für $\mathfrak{V}_p$ und X_p, also erst recht für $\mathfrak{V}$ und X_p. Nach 4. 3. gilt die scharfe R.S.V. für $\mathfrak{V}$ und X, daher die Behauptung.

4. 41. *Kommentar über den allgemeinen $\mathcal{B}$-Vitali-Satz.* Da die Behauptung eine Überdeckungseigenschaft mod $\mathfrak{N}^*$ ergibt, können wir in der Formulierung des Satzes $\mu = \mu^*$ annehmen. Das bedeutet eine eventuelle Abschwächung der Voraussetzung (*A*). Die Voraussetzung (*G*) bleibt inhaltlich dieselbe. Mit Rücksicht auf die Differentiation von (abzählbar) additiven, aber nicht notwendig μ-stetigen $\mathfrak{M}$-Funktionen (z. B. bei Morse, von allgemeinen Radon-Maßen) haben wir die Gleichheit von μ und μ^* nicht vorausgesetzt.

In den uns bekannten Anwendungen gelten $\lim \Delta(V) = 0$ und $\lim \mu(V) = 0$ für die punktweise konvergenten Folgen. (H_α) reduziert sich dann auf

$$\lim_{V \to x} \varrho(V) < \infty \text{ fast überall auf } E$$

und sichert die Maßevaneszenz des Halos, wenn sich der Kern auf einen Punkt zusammenzieht. Aus diesem Grunde haben wir in einer früheren Note[31]) für solche Fälle den Ausdruck „Haloevaneszenzbedingung" benutzt.

---

[30]) Weder Punkte noch punktweise Konvergenz werden herangezogen. Vgl. *Haupt-Pauc*, loc. cit. [1]) und [26]).

[31]) An dritter Stelle in Fußnote [18]) zitiert.

5. Abstrakte Auffassung des Vitalischen Satzes nach Carathéodoryschem Muster.

Der Rahmen der Untersuchung in diesem Abschnitt 5 ist der in 1. 1. zugrundegelegte. *Diesmal wird* (E) *aber nicht gefordert.*

In der Carathéodoryschen Auffassung ist eine „rohe" Vitali-Eigenschaft (L) postuliert, die an die Lindelöfsche Eigenschaft in der reinen Topologie erinnert. Durch Heranziehung der Abgeschlossenheit der Konstituenten und einer Haloeigenschaft wird eine ausgezeichnete Folge herausgearbeitet.

5. 1. Der spezielle $\mathfrak{C}$-Vitali-Satz. Es gilt

Satz III. *Voraussetzungen.* (A) *Die $\mathfrak{B}$-Konstituenten sind $\mathfrak{A}$-Mengen.* (L) *Ist $\mathfrak{U}$ eine $\mathfrak{B}$-feine Überdeckung einer Teilmenge X von E mit $0 < \bar{\mu}(X) < \infty$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein abzählbares Teilsystem $\{U_i\}$ von $\mathfrak{U}$, das X (mod $\mathfrak{N}^*$) überdeckt und dessen X-Überdeckungsexzeß $\mu(\cup U_i - X^\times) < \varepsilon$ ist.* (GH_1) *Es existiert eine beschränkte Δ-Funktion und ein (endliches) λ derart, daß für jede Konstituente V die Halodilatation für* $\boxed{\alpha = 1}$ *kleiner als λ ist.*

Behauptung. Zu jeder $\mathfrak{B}$-feinen Überdeckung $\mathfrak{V}$ einer beliebigen Teilmenge X von E mit $\bar{\mu}(X) < \infty$, jedem $\varepsilon > 0$ und paarweise fremden $W_1, \ldots, W_p$ in $\mathfrak{V}$ mit

$$\mu(F - F \cdot X^\times) < \varepsilon, \quad \text{wo } F = W_1 + W_2 + \cdots + W_p \text{ ist,}$$

existiert ein abzählbares System $\{V_i\}$ von paarweise fremden $\mathfrak{V}$-Mengen, das X (mod $\mathfrak{N}^*$) überdeckt und dessen X-Überdeckungsexzeß $< \varepsilon$ ist.

Skizze des Beweises[32]. 1. Fall: Keine $W_1, \ldots, W_p$ sind vorgeschrieben. Auf Grund von (L) existiert eine Folge $V_1^1, V_1^2, \ldots, V_1^j, \ldots$ mit

$$\cup V_1^j > X_1 \text{ (mod } \mathfrak{N}^*), \quad \mu(\cup V_1^j - X_1^\times) < \varepsilon_1' < \varepsilon/2,$$

wobei $X = X_1$ gesetzt ist.

Die Folge läßt sich um eine Restfolge kürzen derart, daß für die *endlich vielen* übrig bleibenden Glieder $V_1^1, \ldots, V_1^{p_1}$

$$\mu(X_1^\times - X_1^\times \cdot S_1) < e_1''$$

gilt, wobei $S_1 = \cup V_1^j$ für $j = 1, 2, \ldots, p_1$ und e_1' und e_1'' später näher zu bestimmenden Größen sind.

Dann kommt die *Aussonderung der Kerne.* Dieser Schritt beruht auf der Haloeigenschaft und zeigt die Aussonderungsrolle der Δ-Funktion. Die $V_1^j, j = 1, \ldots, p_1$, werden dem Δ nach geordnet und ein Teilsystem $\mathfrak{T}^1$ so ausgesondert, daß die $\mathfrak{T}^1$-Mengen fremd sind und jede V_1^j $(j = 1, \ldots, p_1)$ im Halo (wenigstens) einer $\mathfrak{T}^1$-Menge aufgesogen wird.

Bei passender Wahl von ε_1' und ε_1'' können wir erreichen, daß

$$\mu(S^1 \cdot X_1^\times) > \bar{\mu}(X_1)/2\lambda$$

ist, wo S^1 die Summe der $\mathfrak{T}^1$-Mengen bezeichnet.

Zusammenfassung. Aus der rohen Folge werden mit Hilfe der Δ-Funktion *endlich viele paarweise fremde Konstituenten* ausgesondert, die von $X^\times$ mehr als $\mu(X^\times)/2\lambda$ wegnehmen, also ein *X-Ausschöpfungs-*(Exhaustions)*vermögen* $> 1/2\lambda$ besitzen.

Auf den ersten Aussonderungsschritt folgt ein zweiter. Wir setzen

$$X_2 = X - X \cdot S^1.$$

Die $\mathfrak{V}$-Mengen, die zu S^1 fremd sind, bilden eine $\mathfrak{B}$-feine Überdeckung von X_2, aus welcher die zweite rohe Folge $V_2^1, \ldots, V_2^j, \ldots$ herausgezogen wird, derart, daß $\cup V_2^j > X_2$ (mod $\mathfrak{N}^*$)

[32]) Ein ausführlicher Beweis in somatischer Fassung findet sich in loc. cit. [26]).

und $\mu(\bigcup V_2^j - X_2^\times) < \varepsilon_2' < \varepsilon/4$ gelten. Aus dieser Folge werden endlich viele paarweise fremde Konstituenten ausgesondert, deren Summe S^2 von $X_2^\times$ mehr als $\mu(X_2^\times)/2\lambda$ wegnimmt.

Den Ausschöpfungsprozeß setzen wir fort und erzeugen durch Zusammensetzung der sukzessiven ausgesonderten Systeme eine Folge von $\mathfrak{B}$-Mengen, die $X(\text{mod } \mathfrak{N}^*)$ überdeckt und deren X-Überdeckungsexzeß $< \varepsilon$ ist.

2. Fall: $W_1, \ldots, W_p$ sind vorgeschrieben. Dann nehmen wir $W_1, \ldots, W_p$ als nullten Abschnitt der zu erzeugenden Folge, setzen $X_1 = X - X_1 \cdot \bigcup W_i$ und ziehen die erste rohe Folge aus dem System der $\mathfrak{B}$-Mengen heraus, die zu $W_1, \ldots, W_p$ fremd sind.

5. 2. Eine σ-Invarianzeigenschaft der scharfen S.V. in bezug auf ein System meßbarer Mengen. Wir wollen zeigen:

Voraussetzungen. Y ist eine Teilmenge von E, $Y = \lim Y_i(\text{mod } N^*)$, wobei jedes Y_i endliches äußeres Maß besitzt und $Y_1 < Y_2 < \cdots$ gilt. $\mathfrak{B}$ ist ein System von μ-meßbaren Mengen. Es gilt die scharfe S.V. für $\mathfrak{B}$ und jedes Y_i.

Behauptung. Es gilt die S.V. für $\mathfrak{B}$ und Y.

Beweis. ε sei eine vorgeschriebene positive Zahl; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i, \ldots$ sei eine abnehmende Nullfolge von positiven Zahlen; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_i, \ldots$ sei eine Folge von positiven Zahlen mit $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < \cdots < \bar{\varepsilon} < \varepsilon$; $V_1^1, V_1^2, \ldots, V_1^i, \ldots$ sei Überdeckungsfolge von paarweise fremden $\mathfrak{B}$-Mengen für $Y_1 = Y$ mit

$$\mu(S_1 - S_1 \cdot Y_1^\times) < \eta_1, \quad S_1 = \bigcup V_1^i.$$

Wir wählen p_1 derart, daß

$$\mu(Y_1^\times - Y_1^\times \cdot S_1^{p_1}) < \varepsilon_1, \quad S_1^{p_1} = \bigcup V_1^i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, p_1,$$

was auf Grund der Endlichkeit von $\bar{\mu}(Y_1)$ möglich ist.

Da die $V_1^i, i = 1, 2, \ldots, p_1$, paarweise fremd sind, $\mu(S_1^{p_1} - Y_2^\times \cdot S_1^{p_1}) < \eta_1 < \eta_2$ ist und die scharfe S.V. für $\mathfrak{B}$ und Y_2 gilt, läßt sich die endliche Folge $V_1^1, \ldots, V_1^{p_1}$ zu einer Folge $V_2^1, V_2^2, \ldots, V_2^j, \ldots$ ergänzen derart, daß $V_1^i = V_2^i$ ist für $i = 1, 2, \ldots, p_1$, $V_2^{i'} \cdot V_2^{i''} = \emptyset$ für $i' \neq i''$, $S_2 = \bigcup V_2^i > Y_2 \,(\text{mod } \mathfrak{N}^*)$, $\mu(S_2 - Y_2^\times \cdot S_2) < \eta_2$.

Wir wählen $p_2 > p_1$ derart, daß

$$\mu(Y_2^\times - Y_2^\times \cdot S_2^{p_2}) < \varepsilon_2, \quad S_2^{p_2} = V_2^1 + \cdots + V_2^{p_2}.$$

Wir verfahren wie im Falle der R.S.V. und erzeugen abschnittsweise die Folge $V_1^1, \ldots, V_1^{p_1}, V_2^{p_1+1}, \ldots, V_2^{p_2}, \ldots$ mit der Summe S.

Der Beweis der Inklusion $S > Y \,(\text{mod } \mathfrak{N}^*)$ verläuft wie in 4. 3.

Außerdem müssen wir zeigen, daß $\mu(S - Y^\times) < \varepsilon$ ist. Es gilt

$$S - Y^\times = \lim (S_\nu^{p_\nu} - S_\nu^{p_\nu} \cdot Y^\times) \,(\text{mod } \mathfrak{N}^*).$$

Da die $S_\nu^{p_\nu} - S_\nu^{p_\nu} \cdot Y^\times$ eine nicht abnehmende Folge bilden, ist

$$\mu(S - Y^\times) = \lim \mu(S_\nu^{p_\nu} - S_\nu^{p_\nu} \cdot Y^\times).$$

Aber

$$\mu(S_\nu^{p_\nu} - S_\nu^{p_\nu} \cdot Y^\times) \leqq \mu(S_\nu^{p_\nu} - S_\nu^{p_\nu} \cdot Y_\nu^\times) < \eta_\nu.$$

Folglich gilt

$$\mu(S - Y^\times) < \varepsilon.$$

Bemerkung. In 4. 3. haben wir eine *volle* σ-Invarianzeigenschaft für die R.S.V. bewiesen, diesmal nur eine *partielle* σ-Invarianzeigenschaft. Es sei erwähnt, daß die scharfe S.V. für $\mathfrak{B}$ und Y gilt, wenn man die $\mathfrak{A}$-Abgeschlossenheit der $\mathfrak{B}$-Mengen voraussetzt.

5. 3. Der allgemeine $\mathfrak{C}$-Vitali-Satz. Es gilt

Satz IV. *Voraussetzungen.* (A) *und* (L) *wie in* **5. 1**, (H_α) *wie in* **4. 4**, *aber für* $\boxed{\alpha = 1}$.

Behauptung. Für jede Teilmenge X von E, jede $\mathcal{B}$-feine Überdeckung $\mathfrak{V}$ von X und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein abzählbares System von paarweise fremden $\mathfrak{V}$-Mengen, das X (mod $\mathfrak{N}^*$) *überdeckt und dessen X-Überdeckungsexzeß $< \varepsilon$ ist, d. h. $\mathcal{B}$ besitzt die S. V.*

Beweis. Wir setzen $E^{(n)} =$ Menge der Punkte x, in welchen

$$\limsup_{V \to x} \left(\Delta(V) + \varrho(V)\right) < n$$

ist, und $X^{(n)} = X \cdot E^{(n)}$. Dann gilt

$$E = \lim E^{(n)} \pmod{\mathfrak{N}^*}, \quad X = \lim X^{(n)} \pmod{\mathfrak{N}^*}.$$

Jedes $X^{(n)}$ wird dann in abzählbar vielen Teilmengen zerlegt, die je endliches äußeres Maß haben. Wir können also X als Grenzmenge (mod $\mathfrak{N}^*$) einer nicht abnehmenden Folge $X_1, X_2, \ldots, X_p, \ldots$ darstellen derart, daß

$$\bar{\mu}(X_p) < \infty \text{ für jedes } p, \text{ und } \limsup_{V \to x} \left(\Delta(V) + \varrho(V)\right) < \varkappa_p < \infty \text{ für } x \in X_p$$

gelten. $\mathcal{D}_p$ bezeichne das System der punktierten konvergenten Folgen $\langle M_i, x\rangle$ aus $\mathcal{B}$ mit $\Delta(M_i) + \varrho(M_i) < \varkappa_p$, $M_i \in \mathfrak{V}$. $\mathcal{D}_p$ ist eine Teilbasis von $\mathcal{B}$, deren Definitionsbereich X_p enthält. Wir dürfen den speziellen $\mathfrak{C}$-Vitali-Satz auf $\mathcal{D}_p$ und X_p anwenden. (A) ist nämlich sicher erfüllt, da eine $\mathfrak{A}$-Menge in bezug auf die Gesamtbasis a fortiori $\mathfrak{A}$-Menge in bezug auf eine Teilbasis ist. (L) ist trivialerweise erfüllt. Aus $\Delta(V) + \varrho(V) < \varkappa_p$ für jede $\mathcal{D}_p$-Menge folgt die Beschränktheit von Δ und von ϱ auf dem Konstituentensystem $\mathfrak{V}_p$ von $\mathcal{D}_p$. Mithin gilt die scharfe S.V. für jedes $\mathfrak{V}_p$ und jedes X_p, erst recht für $\mathfrak{V}$ und X_p. Wegen **5. 2.** gilt die S.V. für $\mathfrak{V}$ und X.

5. 31. *Kommentar über den allgemeinen $\mathfrak{C}$-Vitali-Satz.* In der Voraussetzung (L) liegt der Hauptunterschied zwischen der Fassung des Vitali-Satzes nach Banach und derjenigen nach Carathéodory. Diese Bedingung ist zum Beispiel erfüllt, wenn $\mathcal{R}$ ein metrischer Raum mit abzählbarer Umgebungsbasis ist, μ ein Radon-Maß, $\mathcal{B}$ eine Ableitungsbasis mit Jordan-meßbaren[33]) Konstituenten, deren x-konvergente Folgen gewöhnliche Folgen von Mengen M_i sind, die x im Innern enthalten und deren Durchmesser gegen Null streben. Die Behauptung folgt nämlich aus Lindelöfs topologischem Satze und der oberen Approximationseigenschaft der offenen Mengen in bezug auf das Maß[34]).

6. Übergang von der R.S.V. zur S.V. Adaption eines Maßes an eine Prätopologie.

Wir wollen ganz allgemein *einen* Prozeß beschreiben, der die R.S.V. in die S.V. durch Verengerung des ursprünglichen Maßes verwandelt. Die Menge X heißt von der $\mathfrak{G}$-Menge G *ε-eingegrenzt von oben*, falls $G > X^\times$ (mod $\mathfrak{N}^*$) und $\bar{\mu}(G - X) < \varepsilon$ ist. Mit dieser Definition lautet der Grundgedanke des Prozesses folgendermaßen: Wenn eine Teilmenge X von E für beliebiges $\varepsilon > 0$ durch $\mathfrak{G}$-Mengen von oben ε-eingrenzbar ist und wenn die R.S.V. für $\mathcal{B}$ und X gilt, dann gilt die S.V. für $\mathcal{B}$ und X. Da im folgenden immer von einer festen Ableitungsbasis die Rede ist, werden wir die Bezugnahme auf $\mathcal{B}$ nicht hervorheben.

Definitionen. Erstes Adaptionsaxiom des Maßes μ und der Prätopologie: Die $\mathfrak{D}$-Mengen sind μ-meßbar (oder äquivalent: Die $\mathfrak{C}$-Mengen sind μ-meßbar).

---

[33]) In *Pauc*, loc. cit. [18]), ist R ein n-dimensionaler Finsler-Raum, μ das Choquetsche Maß. Die Konstituenten sind abgeschlossene Vollkugeln. Die Voraussetzungen von Satz IV sind erfüllt; für $\alpha = 1$ gilt nämlich $\lim_{V \to x} \varrho(V) = 3^n$ in jedem Punkte x.

[34]) Vgl. *A. P. Morse* und *J. F. Randolph*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), S. 244—245.

Äußeres zweites Adaptionsaxiom des Maßes μ und der Prätopologie: Zu jeder Teilmenge X von E und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine $\mathfrak{G}$-Menge G mit $G > X$ und $\bar{\mu}(G - X) < \varepsilon$.

Inneres zweites Adaptionsaxiom des Maßes μ und der Prätopologie: Zu jeder Teilmenge X von E und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine $\mathfrak{O}$-Menge O mit $O > X$ und $\bar{\mu}(O - X) < \varepsilon$.

6. 1. Adaptionsprozeß eines Maßes an eine Pärtopologie. Wir setzen voraus:

(*Ad. I.*) Die $\mathfrak{E}$-Mengen sind μ-meßbar. Die $\mathfrak{E}$-Mengen sind für beliebige $\varepsilon > 0$ von $\mathfrak{G}$-Mengen ε-eingrenzbar (kurz: $\mathfrak{G}$-approximierbar). $E = \bigcup O_{(i)}$ mit $O_{(i)} \in \mathfrak{O}$, $\mu(O_{(i)}) < \infty$.

6. 11. *Definition und Eigenschaften der $\mathfrak{Z}'$-Mengen.* Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Z}$ das System der μ-meßbaren Teilmengen von E. Da E als $\mathfrak{E}$-Menge μ-meßbar ist, sind die $\mathfrak{Z}$-Mengen die Durchschnitte von E mit den $\mathfrak{M}$-Mengen. $\mathfrak{Z}$ ist ein Boolescher σ-Verband mit E als Einheit. Wir erklären die $\mathfrak{Z}'$-Mengen als die (von außen her) $\mathfrak{G}$-approximierbaren $\mathfrak{Z}$-Mengen. Eine Menge Z' ist demnach eine $\mathfrak{Z}'$-Menge, wenn sie zu $\mathfrak{Z}$ gehört und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathfrak{G}$-Menge G existiert derart, daß

$$G > Z' \pmod{\mathfrak{N}^*} \quad \& \quad \bar{\mu}(G - Z') < \varepsilon$$

gelten. Da jede $\mathfrak{G}$-Menge durch Hinzufügung einer $\mathfrak{N}$-Menge eine $\mathfrak{G}$-Menge bleibt und jede $\mathfrak{N}^*$-Menge Teilmenge einer $\mathfrak{N}$-Menge ist, darf die erste mod $\mathfrak{N}^*$-Inklusion durch eine $\emptyset$-Inklusion $G > Z'$ ersetzt werden; ε-Einschließbarkeit[35]) und ε-Eingrenzbarkeit fallen hier zusammen.

E ist eine $\mathfrak{E}$-Menge; also gibt es eine Folge $G_{(1)}, \ldots, G_{(n)}, \ldots$ von $\mathfrak{G}$-Mengen, die E von oben her approximieren, d. h. für welche die Relationen $G_{(n)} > E$ und $\lim \bar{\mu}(G_{(n)} - E) = 0$ gelten.

Jede $\mathfrak{O}$-Menge O ist der Durchschnitt von einer $\mathfrak{G}$-Menge G mit E. Da die Mengen $G \cdot G_{(n)}$ $\mathfrak{G}$-Mengen sind und $G \cdot G_{(n)} - O < G_{(n)} - E$ ist, sind die $\mathfrak{O}$-*Mengen* $\mathfrak{G}$-approximierbar; wegen (*Ad. I*) sind sie μ-meßbar, folglich *sind* sie $\mathfrak{Z}'$-*Mengen*. Außerdem ergibt sich aus dem Vorstehenden die *Übereinstimmung der $\mathfrak{G}$-approximierbaren und der $\mathfrak{O}$-approximierbaren Teilmengen von E.* Die $\mathfrak{Z}'$-Mengen Z' sind also dadurch gekennzeichnet, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathfrak{O}$-Menge O gibt mit

$$O > Z' \quad \& \quad \bar{\mu}(O - Z') < \varepsilon.$$

Behauptung 1. *$\mathfrak{Z}'$ ist ein σ-System.*

Beweis. Es sei $\{Z'_p\}$ ein abzählbares System von $\mathfrak{Z}'$-Mengen. Wir wollen zeigen, daß die Vereinigung Z^* der Mengen Z'_p zu $\mathfrak{Z}'$ gehört. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine $\mathfrak{O}$-Menge O_p mit $O_p > Z'_p$ und $\mu(O_p - Z'_p) < \varepsilon/2^p$. Die $\mathfrak{O}$-Menge $O = \bigcup O_p$ enthält Z^* und es ist $\mu(O - Z^*) \leqq \Sigma\mu(O_p - Z'_p) < \varepsilon$; also gilt $Z^* \in \mathfrak{Z}'$.

Behauptung 2. *$\mathfrak{Z}'$ ist ein δ-System.*

Beweis. Es sei $\{Z'_p\}$ ein abzählbares System von $\mathfrak{Z}'$-Mengen. Zu zeigen ist, daß der Durchschnitt $Z_* = \bigcap Z'_p$ zu $\mathfrak{Z}'$ gehört. Nach Voraussetzung ist $E = \bigcup O_{(i)}$ mit $O_{(i)} \in \mathfrak{O}$, $\mu(O_{(i)}) < \infty$. Für jedes i und jedes p ist die Menge

$$Z'_{ip} = O_{(i)} \cdot Z'_p$$

$\mathfrak{O}$-approximierbar. Wegen $Z_* = \bigcap\limits_p \bigcup\limits_i Z'_{ip} = \bigcup\limits_i \bigcap\limits_p Z'_{ip}$ und Behauptung 1 genügt der Nachweis, daß $\bigcap\limits_p Z'_{ip}$ für festes i zu $\mathfrak{Z}'$ gehört.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine $\mathfrak{O}$-Menge O^p mit $O^p > Z'_{ip}$ und $\mu(O^p - Z'_{ip}) < \varepsilon/2^p$. Die Mengenfolge

$$D_n = \left(\bigcap_1^n O^p - \bigcap_{p=1}^{\infty} Z'_{ip}\right)$$

[35]) Bei der „Einschließung" muß die strenge Inklusion $G > Z'$ gelten.

ist nicht wachsend und

$$\lim D_n = \bigcap_1^\infty O^p - \bigcap_{p=1}^\infty Z'_{ip}.$$

Da alle Mengen D_n in der Menge O^1 mit $\mu(O^1) < \infty$ enthalten sind[36]), gilt der Limessatz, d.h.

$$\lim \mu(D_n) = \mu\left(\bigcap_1^\infty O^p - \bigcap_1^\infty Z'_{ip}\right);$$

es ist aber

$$\mu\left(\bigcap_1^\infty O^p - \bigcap_1^\infty Z'_{ip}\right) \leqq \Sigma\mu(O^p - Z'_{ip}) < \varepsilon,$$

Für genügend großes n ist demnach auch $\mu(D_n) < \varepsilon$.

Die Menge $\bigcap_1^n O^p$ ist eine $\mathfrak{O}$-Menge, enthält $\bigcap_{p=1}^\infty Z'_{ip}$ und das Maß der Differenz ist $< \varepsilon$, was die erwünschte Relation $\bigcap_{p=1}^\infty Z'_{ip} \in \mathfrak{Z}'$ ergibt.

Behauptung 3. *$\mathfrak{Z}'$ ist ein Boolescher σ-Verband mit der Einheit E.*

Beweis. Auf Grund der schon erhaltenen Ergebnisse haben wir nur die E-Komplementinvarianz von $\mathfrak{Z}'$ zu beweisen. Der Definition nach läßt jede $\mathfrak{Z}'$-Menge Z' die Darstellung $O_\delta - N$ zu, mithin gilt für das Komplement $E - Z'$ die Darstellung $C_\sigma + N \cdot E$. Die $\mathfrak{C}$-Mengen sind in $\mathfrak{Z}'$ und wegen Behauptung 1 auch die $\mathfrak{C}_\sigma$-Mengen. Die $\mathfrak{N}$-Mengen sind triviale $\mathfrak{O}$-Mengen, gehören also auch zu $\mathfrak{Z}'$. Schließlich liegt $E - Z'$ in $\mathfrak{Z}'$, was zu beweisen war.

Behauptung 4. *Die Darstellung $O_\delta - N$ ist für die $\mathfrak{Z}'$-Mengen charakteristisch.*

Behauptung 5. *$\mathfrak{Z}'$ ist das Borelsche System über $\mathfrak{O}$.*

Behauptung 6. *Die $\mathfrak{Z}'$-Mengen sind diejenigen $\mathfrak{Z}$-Mengen, die von innen her $\mathfrak{C}$-approximierbar sind.*

Behauptung 7. *Die $\mathfrak{Z}'$-Mengen sind durch die Darstellung $C_\sigma + N \cdot E$ charakterisiert.*

Die Behauptungen 5, 6, 7 und 8 folgen unmittelbar aus dem Vorherbewiesenen.

6. 12. *Verengerung des Maßes μ.* Wir definieren $\mathfrak{M}'$ als das System der Mengen $M' = M_a + Z'$, wo $M_a = M \cdot (R - E)$, $M \in \mathfrak{M}$ gilt, und μ' als das auf $\mathfrak{M}'$ verengerte Maß μ.

μ-Nullmengen N und μ'-Nullmengen N' sind identisch, demnach bei Vervollständigung auch die μ^*-Nullmengen N^* und die μ'^*-Nullmengen N'^*, die $\mathfrak{G}$-Mengen in bezug auf μ und die $\mathfrak{G}$-Mengen in bezug auf μ', die $\mathfrak{O}$-Mengen in bezug auf μ und die $\mathfrak{O}$-Mengen in bezug auf μ'. Der Begriff der $\mathcal{B}$-feinen Überdeckung bleibt beim Übergang von μ zu μ' unverändert.

Aus der Definition von μ' folgt, daß μ' auf $R - E$ mit μ übereinstimmt und daß die $\mathfrak{Z}'$-Mengen μ'-meßbar sind, insbesondere die $\mathfrak{O}$-Mengen. Also:

Das erste Adaptionsaxiom eines Maßes und einer Prätopologie ist für μ' erfüllt.

Für eine $\mathfrak{G}$-Menge G gilt $G = G_a + O$, wobei $G_a = G \cdot (R - E)$, $O = G \cdot E$ ist; folglich ist $\bar{\mu}(G) = \bar{\mu}(G_a) + \mu(O)$, aber $\mu(O) = \mu'(O)$, $\bar{\mu}(G_a) = \bar{\mu}'(G_a)$. Da

$$\bar{\mu}'(G) = \bar{\mu}'(G_a) + \mu'(O)$$

ist, ergibt sich $\bar{\mu}'(G) = \bar{\mu}(G)$. Für jede $\mathfrak{Z}'$-Menge Z' und jede sie einschließende $\mathfrak{G}$-Menge G ist $\bar{\mu}(G - Z') = \bar{\mu}'(G - Z')$. Daraus folgt, daß jede μ'-meßbare Teilmenge von E, d.h. jede $\mathfrak{Z}'$-Menge Z' von oben her durch $\mathfrak{G}$-Mengen *dem Maße μ' nach* approximierbar ist, also:

Das zweite äußere Adaptionsaxiom eines Maßes und einer Prätopologie ist für μ' erfüllt.

---

[36]) Im ähnlichen Beweise von *A. P. Morse* und *J. F. Randolph*, loc. cit. [34]), ist das Maß als endlich angenommen; deshalb wird die Zerlegung $E = \cup O_{(i)}$ nicht eingeführt.

6. 2. *Übergang von der R.S.V. zur S.V.* Wir behalten die Voraussetzungen von **6.** 1 bei und machen außerdem folgende Annahmen: *Die $\mathcal{B}$-Konstituenten sind $\mathfrak{A}$-Mengen. $\mathcal{B}$ besitzt die R.S.V.* Wir bemerken, daß diese Annahmen unabhängig von den Annahmen in **6.** 1 die μ^*-Meßbarkeit der $\mathcal{C}$-Mengen bewirken. Für eine $\mathcal{C}$-Menge C kann man nämlich aus dem System der zu C fremden $\mathcal{B}$-Konstituenten abzählbar viele $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ aussondern, die $E - C$ (mod $\mathfrak{N}^*$) überdecken. Setzt man $C_i = E \cdot A_i$, so gilt

$$\Sigma C_i = E - C \pmod{\mathfrak{N}^*}, \quad C = (E - \Sigma C_i) + N^*.$$

Demnach ist C μ^*-meßbar.

Unter den gesamten Annahmen von **6.** 1 und **6.** 2 bleiben beim Übergang von μ zu μ' die $\mathcal{B}$-Konstituenten meßbar, außerdem wird die obere Approximationseigenschaft der meßbaren Mengen durch die $\mathfrak{G}$-Mengen gewonnen.

Der Verengerungsprozeß auf μ bewirkt die Verwandlung der R.S.V. in die S.V. Es sei nämlich X eine beliebige Teilmenge von E, $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von X (gleichgültig, ob in bezug auf μ' oder in bezug auf μ), M' eine in E enthaltene μ'-Maßhülle von X. Die Menge M' gehört $\mathfrak{Z}'$ an. Folglich existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathfrak{G}$-Menge G mit $G \supset M'$ und $\bar{\mu}'(G - M') < \varepsilon$. Schränkt man $\mathfrak{B}$ auf das System seiner Mengen ein, die in G enthalten sind, und wendet die R.S.V. an, so ergibt sich eine Folge $V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots$ von paarweise fremden $\mathfrak{B}$-Mengen mit $\Sigma V_i \supset X$ (mod $\mathfrak{N}^*$), $S = \Sigma V_i \subset G$. Die V_i sind μ-meßbar und $\mathfrak{A}$-Mengen, folglich μ'-meßbar und es ist

$$\mu'(S - S \cdot M') \leqq \mu'(G - M'), \quad \text{also} < \varepsilon.$$

Die μ'-Approximationsbedingung ist erfüllt. Die $\mathfrak{N}'^*$-Überdeckungsbedingung ist wegen $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}'^*$ auch erfüllt.

Unter den Annahmen von **6.** 1 und **6.** 2 können wir eine neue Kennzeichnung der $\mathfrak{Z}'$-Mengen geben; es gilt nämlich

Behauptung. Die $\mathfrak{Z}'$-Mengen sind diejenigen $\mathfrak{Z}$-Mengen, für welche die S.V. gilt.

Beweis. Wir haben bloß zu zeigen, daß jede $\mathfrak{Z}$-Menge Z^0, für welche die S.V. gilt, zu $\mathfrak{Z}'$ gehört. Das $\mathcal{B}$-Konstituentensystem $\mathfrak{S}$ ist eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von Z^0; folglich gibt es zu jeder positiven Ganzzahl n ein abzählbares Teilsystem $\{V_i^n\}$ mit

$$S^n = \bigcup_i V_i^n \supset Z^0 \pmod{\mathfrak{N}^*}, \quad \mu^*(S^n - Z^0) < 1/n.$$

Daraus schließen wir

$$Z^0 = \bigcap S^n \pmod{\mathfrak{N}^*} \quad \text{und} \quad Z^0 = \bigcap (S^n \cdot E) \pmod{\mathfrak{N}^* \cdot E}.$$

S^n ist eine $\mathfrak{A}_\sigma$-Menge, $S^n \cdot E$ eine $\mathcal{C}_\sigma$-Menge, der Durchschnitt

$$D = \bigcap (S^n \cdot E)$$

eine $\mathcal{C}_{\sigma\delta}$-Menge.

Da D und Z^0 beide $\mathfrak{Z}$-Mengen sind, ist auch die Diskrepanz eine $\mathfrak{Z}$-Menge; die letzte Gleichung dürfen wir also in

$$Z^0 = D \pmod{\mathfrak{N} \cdot E}$$

verschärfen.

$\mathfrak{Z}'$ ist ein Boolescher σ-Verband, der die $\mathcal{C}$-Mengen enthält, also auch die $\mathcal{C}_{\sigma\delta}$-Mengen. Es gilt $D \in \mathfrak{Z}'$ und wegen $N \cdot E \in \mathfrak{Z}'$ für jedes N in $\mathfrak{N}$ ergibt sich die gewünschte Relation $Z^0 \in \mathfrak{Z}'$.

6. 3. **Anwendung auf die Theorie der Differentiation von Mengenfunktionen.** Durch leichte Anpassung der de Posselschen Methode zum Beweise des Differentiationssatzes für μ-Integrale in dem Falle, daß

$$E \neq \mathfrak{R} \pmod{\mathfrak{N}^*}$$

ist, gewinnen wir den

Satz V. *Voraussetzungen. Die Ableitungsbasis $\mathcal{B}$ besitzt die S.V. Φ ist ein μ-endliches* (d. h. $(\mu(M) < \infty) \to (|\Phi(M)| < \infty)$) *$\mu$-Integral.*

Behauptung. Φ ist fast überall auf E $\mathcal{B}$-differenzierbar und die $\mathcal{B}$-Ableitung stimmt auf E mit einem Radon-Nikodymschen Integranden von Φ überein.

Dieser Satz in Verbindung mit den Ergebnissen in **6.** 1 und **6.** 2 ergibt den

Satz VI. *Unter den Voraussetzungen von* **6.** 1 *und* **6.** 2 *ist jedes μ-endliche μ-Integral Φ auf E fast überall $\mathcal{B}$-differenzierbar und die $\mathcal{B}$-Ableitung stimmt auf E mit einem μ'-Integranden überein.*

Mit Andersen und Jessen[37]) verstehen wir unter einem μ'-Integranden von Φ jeden Radon-Nikodymschen Integranden der auf $\mathfrak{M}'$ verengerten Funktion Φ.

Beispiel. Die Ableitungsbasis ist die in **1.** 24 erklärte Streifenbasis $\mathcal{S}$, dort ist $\mathcal{R} = E$. Die $\mathfrak{Z}'$-Mengen sind mod $\mathfrak{N}$ Produkte von Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $I = [0,1]$ mit I. μ' ist gröber als μ im strengen Sinne, denn für $M = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ ist $\mu(M) = \frac{1}{9}$, $\mu'(M) = \frac{1}{3}$ und $\underline{\mu}'(M) = 0$. Ist $\Phi(M) = \int\limits_M f \cdot d\mu$ (Integral im engeren Sinne), so existiert für fast alle $x = (\xi, \eta)$ in E die $\mathcal{S}$-Ableitung und ist gleich dem Mittelwert von $f(\xi, \eta)$ bezüglich η, also $= \int f(\xi, \eta)\, d\eta$.

Da das System $\mathfrak{O}$ ein σd-System und Borelsche Erzeugende von $\mathfrak{Z}'$ ist, können wir im Falle $E = \mathcal{R}$ einen Satz von O. Haupt[38]) heranziehen und Satz VI verschärfen zu

Satz VII. *Unter den Voraussetzungen von* **6.** 1 *bis* **6.** 2 *und $E = \mathcal{R}$ ist jede σ-additive μ-endliche $\mathfrak{M}$-Funktion fast überall $\mathcal{B}$-differenzierbar und die $\mathcal{B}$-Ableitung stimmt auf E mit einem μ'-Integranden von Φ überein.*

In den Sätzen V, VI und VII kann die μ-Endlichkeits- durch die folgende „Radon"-Annahme: $\mathcal{R} = \mathfrak{U} G_{(i)}$ mit $G_{(i)} \in \mathfrak{G}$ und Totalvariation von Φ, über $G_{(i)}$, $< \infty$ für $i = 1, 2, \ldots$, ersetzt werden.

7. Spezialfall der *U*-Basen. Beziehungen zur Denjoyschen Theorie.

Voraussetzungen. $\mathcal{B}$ ist die U-Basis $[\mathfrak{S}, \delta]$ (vgl. **1.** 25), (G), (A) und (H_a) (vgl. **4.** 4), ferner $(U): E = \bigcup C_{(i)}$, $C_{(i)} \in \mathfrak{C}$, $\bar{\mu}(C_{(i)}) < \infty$.

Folgerungen. Wegen **4.** 4 gilt die R.S.V. Aus (G) und der σ-Endlichkeit von μ ergibt sich die Existenz einer Folge $G_{(1)}, G_{(2)}, \ldots, G_{(i)}, \ldots$ von $\mathfrak{G}$-Mengen derart, daß

$$E = \bigcup O_{(i)}, \quad \bar{\mu}(G_{(i)}) < \infty, \quad O_{(i)} = E \cdot G_{(i)}.$$

Nun wollen wir nach Denjoyschem Muster zeigen:

Behauptung 1. *Der Definitionsbereich $D = D(\mathfrak{T})$ jeder U-Teilbasis $[\mathfrak{T}, \delta]$ ist μ^*-meßbar.*

Beweis. Das System $\mathfrak{T}_n$ der $\mathfrak{T}$-Mengen V mit $\delta(V) < 1/n$ ist eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von D. Wegen der R.S.V. enthält $\mathfrak{T}_n$ ein abzählbares System von paarweise fremden Mengen T_i^n mit $S^n = \Sigma T_i^n > D$ (mod $\mathfrak{N}^*$). Wir setzen $T = \bigcap S^n$. T ist μ-meßbar und $T > D$ (mod $\mathfrak{N}^*$). Andererseits gehört jeder Punkt x von T zu allen Mengen einer Folge $V^1, V^2, \ldots, V^n, \ldots$ mit $\lim \delta(V^n) = 0$, x gehört zu D, es gilt $T < D$ und in Verbindung mit der Inklusion $T > D$ (mod $\mathfrak{N}^*$) ergibt sich $T = D$ (mod $\mathfrak{N}^*$). D ist μ^*-meßbar.

Behauptung 2. *Die $\mathfrak{C}$-Mengen sind μ^*-meßbar, mithin auch E und die $\mathfrak{O}$-Mengen.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{T}$ das System der $\mathcal{B}$-Konstituenten, die mit einer $\mathfrak{C}$-Menge C einen nichtleeren Durchschnitt haben. Der Definitionsbereich $D(\mathfrak{T})$ ist $= F(C)$, also $= C$ (mod $\mathfrak{N}$). Da $D(\mathfrak{T})$, nach Behauptung 1, μ^*-meßbar ist, so ist auch C μ^*-meßbar.

---

[37]) Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **25** (1948), Nr. 5, S. 4.

[38]) Sitz.Ber. Bayer. Akad. Wiss. 1948, S. 173.

Behauptung 3, 1. *Es gilt die S.V. für jedes Teilsystem* $\mathfrak{T}$ *von* $\mathfrak{S}$ *und den Definitionsbereich* D *von* $[\mathfrak{T}, \delta]$, *falls* $\bar{\mu}(D) = \mu^*(D)$ *endlich ist.*

Beweis. Nach Voraussetzung (G) liegt D in einer $\mathfrak{G}$-Menge G von endlichem äußerem Maße. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{T}_n$ das System der in G liegenden $\mathfrak{T}$-Konstituenten V mit $\delta(V) < 1/n$, mit D_n die Vereinigung der $\mathfrak{T}_n$-Mengen, mit K_n einen μ^*-Kern von D_n derart, daß

$$K_n \prec D_n, \quad K_1 \prec K_2 \prec \cdots \prec K_n \prec \cdots.$$

Der Durchschnitt $\bigcap D_n$ ist $= D$. Da D μ^*-meßbar ist, gilt $D \prec K_n$ (mod $\mathfrak{N}^*$) für jedes n, folglich $\bigcap K_n \succ D$ (mod $\mathfrak{N}^*$).

Aber aus $\bigcap D_n = D$ und $K_n \prec D_n$ folgt $\bigcap K_n \prec D$. Die beiden Ungleichungen ergeben $\bigcap K_n = D$ (mod $\mathfrak{N}^*$).

Der Limessatz für eine nicht wachsende Folge von meßbaren Mengen endlichen Maßes liefert

$$\lim \mu^*(K_n) = \mu^*(D).$$

T_n ist eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von D, enthält folglich wegen der R.S.V. ein abzählbares System von paarweise fremden Mengen T_i^n mit

$$S^n = \sum_i T_i^n \succ D \text{ (mod } \mathfrak{N}^*).$$

S^n ist eine μ-meßbare Teilmenge von D_n und deshalb in K_n(mod $\mathfrak{N}^*$) enthalten. Durch Vergleich von Inklusionen erhalten wir

$$\lim \mu^*(S^n) = \mu^*(D).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein solches n^0, daß

$$\mu^*(S^{n^0}) < \mu^*(D) + \varepsilon$$

ist. Das System $\{T_i^{n^0}\}$, $i = 1, 2, \ldots$, ist ein Teilsystem von $\mathfrak{T}$, deren Konstituenten paarweise fremd sind, das D (mod $\mathfrak{N}^*$) überdeckt, und dessen D-Überdeckungsexzeß $< \varepsilon$ ist. Dadurch ist die Gültigkeit der S.V. für $\mathfrak{T}$ und D ausgedrückt.

Behauptung 3, 2. *Es gilt die scharfe S.V. für jedes Teilsystem* $\mathfrak{T}$ *von* S *und den Definitionsbereich* D *von* $[\mathfrak{T}, \delta]$.

Beweis. Sind nämlich paarweise fremde $\mathfrak{T}$-Mengen $W_1, \ldots, W_p$ vorgeschrieben mit

$$\mu^*(F - F \cdot D) = \varepsilon^* < \varepsilon \qquad (F = W_1 + W_2 + \cdots + W_p),$$

und bezeichnet $\mathfrak{T}_r$ das System der zu F fremden $\mathfrak{T}$-Mengen, so ist wegen Voraussetzung (A) der Definitionsbereich D_r von $\mathfrak{T}_r$ gleich $D - D \cdot F$(mod $\mathfrak{N}$).

$\mathfrak{T}_r$ enthält ein abzählbares Teilsystem von paarweise fremden Mengen T_q derart, daß

$$T = \Sigma T_q \succ D - D \cdot F \text{ (mod } \mathfrak{N}^*), \quad \mu^*(T - T \cdot D_r) < \varepsilon - \varepsilon^*$$

gelten. Das abzählbare System der W_j und der T_q überdeckt D (mod $\mathfrak{N}^*$) mit einem Überdeckungsexzeß $< \varepsilon^* + (\varepsilon - \varepsilon^*)$, also $< \varepsilon$, mithin gilt die scharfe S.V. für $\mathfrak{T}$ und D.

Behauptung 3, 3. *Es gilt die S.V. für jedes Teilsystem* $\mathfrak{T}$ *von* $\mathfrak{S}$ *und den Definitionsbereich* D *von* $[\mathfrak{T}, \delta]$ (also ohne die Voraussetzung $\mu^*(D) < \infty$).

Beweis. Indem wir uns auf Voraussetzung (U) berufen, setzen wir

$$D_{(n)} = D \cdot \bigcup_{i=1}^{n} C_{(i)},$$

$$\mathfrak{T}_{(n)} = \text{System der } \mathfrak{T}\text{-Mengen } T \text{ mit } T \cdot \bigcup_{i=1}^{n} C_{(i)} \neq \emptyset.$$

Der Definitionsbereich von $T_{(n)}$ ist gleich $D_{(n)}$ (mod $\mathfrak{N}$) und hat endliches Maß. Nach Behauptung 3, 2 gilt die scharfe S.V. für $\mathfrak{T}_{(n)}$ und $D_{(n)}$, also auch für $\mathfrak{T}$ und $D_{(n)}$, woraus wegen 5. 2. die S.V. für $\mathfrak{T}$ und D gilt.

Behauptung 3, 4. *Es gilt die scharfe S.V. für jedes Teilsystem* $\mathfrak{T}$ *von* $\mathfrak{S}$ *und den Definitionsbereich* D *von* $[\mathfrak{T}, \delta]$.

Beweis. Wörtliche Wiederholung des Beweises von Behauptung 3, 2.

Behauptung 4, 1. *Es gilt die scharfe S.V. für die* $\mathfrak{C}$*-Mengen.*

Beweis. Es sei C eine $\mathfrak{C}$-Menge, $\mathfrak{B}$ eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von C, $\mathfrak{B}_r$ das System der zu C nicht fremden $\mathfrak{B}$-Mengen, D_r der Definitionsbereich von $[\mathfrak{B}_r, \delta]$. Wegen der $\mathfrak{C}$-Abgeschlossenheit von C ist $C = D_r \pmod{\mathfrak{N}^*}$. Nach Behauptung 3, 4 gilt die scharfe S.V. für $\mathfrak{B}$ und D_r, folglich auch für $\mathfrak{B}$ und C. Da $\mathfrak{B}$ eine beliebige $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von C bezeichnet, ist Behauptung 4, 1 bewiesen.

Behauptung 4, 2. *Die S.V. gilt für alle* $\mathfrak{C}_\sigma$*-Mengen* (mod $\mathfrak{N}^*$).

Beweis. Folgt aus Behauptung 4, 1 und 5. 2.

Behauptung 5, 1. *Das System* $\mathfrak{Z}''$ *der* $\mathfrak{C}_\sigma$*-Mengen* (mod $\mathfrak{N}^* \cdot E$) *ist ein* $\sigma\delta$*-System.*

Beweis. $\mathfrak{Z}''$ ist trivialerweise ein σd-System. Wir haben nur noch zu zeigen: Sind $Z_1'', Z_2'', \ldots$ $\mathfrak{Z}''$-Mengen mit

$$Z_1'' > Z_2'' > \cdots$$

so gehört der Durchschnitt Z'' dem System $\mathfrak{Z}''$ an.

Da $\mathfrak{Z}''$ ein σ-System ist, genügt es, die Behauptung für jede Folge $Z_1'' \cdot C_{(i)}, Z_2'' \cdot C_{(i)}, \ldots$ nachzuweisen. Wir dürfen also annehmen, daß $\mu^*(Z'')$ endlich ist.

Dem vorgeschriebenen $\varepsilon > 0$ ordnen wir eine Reihe $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots$ von positiven Zahlen zu mit einer Summe $< \varepsilon$. Da die $\mathfrak{Z}''$-Mengen endlichen μ^*-Maßes mit den von innen her $\mathfrak{C}$-approximierbaren $\mathfrak{M}^*$-Teilmengen von E übereinstimmen, gibt es zu jedem $j = 1, 2, \ldots$ eine $\mathfrak{C}$-Menge C_j mit $C_j < Z_j''$, $\mu^*(Z_j'' - C_j) < \varepsilon_j$.

Es gilt $C = \bigcap C_j < \bigcap Z_j'' = Z''$, $\mu^*(Z'' - C) < \varepsilon$. Z'' ist eine von innen her $\mathfrak{C}$-approximierbare $\mathfrak{M}^*$-Teilmenge von E, folglich eine $\mathfrak{Z}''$-Menge.

Behauptung 5, 2. *Das System der* $\mathfrak{C}_\sigma$*-Mengen* (mod $\mathfrak{N}^* \cdot E$) *ist ein Boolescher* σ*-Verband*

Beweis. Die E-Komplementmenge einer $\mathfrak{C}_\sigma$-Menge (mod $\mathfrak{N}^* \cdot E$) ist eine $\mathfrak{O}_\delta$-Menge (mod $\mathfrak{N}^* \cdot E$). Da $\mathfrak{Z}''$ ein δ-System ist, genügt es, die Relation $O \in \mathfrak{Z}''$ für jede $\mathfrak{O}$-Menge O zu zeigen.

Wir setzen $C = E - O$, $\mathfrak{B}$ = System der zu C fremden $\mathfrak{S}$-Mengen. $\mathfrak{B}$ ist eine $\mathcal{B}$-feine Überdeckung von O, enthält folglich ein abzählbares Teilsystem $\{V_j\}$, das O (mod $\mathfrak{N}^*$) überdeckt. Es gelten die Gleichungen $O = E \cdot \bigcup V_j$ (mod $\mathfrak{N}^* \cdot E$), $O = \bigcup C_j$ (mod $\mathfrak{N}^* \cdot E$), wobei die $C_j = E \cdot V_j$ $\mathfrak{C}$-Mengen sind. O ist eine $\mathfrak{C}_\sigma$-Menge (mod $\mathfrak{N}^* \cdot E$), also eine $\mathfrak{Z}''$-Menge.

Definition. $\mathfrak{Z}^*$ sei das System der $\mathfrak{M}^*$-meßbaren Teilmengen von E.

Behauptung 6. *Die* $\mathfrak{Z}''$*-Mengen sind diejenigen* $\mathfrak{Z}^*$*-Mengen, für welche die S.V. gilt.*

Beweis. Ergibt sich durch leichte Anpassung des Beweises der ähnlichen Behauptung in 6. 2.

Behauptung 7. *Die* $\mathfrak{Z}''$*-Mengen sind diejenigen* $\mathfrak{Z}^*$*-Mengen, die von außen her* $\mathfrak{O}$*-approximierbar sind.*

Beweis. Die $\mathfrak{O}$-approximierbaren $\mathfrak{Z}^*$-Mengen Z^0 sind von der Gestalt $O_\delta - N^* \cdot E$, gehören also $\mathfrak{Z}''$ an. Wir wollen beweisen, daß jede Menge Z'' $\mathfrak{O}$-approximierbar ist.

Das System $\mathfrak{Z}^0$ der Mengen Z^0 ist ein $\sigma\delta$-System (vgl. Beweis von Behauptung 1 in 6. 11); die fragliche Aussage wird demnach begründet, wenn wir die $\mathfrak{O}$-Approximierbarkeit der $\mathfrak{C}$-Mengen zeigen. Wegen Behauptung 5, 2 gilt

$$O = C_\sigma \pmod{\mathfrak{N}^* \cdot E}, \quad \text{mithin } C = O_\delta \pmod{\mathfrak{N}^* \cdot E}.$$

$\mathfrak{Z}^0$ enthält die $\mathfrak{O}$-Mengen, als δ-System auch die $\mathfrak{O}_\delta$-Mengen, schließlich die $\mathfrak{C}$-Mengen.

7. 1. Verengerung des Maßes μ^*. Wir definieren $\mathfrak{M}''$ als das System der Mengen

$$M'' = M_a^* + Z'', \text{ wo } M_a^* = M^* \cdot (R - E),\ M^* \in \mathfrak{M}^*$$

und μ'' als das auf $\mathfrak{M}''$ verengerte Maß μ^*.

Das erste Adaptionsaxiom eines Maßes und einer Prätopologie ist für μ'' erfüllt.

Wegen Behauptung 7 gilt das zweite innere Adaptionsaxiom für μ'' und die Prätopologie.

Bemerkung. Obgleich der oben geschilderte Verengerungsprozeß dasselbe Maß liefert, wie der in § 6 erklärte, ist doch zu beachten, daß die Ansätze verschieden sind. Hier wird die Gültigkeit der S.V. für $\mathfrak{C}$-Mengen nicht aus einer Eigenschaft oberer Approximation durch $\mathfrak{G}$-Mengen abgeleitet, sondern es werden die U-Basiseigenschaften herangezogen.

Satz VIII. *Unter den Voraussetzungen von § 7 ist jedes μ-Integral Φ auf E fast überall differenzierbar und die $\mathfrak{B}$-Ableitung stimmt auf E mit einem μ''-Integranden überein.*

Bemerkung. In § 7 können wir von vornherein $\mu = \mu^*$ annehmen; dann ist $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{D}$ eine Borelsche Erzeugende von $\mathfrak{Z}''$. Zu beachten ist, daß μ'' Verengerung von μ^*, nicht von μ ist.

Eine σ-additive, μ-endliche, nicht μ^*-stetige $\mathfrak{M}^*$-Funktion weist, ausgenommen in trivialen Fällen, pathologische Züge auf. Aus diesem Grund verzichten wir auf die $(\mu' \to \mu'')$-Übertragung von Satz VII, obgleich der so erhaltene Satz richtig ist.

7. 2. Beziehungen zu Denjoys Theorie. Eine „famille régulière de Denjoy[39])" bestimmt eine U-Basis für $\delta = \mu$. Das äußere Maß von $\mathfrak{R}$ ist endlich, dadurch sind (G) (vgl. **4.** 4.) und (U) trivialerweise erfüllt. (A) ist gefordert. Für $\Delta = \mu$ gilt (H_a) in der Form (GH_a) (vgl. Satz I in **4.** 2.). Die „parfaite régularité"[40]) ist dem zweiten inneren Adaptionsaxiom des Maßes μ^* und der Prätopologie, folglich der Gleichheit $\mu^* = \mu''$ gleichwertig.

Das in **6.** 3 schon behandelte Beispiel der Streifenbasis $\mathfrak{S}$ kann auch zur Erläuterung der Betrachtungen dieses Abschnitts benutzt werden. Von Denjoys Standpunkt aus haben wir es mit einem regulären, aber nicht vollständig regulären System zu tun.

8. Ergänzende Betrachtungen.

Die in dieser Arbeit auftretenden Voraussetzungen zielen auf Differentiationssätze im Sinne von de Possel hin, in welchen die zu differenzierende Funktion Φ auf $\mathfrak{M}$ erklärt, σ-additiv, μ-endlich und μ-stetig ist und für ihre $\mathfrak{B}$-Ableitung Existenz mod $\mathfrak{N}^*$ und Koinzidenz mit einem Integranden behauptet wird. Der Integrand mod $\mathfrak{N}^*$ ist nicht punktual, sondern somatisch definiert, nämlich durch die Φ entsprechende Lebesguesche Zerlegung von $\mathfrak{R}$, der „Einheit". Die Definition des Φ-Integranden dürfen wir mit der Definition einer Distribution von L. Schwartz[41]) vergleichen, als eines Linearfunktionals im Raume D; der Φ-Integrand läßt sich „lokalisieren", aber ohne Ableitungsbasis nicht punktweise erklären. Die Aufstellung von Bedingungen, unter welchen der de Posselsche Ableitungssatz gilt, gehört zur „Analyse Fine" im Sinne von Dieudonné. Anstatt den Φ-Integranden durch punktweise Grenzübergänge zu interpretieren, kann man einen „globalen" Grenzübergang verwenden, wie wir es im folgenden an Hand eines Beispiels erläutern: $\mathfrak{R}$ ist wie in **1.** 1 eine mit dem Maße μ versehene Grundmenge, $\mu(\mathfrak{R})$ ist endlich. $\mathfrak{N}$ ist ein meßbares Netz, d. h. ein der Feinheit nach gerichtetes System von $\mathfrak{R}$-Einteilungen $\mathfrak{T} = \{M_1, \ldots, M_q\}$, $\mathfrak{R} = \Sigma M_l$, $\mu(M_l) > 0$. Ist f eine L^2-Funktion, $\Phi(M) = \int_M f \cdot d\mu$, und erklären wir die $\mathfrak{T}$-Ableitung $D\Phi_{\mathfrak{T}} = f_{\mathfrak{T}}$ in jedem Punkte x durch $\Phi(M_l)/\mu(M_l)$, wobei $x \in M_l$ ist, so

[39]) loc. cit. [27]), S. 333.

[40]) loc. cit. [27]), S. 353.

[41]) Actualités Scientifiques et Industrielles **1091** und **1122**, Hermann, Paris 1950 und 1951.

konvergieren im Sinne der L^2-Konvergenz die $f_{\mathfrak{X}}$ gegen eine Funktion $f_{\mathfrak{N}}$ (mod $\mathfrak{N}^*$). Heißt $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{N})$ der kleinste Boolesche σ-Verband, der alle Netzmengen enthält, β die Verengerung von μ auf $\mathfrak{B}$, so gilt $f_{\mathfrak{N}} = \beta$-Integrand. Falls $\mathfrak{N}$ „vollständig" ist, d. h. das System der $\mathfrak{N}$-Mengen eine Borelsche Erzeugende mod $\mathfrak{N}^*$ von $\mathfrak{M}$ ist, stimmen $f_{\mathfrak{N}}$ und μ-Integrand überein.

Die starke Vitali-Eigenschaft sichert den Differentiationssatz für μ-endliche μ-Integrale. Sie stellt eine hinreichende, wohl aber nicht notwendige Bedingung dafür dar. C. A. Hayes (vgl. Fußnote [19])) ist es gelungen, eine schwächere notwendige Bedingung aufzufinden, die sogenannte „pseudostrength property" für Integrale. Im Rahmen unserer Untersuchung (vgl. 3. 2.) lautet die Vitali-Hayessche Eigenschaft wie folgt: Zu jeder Teilmenge X von E, jeder $\mathcal{B}$-feinen Überdeckung $\mathfrak{V}$ von X, jedem $\varepsilon > 0$ und jedem μ-endlichen μ-Integral Φ, existieren $V_i \in \mathfrak{V}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $S = \bigcup V_i > X$ (mod $\mathfrak{N}^*$), $\mu(S - S \cdot X^\times) < \varepsilon$.

(2) Die Φ-Überlappung der V_i ist $< \varepsilon$.

Die Abschwächung der S.V. in die Vitali-Hayessche Eigenschaft tritt zum Beispiel auf, wenn man im klassischen Lebesgue-Differentiationssatz mit regulären konvergenten Folgen von abgeschlossenen Mengen die Abgeschlossenheit der Konstituenten aufgibt. Durch Kontraktion der Konstituenten in μ-nahe abgeschlossene Teilmengen hatte schon Herr O. Haupt die schwache Vitali-Eigenschaft für jene Basen erhalten. Auf Grund der inneren Approximationseigenschaft der abgeschlossenen Mengen für jedes Radon-Maß kann man zeigen, daß die Vitali-Hayessche Eigenschaft gilt, sogar für jedes Radon-Maß Φ, woraus nach C. A. Hayes oder durch leichte Anpassung des de Posselschen Beweises (loc. cit. [2]), S. 402—403) mit Hinweis auf den in Fußnote [38]) zitierten Satz von Haupt der Lebesgue-Differentiationssatz wiederum folgt. Hayes hat dieselben Verhältnisse bei Morses „star blankets" (loc. cit. [20]), S. 432) erkannt. Übrigens ist ein ähnliches Verfahren von A. P. Morse (loc. cit. [4]), S. 229) geschildert. Eine Veröffentlichung von C. A. Hayes und Verf. über das angeschnittene Thema ist in Vorbereitung.

Eingegangen 20. März 1952.

Eine mathematische Frage der Strahlentherapie.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Wilhelm Specht* in Erlangen.

Ein abgeschlossener beschränkter Bereich $\mathfrak{P}$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes von positivem Jordanschen Inhalt, weiterhin das *Präparat* $\mathfrak{P}$ genannt, sei mit einer strahlenden Substanz belegt. Bezeichnet $\mathfrak{p}=(p_1, p_2, p_3)$ den Vektor eines beliebigen Punktes des Präparates $\mathfrak{P}$ in bezug auf ein festes Orthogonalsystem, so sei die *Strahlungsdichte* $\sigma(\mathfrak{p})$ als positivwertige, im Riemannschen Sinne über $\mathfrak{P}$ integrierbare Ortsfunktion auf $\mathfrak{P}$ vorgegeben, so daß das Raumintegral

$$S(\mathfrak{P})=\int_{\mathfrak{P}} \sigma(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p}$$

die Gesamtstrahlung darstellt, die vom Präparat $\mathfrak{P}$ zu jedem Zeitpunkte ausgeht. Es bedeutet lediglich eine Normierung, wenn für dieses Integral

$$S(\mathfrak{P})=\int_{\mathfrak{P}} \sigma(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p}=1 \tag{1}$$

vorausgesetzt wird.

Ist $\mathfrak{a}=(a_1, a_2, a_3)$ der Vektor eines festen, außerhalb $\mathfrak{P}$ liegenden Punktes im Raume, so wird die *Intensität* der von $\mathfrak{P}$ ausgehenden Strahlung im Punkte $\mathfrak{a}$ durch das Raumintegral

$$I(\mathfrak{a})=\int_{\mathfrak{P}} \frac{\sigma(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p}}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|^2} \tag{2}$$

mit

$$|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}| = ((a_1-p_1)^2+(a_2-p_2)^2+(a_3-p_3)^2)^{\frac{1}{2}}$$

dargestellt. Unter der Normierung (1) läßt sich $I(\mathfrak{a})$ auch auffassen als das mit der *Gewichtsfunktion* $\sigma(\mathfrak{p})$ gebildete *Mittel* der Ortsfunktion $|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|^{-2}$ über das Präparat $\mathfrak{P}$.

Zur experimentellen Bestimmung der Strahlungsintensität $I(\mathfrak{a})$ werden kleine Ionisationskammern kugelförmiger Gestalt verwendet, die bei beliebiger Lage der Kammer im Raume (außerhalb des Präparates $\mathfrak{P}$) die Gesamtintensität der Strahlung im Innenraum der Kammer messen. Bezeichnet also $\mathfrak{x}=(x_1, x_2, x_3)$ den Vektor eines beliebigen Punktes im Innern oder auf dem Rande der Kugel

$$\mathfrak{K}: \qquad 0 \leqq |\mathfrak{x}| \leqq 1,$$

so liefert die mit ihrem Mittelpunkt in den Punkt $\mathfrak{a}$ gelegte Kammer, deren Radius einfachheitshalber als *Längeneinheit* gewählt wird, als Meßergebnis den Wert des Raumintegrales

$$\bar{I}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{V(\mathfrak{K})}\int_{\mathfrak{K}} I(\mathfrak{a}-\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} = \frac{3}{4\pi}\int_{\mathfrak{K}}\int_{\mathfrak{P}} \frac{\sigma(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p}\,d\mathfrak{x}}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{x}-\mathfrak{p}|^2} \tag{3}$$

mit dem Volumen $V(\mathfrak{K})=\frac{4\pi}{3}$ der Kammer, also die *mittlere Intensität der Strahlung in Nähe des Punktes* $\mathfrak{a}$.

In praktischen Anwendungen, vor allem in der Strahlentherapie[1]) setzt man diese mittlere Intensität $\bar{I}(\mathfrak{a})$ für die wahre Intensität $I(\mathfrak{a})$ an der Stelle $\mathfrak{a}$. Wenn der Abstand der Meßstelle $\mathfrak{a}$ vom Präparat $\mathfrak{P}$ gegen den Radius der Ionisationskammer genügend groß ist, ist diese Annäherung ausreichend, keineswegs aber dann, wenn Abstand der Meßstelle $\mathfrak{a}$ vom Präparat $\mathfrak{P}$ und Kammerradius von annähernd gleicher Größe sind.

Die Bedeutung dieser Dinge für die Strahlentherapie gab die Veranlassung zu einer Untersuchung der Abweichung der mittleren Intensität $\bar{I}(\mathfrak{a})$ vom wahren Wert $I(\mathfrak{a})$, insbesondere also zu einer Abschätzung des relativen Fehlers

$$\Delta(\mathfrak{a}) = \frac{\bar{I}(\mathfrak{a}) - I(\mathfrak{a})}{I(\mathfrak{a})}. \tag{4}$$

Die Richtung der Untersuchung war dabei durch den Wunsch der Praxis festgelegt, eine von der Strahlungsdichte $\sigma(\mathfrak{p})$ und der Gestalt des Präparates $\mathfrak{P}$ weitgehend unabhängige, allgemeingültige Korrektur des Meßwertes $\bar{I}(\mathfrak{a})$ zu erhalten.

Für eine beliebige natürliche Zahl n sei

$$I_n(\mathfrak{a}) = \int\limits_{\mathfrak{P}} \frac{\sigma(\mathfrak{p})\, d\mathfrak{p}}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{p}|^{2n}}, \tag{5}$$

insbesondere also

$$I_1(\mathfrak{a}) = I(\mathfrak{a}).$$

Es muß übrigens, um den räumlichen Möglichkeiten gerecht zu werden,

$$|\mathfrak{a} - \mathfrak{p}| \geqq 1 \tag{6}$$

vorausgesetzt werden, da die Ionisationskammer mit dem Präparat $\mathfrak{P}$ notwendig höchstens Randpunkte gemeinsam haben kann. Unter dieser Einschränkung ist offensichtlich

$$0 < I_n(\mathfrak{a}) \leqq 1 \tag{7}$$

für jede Stelle $\mathfrak{a}$ des Raumes.

Durch Vertauschung der Integrationen in (3) erhält man

$$\bar{I}(\mathfrak{a}) = \frac{3}{4\pi} \int\limits_{\mathfrak{P}} \left(\int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{d\mathfrak{x}}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{p} - \mathfrak{x}|^2} \right) \sigma(\mathfrak{p})\, d\mathfrak{p},$$

weshalb die Betrachtungen zunächst auf die Funktion

$$f(\mathfrak{a} - \mathfrak{p}) = f(|\mathfrak{a} - \mathfrak{p}|) = \frac{3}{4\pi} \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{d\mathfrak{x}}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{p} - \mathfrak{x}|^2} \tag{8}$$

beschränkt werden mögen. In der Tat ist ja, da das Integral (8) drehungsinvariant ist, die Funktion $f(\mathfrak{a} - \mathfrak{p})$ allein von der Länge

$$s = |\mathfrak{a} - \mathfrak{p}| \geqq 1 \tag{9}$$

dieses Vektors abhängig, so daß wir erhalten:

$$f(s) = \frac{3}{4\pi} \int\limits_{\mathfrak{K}} \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3}{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - s)^2} \qquad \text{für } s \geqq 1.$$

Die Einführung räumlicher Polarkoordinaten

$$x_1 = \varrho \cos\varphi \cos\psi; \quad x_2 = \varrho \cos\varphi \sin\psi; \quad x_3 = \varrho \sin\varphi$$

liefert die Darstellung

$$f(s) = \frac{3}{4\pi} \int\int\int \frac{\varrho^2\, d\varrho \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\varrho^2 - 2s\varrho \sin\varphi + s^2}$$

[1]) Vgl. *H. A. Bomke* und *W. Specht*, Der Einfluß von endlicher Präparat- und Ionisationskammergröße auf die Dosismessung in unmittelbarer Nähe von Radiumpräparaten. Strahlentherapie 81 (1950), 81—92.

als dreifaches Integral über den Bereich

$$0 \leqq \varrho \leqq 1;\ -\pi/2 \leqq \varphi \leqq +\pi/2;\ 0 \leqq \psi \leqq 2\pi.$$

Die Integration über ψ ist unmittelbar, die Integration über φ nach Einführung der Veränderlichen

$$u^2 = \varrho^2 - 2s\varrho \sin\varphi + s^2;\ udu = -s\varrho\cos\varphi d\varphi$$

auszuführen. Man findet

$$f(s) = \frac{3}{2}\int_0^1 \int_{s-\varrho}^{s+\varrho} \frac{\varrho d\varrho du}{su} = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\varrho}{s}\log\frac{s+\varrho}{s-\varrho}d\varrho$$

und damit

$$f(s) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{s^2-1}{2s}\log\frac{s+1}{s-1}\right) \quad \text{für } s > 1, \tag{10.1}$$

$$\lim_{s\to 1+} f(s) = \frac{3}{2}, \tag{10.2}$$

so daß die Funktion $f(s)$ auch für $s=1$ erklärt ist. Als Reihenentwicklung bestimmt man sehr leicht den Ausdruck

$$f(s) = \sum_0^\infty \frac{3}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{1}{s}\right)^{2n+2}, \tag{11}$$

der übrigens auch für $s=1$ konvergiert. Damit wird wegen gleichmäßiger Konvergenz der Reihe (11)

$$\bar{I}(\mathfrak{a}) = \int_{\mathfrak{P}} f(|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|)\,\sigma(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p} = \sum_0^\infty \frac{3}{(2n+1)(2n+3)}\int_{\mathfrak{P}} \frac{\sigma(\mathfrak{p})\,d\mathfrak{p}}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|^{2n+2}}$$

oder

$$\bar{I}(\mathfrak{a}) = \sum_0^\infty \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} I_{n+1}(\mathfrak{a}). \tag{12}$$

Für zwei beliebige Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ des Präparates $\mathfrak{P}$ ist nun offensichtlich

$$\left(\frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|^2} - \frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{q}|^2}\right)\left(\frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|^{2n}} - \frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{q}|^{2n}}\right) \geqq 0$$

und daher

$$\int_{\mathfrak{P}}\int_{\mathfrak{P}} \left(\frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|^2} - \frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{q}|^2}\right)\left(\frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|^{2n}} - \frac{1}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{q}|^{2n}}\right)\sigma(\mathfrak{p})\,\sigma(\mathfrak{q})\,d\mathfrak{p}d\mathfrak{q} \geqq 0.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Ungleichung

$$I_{n+1}(\mathfrak{a}) \geqq I_n(\mathfrak{a})\,I(\mathfrak{a})$$

und durch vollständige Induktion

$$I_{n+1}(\mathfrak{a}) \geqq I^{n+1}(\mathfrak{a}). \tag{13}$$

Die Anwendung dieser Ungleichung auf (12) liefert die Abschätzung des Meßwertes

$$\bar{I}(\mathfrak{a}) \geqq \sum_0^\infty \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} I^{n+1}(\mathfrak{a}) = f(I^{-\frac{1}{2}}(\mathfrak{a}))$$

oder

$$\bar{I}(\mathfrak{a}) \geqq \Phi(I(\mathfrak{a})) \tag{14}$$

mit der im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ erklärten Funktion

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} x^{n+1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1-x}{\sqrt{x}}\log\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right). \tag{15}$$

Nun ist $\Phi(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ streng monoton und auf das Intervall

$$0 \leqq x \leqq \Phi(x) \leqq \frac{3}{2}$$

beschränkt, weshalb die Umkehrungsfunktion $\Phi^*(x)$ für das Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ erklärt werden kann, wo sie Werte aus $0 \leqq \Phi^*(x) \leqq 1$ annimmt. Setzt man also

$$I^*(\mathfrak{a}) = \Phi^*(\bar{I}(\mathfrak{a})) \tag{16}$$

als *korrigierten Meßwert* an, so besteht wegen

$$\Phi^*(x) \leqq x$$

und der Abschätzung (14) die Ungleichung

$$\bar{I}(\mathfrak{a}) \geqq I^*(\mathfrak{a}) \geqq I(\mathfrak{a}). \tag{17}$$

Daher gilt auch für den relativen Fehler:

$$\Delta(\mathfrak{a}) = \frac{\bar{I}(\mathfrak{a}) - I(\mathfrak{a})}{I(\mathfrak{a})} \geqq \frac{I^*(\mathfrak{a}) - I(\mathfrak{a})}{I(\mathfrak{a})} \geqq 0. \tag{18}$$

In der entgegengesetzten Richtung erhalten wir bei voller Allgemeinheit der Voraussetzungen lediglich aus $|\mathfrak{a} - \mathfrak{p}| \geqq 1$ die Abschätzung

$$I_{n+1}(\mathfrak{a}) = \int\limits_{\mathfrak{P}} \frac{\sigma(\mathfrak{p})\, d\mathfrak{p}}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{p}|^{2n+2}} \leqq \int\limits_{\mathfrak{P}} \frac{\sigma(\mathfrak{p})\, d\mathfrak{p}}{|\mathfrak{a} - \mathfrak{p}|^{2}} = I(\mathfrak{a})$$

und damit

$$\bar{I}(\mathfrak{a}) \leqq I(\mathfrak{a}) \sum_{0}^{\infty} \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{3}{2} I(\mathfrak{a}), \tag{19}$$

für den relativen Fehler also nur

$$\Delta(\mathfrak{a}) \leqq \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Die nachfolgende Tabelle läßt aus dem Meßwert $\bar{I}(\mathfrak{a})$ den korrigierten Meßwert $I^*(\mathfrak{a})$ entnehmen; das Diagramm zeigt die Beschränkungen für den wahren Wert $I(\mathfrak{a})$, die sich aus den beiden Ungleichungen (17) und (19) ergeben.

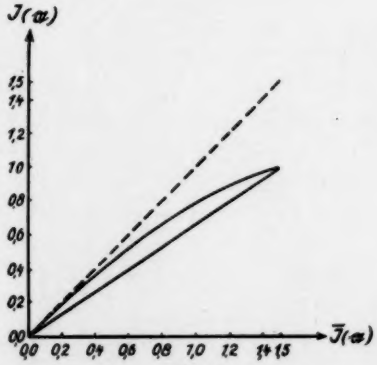


Abb. 1

Von Interesse ist vielleicht noch eine Beurteilung der Abweichung des Meßwertes $\bar{I}(\mathfrak{a})$ vom wahren Werte $I(\mathfrak{a})$ in Abhängigkeit vom Abstand a des Meßpunktes $\mathfrak{a}$ vom Präparat $\mathfrak{P}$:

$$a = \mathrm{Min}\,(|\mathfrak{a} - \mathfrak{p}|) \qquad \text{für } \mathfrak{p} \in \mathfrak{P}.$$

Jedenfalls ist

$$I_{n+1}(\mathfrak{a}) = \int\limits_{\mathfrak{B}} \frac{\sigma(\mathfrak{p})\, d\mathfrak{p}}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|^{2n+2}} \leqq \frac{1}{a^{2n}} \int\limits_{\mathfrak{B}} \frac{\sigma(\mathfrak{p})\, d\mathfrak{p}}{|\mathfrak{a}-\mathfrak{p}|^{2}} = \frac{I(\mathfrak{a})}{a^{2n}}$$

und demnach wegen (12)

$$\bar{I}(\mathfrak{a}) \leqq \sum_{0}^{\infty} \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} \frac{I(\mathfrak{a})}{a^{2n}}.$$

Für den relativen Fehler $\Delta(\mathfrak{a})$ erhalten wir hieraus

$$\Delta(\mathfrak{a}) = \frac{\bar{I}(\mathfrak{a}) - I(\mathfrak{a})}{I(\mathfrak{a})} \leqq \sum_{1}^{\infty} \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} \frac{1}{a^{2n}},$$

oder nach (11)

$$\Delta(\mathfrak{a}) \leqq a^2 f(a) - 1 = \delta(a). \tag{21}$$

Die speziellen Werte

$a =$	1	2	3	4	5
$\delta(a) =$	0,500	0,056	0,023	0,013	0,009

zeigen, daß bereits für Abstände, die das Dreifache des Kammerradius übersteigen, der Meßwert $\bar{I}(\mathfrak{a})$ vom wahren Wert $I(\mathfrak{a})$ um weniger als 2,5 %, für Abstände, die das Fünffache des Kammerradius übersteigen, um weniger als 1 % abweicht.

Tabelle der korrigierten Werte $I^*(\mathfrak{a})$ zu den Meßwerten $\bar{I}(\mathfrak{a})$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0*	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,049	0,059	0,069	0,078	0,088
0,1*	0,098	0,108	0,117	0,126	0,136	0,145	0,154	0,163	0,172	0,182
0,2*	0,192	0,201	0,210	0,219	0,228	0,237	0,246	0,255	0,264	0,273
0,3*	0,282	0,291	0,300	0,308	0,317	0,325	0,334	0,343	0,351	0,359
0,4*	0,367	0,375	0,384	0,393	0,401	0,409	0,418	0,426	0,434	0,442
0,5*	0,450	0,458	0,466	0,473	0,481	0,488	0,496	0,504	0,512	0,519
0,6*	0,527	0,535	0,542	0,549	0,556	0,564	0,571	0,578	0,585	0,592
0,7*	0,599	0,606	0,613	0,620	0,627	0,634	0,641	0,648	0,655	0,661
0,8*	0,668	0,675	0,681	0,687	0,694	0,700	0,707	0,713	0,719	0,726
0,9*	0,732	0,738	0,744	0,750	0,756	0,762	0,768	0,774	0,780	0,785
1,0*	0,791	0,797	0,802	0,808	0,814	0,819	0,824	0,829	0,835	0,840
1,1*	0,845	0,851	0,856	0,861	0,866	0,870	0,875	0,880	0,885	0,890
1,2*	0,894	0,899	0,903	0,908	0,912	0,916	0,921	0,925	0,929	0,933
1,3*	0,937	0,941	0,945	0,949	0,953	0,957	0,960	0,963	0,967	0,970
1,4*	0,973	0,976	0,980	0,984	0,988	0,992	0,995	0,997	0,998	0,999
1,5*	1,000									

Eingegangen 20. März 1952.

Erweiterung von Maßverbänden.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Demetrios A. Kappos* in Erlangen.

Einleitung.

0. 1. Es sei $\mathfrak{B}$ ein σ-Boolering, $\mathfrak{A}$ ein Booleunterring von $\mathfrak{B}$. Es sei ferner $\mu(a)$, $a \in \mathfrak{A}$, ein Maß, d. h. eine reellwertige, nicht negative, additive, endliche Funktion auf $\mathfrak{A}$, die nicht trivial ist: $\mu(a) > 0$ für mindestens ein $a \in \mathfrak{A}$. Man kann bekanntlich das Maß μ zu einem σ-additiven (stetigen) Maß $\bar{\mu}$ auf einem σ-Booleunterring $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$ erweitern. Hierbei arbeitet man genau so wie in der klassischen Theorie, d. h. man erweitert μ zu einem äußeren Maß μ^* auf $\mathfrak{B}$ und erklärt danach die μ^*-Meßbarkeit nach Carathéodory. $\mathfrak{B}'$ besteht dann aus allen μ^*-meßbaren Elementen von $\mathfrak{B}$. Man schreibt $\bar{\mu}(b) = \mu^*(b)$ für $b \in \mathfrak{B}'$. Damit $\mathfrak{B}'$ ein Booleoberring von $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mu}(a) = \mu(a)$ für $a \in \mathfrak{A}$, also $\bar{\mu}$ eine Erweiterung von μ ist, ist *notwendig*, daß μ stetig (σ-additiv) auf $\mathfrak{A}$ relativ $\mathfrak{B}$ ist, d. h. es soll gelten: Aus $(\mathfrak{B}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = \emptyset$, $a_n \geqq a_{n+1}$, $a_n \in \mathfrak{A}$ folgt $\lim \mu(a_n) = 0$. Man braucht nicht die σ-Regularität von $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{B}$ vorauszusetzen[1]). Ist insbesondere $\mathfrak{A}$ σ-regulär bezüglich $\mathfrak{B}$, so folgt aus der Stetigkeit relativ $\mathfrak{B}$ die einfache Stetigkeit von μ auf $\mathfrak{A}$ und umgekehrt.

0. 2. Betrachtet man $\mathfrak{A}$ als einen abstrakten Boolering, der ein Maß μ trägt, setzt a priori die Existenz eines σ-Booleoberringes $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ *nicht* voraus und sucht den Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ des Maßes μ derart zu einem σ-Boolering $\mathfrak{B}^*$ zu erweitern, daß die Erweiterung $\bar{\mu}$ des Maßes μ σ-additiv wird, so erscheinen hierfür zuerst solche σ-Erweiterungen $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{A}$ als geeignet, in welchen $\mathfrak{A}$ σ-regulär einbettbar ist (kurz σ-reguläre Erweiterungen). Im allgemeinen existieren aber mehrere σ-reguläre Erweiterungen von $\mathfrak{A}$, die zueinander nicht isomorph sind, auch wenn man fordert, daß die Einbettung $\mathfrak{B}_0$[2]) von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}^*$ eine σ-erzeugende Basis von $\mathfrak{B}^*$ ist, d. h. $\mathfrak{B}^*$ mit dem kleinsten σ-Booleunterring von $\mathfrak{B}^*$ über $\mathfrak{B}_0$ übereinstimmt; demgemäß ist in diesem Falle die Lösung des Erweiterungsproblems des Maßes nicht eindeutig. Für die Lösung des Problems ist hier notwendig die Stetigkeit des Maßes μ auf $\mathfrak{A}$. Daraus folgt die Stetigkeit des Maßes auf der Einbettung $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}^*$, die wegen der σ-Regularität mit der Stetigkeit auf $\mathfrak{B}_0$ relativ $\mathfrak{B}^*$ gleichwertig ist. Wünscht man eine Eindeutigkeit der Lösung bis auf Isometrie (= Isomorphie, bei der entsprechende Elemente gleiches Maß haben), so muß man sich auf die sogenannten totalregulären σ-Erweiterungen $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{A}$ beschränken, bei welchen die Einbettung $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}^*$ invariant (regulär) bezüglich der Operationen mit beliebig vielen Gliedern ist.

---

[1]) $\mathfrak{A}$ ist σ-regulär bezüglich $\mathfrak{B}$, wenn aus der Existenz von $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathfrak{A}$, in $\mathfrak{A}$ folgt $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = (\mathfrak{B}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$. Hinsichtlich sonstiger Bezeichnungen vgl. § 1.

[2]) $\mathfrak{B}_0$ heißt eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}^*$, wenn $\mathfrak{B}_0$ ein Booleunterring von $\mathfrak{B}^*$ und isomorph zu $\mathfrak{A}$ ist.

0. 3. Betrachtet man aber das Erweiterungsproblem, wie es in Nr. **0. 1** gestellt wurde, näher, so sieht man, daß $\mathfrak{A}$ als Booleunterring von $\mathfrak{B}$ aufgefaßt nicht notwendig σ-regulär zu sein braucht. Für die Existenz der Lösung ist lediglich die Stetigkeit des Maßes μ auf $\mathfrak{A}$ relativ $\mathfrak{B}$ maßgebend. Es ist also sinnvoll, bei der Lösung des Erweiterungsproblems von Nr. **0. 2** auch sämtliche σ-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ zu betrachten, die regulär mindestens bezüglich der Operationen mit endlich vielen Gliedern sind. Läßt man solche σ-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ zu, so existiert stets eine σ-Erweiterung $\mathfrak{B}^*$ von $\mathfrak{A}$ derart, daß das Maß μ auf der Einbettung $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}^*$ stetig relativ $\mathfrak{B}^*$ ist. Die Stetigkeit des Maßes μ auf $\mathfrak{A}$ ist dann nicht notwendig für die Existenz von Lösungen. Es existieren wieder mehrere zueinander nicht isomorphe Lösungen, aber der σ-Boolering der Restklassen (meßbare Elemente mod Elementen mit dem Maß Null) ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt, was übrigens im Falle von Nr. **0. 2** auch gilt, wenn Lösungen existieren. Wie wir in § 2 zeigen, kann dieser Restklassen-σ-Boolering mit seinem Maß direkt durch eine metrische Erweiterung mit Hilfe der Nikodymschen Entfernung gewonnen werden. In § 3 werden wir diese Methode zu Bestimmung des Cartesischen Produktes von Maßverbänden an, und schließlich lösen wir in § 4 das Erweiterungsproblem mit Hilfe der Stoneschen Darstellung.

§ 1. Vorbemerkungen und Bezeichnungen.

1. 1. Einen nicht leeren algebraischen idempotenten Ring $\mathfrak{B} = (a, b, \ldots)$ mit Einheit e bezeichnen wir als einen *Boolering*[3]). In $\mathfrak{B}$ wird durch $a \dotplus b$ die *Addition*, durch ab die *Multiplikation* und durch $\emptyset$ die Null bezeichnet. Es gilt $a \dotplus a = \emptyset$, $aa = a$, und die Multiplikation ist kommutativ.

1. 2. Es sei die Folge $(a_i)_{i \in I}$, $a_i \in B$, $i \in I$, nicht leer. Existiert ein Element u bzw. d in $\mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften:

1) $a_i u = a_i$ bzw. $a_i d = d$ für jedes $i \in I$;

2) aus $x \in \mathfrak{B}$ mit $x a_i = a_i$ bzw. $x a_i = x$ für jedes $i \in I$ folgt $xu = u$ bzw. $xd = x$,

so ist u bzw. d eindeutig bestimmt und wird mit $u = (\mathfrak{B}) \bigcup_{i \in I} a_i$ bzw. $d = (\mathfrak{B}) \bigcap_{i \in I} a_i$ bezeichnet und die *Vereinigung* (*Supremum*) bzw. der *Durchschnitt* (*Infinum*) aller a_i, $i \in I$, in $\mathfrak{B}$ genannt. Ist I endlich, so existieren u und d stets. Der Durchschnitt fällt dann mit dem Produkt zusammen, d. h. es gilt $d = a_1 \cap \cdots \cap a_k = a_1 \cdots a_k$. Für die Vereinigung von zwei Elementen gilt: $a_1 \cup a_2 = a_1 \dotplus a_2 \dotplus a_1 a_2$. Das Element $e \dotplus a$ bezeichnet man als *Komplement* a' von a. Die Operationen $\cup$, $\cap$ und die Komplementbildung führen in $\mathfrak{B}$ die Struktur eines *Booleverbandes* mit Einheit ein. Umgekehrt kann jeder Booleverband mit Einheit als ein Boolering mit Einheit aufgefaßt werden.

1. 3. Wir bezeichnen durch $|M|$ die *Mächtigkeit* einer Menge M. Ein Boolering $\mathfrak{B}$ heißt ein $\mathfrak{m}$-*Boolering*, wenn für jedes I mit $|I| \leqq \mathfrak{m}$ und $a_i \in \mathfrak{B}$, $i \in I$, der Durchschnitt $(\mathfrak{B}) \bigcap_{i \in I} a_i$ in $\mathfrak{B}$ existiert. Man beweist dann, daß auch $(\mathfrak{B}) \bigcup_{i \in I} a_i$ in $\mathfrak{B}$ existiert. Ein $\aleph_0$-Boolering wird auch σ-*Boolering* genannt. Ein $|\mathfrak{B}|$-Boolering $\mathfrak{B}$ heißt ein *Vollboolering*.

1. 4. Eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ eines $\mathfrak{m}$-Booleringes $\mathfrak{B}$ heißt ein $\mathfrak{m}_1$-*Booleunterring* von $\mathfrak{B}$, $2 \leqq \mathfrak{m}_1 \leqq \mathfrak{m}$, wenn $\mathfrak{A}$ abgeschlossen für die Ringoperationen ist, dieselbe Null und Eins wie $\mathfrak{B}$ hat und außerdem die folgende Bedingung erfüllt:

(E) Für jede Folge $(a_i)_{i \in I}$, $a_i \in \mathfrak{A}$ mit $|I| \leqq \mathfrak{m}_1$ ist $(\mathfrak{B}) \bigcap_{i \in I} a_i = a$ in $\mathfrak{A}$.

Es ist dann offenbar $(\mathfrak{A}) \bigcap_{i \in I} a_i = a$.

Wenn $\mathfrak{m}_1 \geqq 2$ endlich ist, so nennen wir $\mathfrak{A}$ einfach einen *Booleunterring* von $\mathfrak{B}$.

---

[3]) In der vorliegenden Arbeit sind alle Booleringe bzw. Booleunterringe mit Ausnahme von Idealen mit Einheit vorausgesetzt.

1. 5. Ein $\mathfrak{m}_1$-Booleunterring $\mathfrak{A}$ von einem $\mathfrak{m}$-Boolering $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{m}_1 \leqq \mathfrak{m}$ heißt $\mathfrak{m}_2$-*regulär* (*invariant*) bezüglich $\mathfrak{B}$, wenn folgende Bedingung zutrifft:

(R) Aus der Existenz von $(\mathfrak{A}) \bigcap_{i \in I} a_i$, $a_i \in \mathfrak{A}$, in $\mathfrak{A}$ für ein beliebiges I mit $|I| \leqq \mathfrak{m}_2$ folgt die Existenz von $(\mathfrak{B}) \bigcap_{i \in I} a_i$ in $\mathfrak{B}$, und es gilt $(\mathfrak{B}) \bigcap_{i \in I} a_i = (\mathfrak{A}) \bigcap_{i \in I} a_i$.

Für $\mathfrak{m}_2 = |\mathfrak{A}|$ heißt $\mathfrak{A}$ totalregulär bezüglich $\mathfrak{B}$.

Aus der Definition Nr. 1. 4 folgt: Ein $\mathfrak{m}_1$-Booleunterring $\mathfrak{A}$ von einem $\mathfrak{m}$-Boolering $\mathfrak{B}$ ist für $\mathfrak{m}_2 \leqq \mathfrak{m}_1 \leqq \mathfrak{m}$ stets $\mathfrak{m}_2$-regulär bezüglich $\mathfrak{B}$. Insbesondere ist also ein σ-Booleunterring eines σ-Booleringes stets σ-regulär.

1. 6. Es sei $\mathfrak{B}$ ein $\mathfrak{m}$-Boolering und $\mathfrak{K}$ eine beliebige nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{B}$. Dann existiert immer der kleinste Booleunterring bzw. $\mathfrak{m}_1$-Booleunterring, $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m}_1 \leqq \mathfrak{m}$, von $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{K}$, in Zeichen $R(\mathfrak{K})$ bzw. $R_{\mathfrak{m}_1}(\mathfrak{K})$, und er ist eindeutig bestimmt. Hat eine Teilmenge $\mathfrak{K}$ des $\mathfrak{m}$-Booleringes $\mathfrak{B}$ die Eigenschaft $R(\mathfrak{K}) = \mathfrak{B}$ bzw. $R_{\mathfrak{m}_1}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{B}$, $\aleph_0 \leqq \mathfrak{m}_1 \leqq \mathfrak{m}$, so heißt $\mathfrak{K}$ eine *erzeugende* bzw. $\mathfrak{m}_1$-*erzeugende Basis* von $\mathfrak{B}$. Für $\mathfrak{m}_2 > \mathfrak{m}_1$ braucht im allgemeinen $R_{\mathfrak{m}_1}(\mathfrak{K})$, als $\mathfrak{m}_1$-Booleunterring von $\mathfrak{B}$ betrachtet, nicht $\mathfrak{m}_2$-regulär zu sein.

1. 7. Es sei $\mathfrak{B}$ ein Boolering (bzw. σ-Boolering). Eine Teilmenge $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{B}$ heißt ein *Ideal* (bzw. σ-*Ideal*) in $\mathfrak{B}$, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

1) $\emptyset \in \mathfrak{J}$;

2) aus $x_1, x_2 \in \mathfrak{J}$ folgt $x_1 \dotplus x_2 \in \mathfrak{J}$ (bzw. aus $x_i \in \mathfrak{J}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ folgt $(\mathfrak{B}) \bigcup_{i=1}^{\infty} x_i \in \mathfrak{J}$);

3) aus $x \in \mathfrak{J}$, y beliebig in $\mathfrak{B}$ folgt $yx \in \mathfrak{J}$.

Ein Ideal ist auch ein Boolering, aber nicht notwendig mit Einheit; außerdem braucht, wenn ein Ideal eine Einheit hat, diese im allgemeinen nicht mit der des Ringes übereinzustimmen.

Ein Ideal $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{B}$ heißt *Primideal* in $\mathfrak{B}$, wenn es folgende Eigenschaften hat:

1) e gehört nicht zu $\mathfrak{P}$;

2) für jedes $x \in \mathfrak{B}$ gehört entweder x oder x' zu $\mathfrak{P}$.

Wenn $\mathfrak{B}$ ein Boolering und $\mathfrak{J}$ ein Ideal in $\mathfrak{B}$ ist, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ den Restklassenring mod $\mathfrak{J}$; $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ ist wieder ein Boolering (bzw. σ-Boolering, wenn $\mathfrak{B}$ ein σ-Boolering und $\mathfrak{J}$ ein σ-Ideal ist); $x/\mathfrak{J}$ bedeutet die Restklasse aus $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ mit dem Repräsentanten $x \in \mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{A}$ ein Booleunterring von $\mathfrak{B}$, so bedeutet $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ die Gesamtheit der Restklassen $a/\mathfrak{J}$ aus $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ für alle $a \in \mathfrak{A}$. Es ist dann $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ ein Booleunterrring von $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$.

1. 8. Es seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ Booleringe. Eine eindeutige Abbildung f von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$ heißt ein *Homomorphismus*, in Zeichen $\mathfrak{B} \underset{f}{\sim} \mathfrak{B}^*$, wenn aus $a, b \in \mathfrak{B}$ stets $f(ab) = f(a)\, f(b)$ und $f(a \dotplus b) = f(a) \dotplus f(b)$ folgt. Gilt außerdem: Aus $(\mathfrak{B}) \bigcap_{i=1}^{\infty} a_i = \emptyset$ folgt $(\mathfrak{B}^*) \bigcap_{i=1}^{\infty} f(a_i) = \emptyset^*$, so heißt der Homomorphismus ein σ-*Homomorphismus*, in Zeichen $\mathfrak{B} \overset{\sigma}{\underset{f}{\sim}} \mathfrak{B}^*$. Ist ein Homomorphismus eineindeutig, so heißt er ein *Isomorphismus*, in Zeichen $\mathfrak{B} \underset{f}{\approx} \mathfrak{B}^*$. Besteht ein Isomorphismus $\mathfrak{B} \underset{f}{\approx} \mathfrak{B}^*$ und existiert $(\mathfrak{B}) \bigcap_{i \in I} a_i = a$ in $\mathfrak{B}$, so existiert $(\mathfrak{B}^*) \bigcap_{i \in I} f(a_i)$ und ist gleich $f(a)$. Entsprechendes gilt für Vereinigungen. Ist aber $\mathfrak{B}^*$ ein Booleunterring von einem Boolering $\tilde{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B} \underset{f}{\approx} \mathfrak{B}^*$, so folgt aus $(\mathfrak{B}) \bigcap_{i \in I} a_i = a$ dann und nur dann $(\tilde{\mathfrak{B}}) \bigcap_{i \in I} f(a_i) = f(a)$, $I = (1, 2, \ldots)$, wenn $\mathfrak{B}^*$ σ-regulär bezüglich $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist; wenn also $\mathfrak{B}$ ein σ-Boolering ist, so ist auch $\mathfrak{B}^*$ ein σ-Boolering, jedoch nicht stets ein σ-Booleunterring von $\tilde{\mathfrak{B}}$.

1. 9. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Boolering und $\mathfrak{B}$ ein $\mathfrak{m}$-Boolering mit $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$. Existiert ein Booleunterring $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$, der zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist, so heißt $\mathfrak{B}_0$ eine *Einbettung* von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{B}_0$ $\mathfrak{m}_2$-regulär bzw. totalregulär bezüglich $\mathfrak{B}$, so heißt $\mathfrak{B}_0$ eine $\mathfrak{m}_2$-*reguläre* bzw. *totalreguläre Einbettung* von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$. Nach Stone [1][4]) kann jeder Boolering $\mathfrak{B}$ auf einen Boolering von Mengen (Mengenkörper) $\mathfrak{K}$ isomorph abgebildet werden. Betrachtet man nun $\mathfrak{K}$ als eine Einbettung von $\mathfrak{B}$ in einem σ-Oberkörper von $\mathfrak{K}$, so ist diese Einbettung im allgemeinen nicht σ-regulär.

1. 10. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Boolering, $\mathfrak{B}_0$ eine $\mathfrak{m}_1$-reguläre (bzw. totalreguläre) Einbettung von $\mathfrak{A}$ in einen $\mathfrak{m}$-Boolering $\mathfrak{B}$; gilt dann $R_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{B}$, so heißt $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{m}_1$-*reguläre* (bzw. *totalreguläre*) $\mathfrak{m}$-*Erweiterung* von $\mathfrak{A}$; im Fall $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}$ sagen wir auch: $\mathfrak{B}$ ist eine $\mathfrak{m}$-*reguläre Erweiterung* von $\mathfrak{A}$. Nach MacNeille [2] kann man stets einen beliebigen Boolering $\mathfrak{A}$ totalregulär in einen Vollboolering $\mathfrak{B}$ einbetten, den man durch Bildung von Dedekindschen Schnitten aus den Elementen von $\mathfrak{A}$ erklärt. Es sei $\mathfrak{B}_0$ die Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$; der kleinste σ-Booleunterring $R_\sigma(\mathfrak{B}_0)$ von $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{B}_0$ ist dann eine totalreguläre σ-Erweiterung von $\mathfrak{A}$, die sogenannte *minimale σ-Erweiterung* von $\mathfrak{A}$; sie ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (vgl. auch [3]). Im Gegensatz zu den totalregulären σ-Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ brauchen die σ-regulären Erweiterungen von $\mathfrak{A}$ nicht zueinander isomorph zu sein. Verzichtet man auf die $\mathfrak{m}$-Regularität der Erweiterungen für $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, so kann man als eine σ-Erweiterung von $\mathfrak{A}$ jeden σ-Boolering $\mathfrak{B}$ erklären, der eine beliebige isomorphe Einbettung $\mathfrak{B}_0$ für $\mathfrak{A}$ so enthält, daß $\mathfrak{B} = R_\sigma(\mathfrak{B}_0)$ gilt.

Im folgenden werden wir σ-Erweiterungen von Booleringen mit Maß (Maßverbänden) untersuchen, bei welchen neben der algebraischen Struktur des Ringes auch die Eigenschaften des Maßes berücksichtigt werden.

§ 2. Metrische Erweiterungen von Maßverbänden.

2. 1. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Boolering und $\mu(a)$, $a \in \mathfrak{A}$, eine eindeutige reelle Funktion auf $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften: $\mu(a)$ ist

1) *reduziert*, d. h. $\mu(a) \geqq 0$, und zwar $\mu(a) = 0$ dann und nur dann, wenn $a = \emptyset$ ist.

2) *normiert*, d. h. $\mu(e) = 1$, wobei e die Einheit von $\mathfrak{A}$ ist.

3) *additiv*, d. h. $\mu(a \cup b) = \mu(a) + \mu(b)$, $ab = \emptyset$, $a, b \in \mathfrak{A}$.

Wir bezeichnen dann $(\mathfrak{A}, \mu)$ als einen *Maßverband* und μ als ein *Maß* auf $\mathfrak{A}$.

Ein Maß μ heißt *stetig* auf $\mathfrak{A}$, wenn folgendes gilt:

(S) Aus $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = \emptyset$, $a_n \geqq a_{n+1}$; $a_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ folgt $\lim \mu(a_n) = 0$.

Die Stetigkeit (S) ist bekanntlich gleichwertig mit der σ-*Additivität*:

(T) Aus $(\mathfrak{A}) \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n = a \in \mathfrak{A}$ mit $a_n a_k = \emptyset$, $n \neq k$, folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(a_n) = \mu(a)$.

Wenn $(\mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-Boolering $\mathfrak{A}$ mit stetigem (σ-additivem) Maß $\mu(a)$, $a \in \mathfrak{A}$, ist, so bezeichnen wir $(\mathfrak{A}, \mu)$ als einen *σ-Maßverband*.

Ist $\mathfrak{A}$ ein Booleunterring von $\mathfrak{B}$ und $(\mathfrak{B}, \mu)$ ein Maßverband, so heißt $(\mathfrak{A}, \hat{\mu})$ mit $\hat{\mu}(a) = \mu(a)$ für jedes $a \in \mathfrak{A}$ ein *Maßunterverband* von $(\mathfrak{B}, \mu)$. Statt $\hat{\mu}$ schreiben wir im folgenden einfach μ, also $(\mathfrak{A}, \mu)$. Aus der Stetigkeit des Maßes in $(\mathfrak{B}, \mu)$ folgt nicht stets die Stetigkeit des Maßes in einem Maßunterverband $(\mathfrak{A}, \mu)$. Es gilt nämlich:

---

[4]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

2. 1. 1. **Satz.** *Es sei* $(\mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßunterverband des Maßverbandes* $(\mathfrak{B}, \mu)$. *Es sei ferner* μ *auf* $\mathfrak{B}$ *stetig. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

1) μ *ist stetig auf* $\mathfrak{A}$.

2) $\mathfrak{A}$ *ist* σ*-regulär bezüglich* $\mathfrak{B}$.

Beweis. Wenn $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{B}$ σ-regulär ist, so ist offenbar μ auf $\mathfrak{A}$ stetig. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß die σ-Regularität von $\mathfrak{A}$ bezüglich $\mathfrak{B}$ aus der Stetigkeit von μ auf $\mathfrak{A}$ folgt. Angenommen, μ sei stetig auf $\mathfrak{A}$, jedoch $\mathfrak{A}$ nicht σ-regulär bezüglich $\mathfrak{B}$; dann gäbe es ein $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = \emptyset$, während $(\mathfrak{B}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = a \neq \emptyset$ in $\mathfrak{B}$ oder $(\mathfrak{B}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht in $\mathfrak{B}$ vorhanden wäre. Im ersten Fall wäre aber $\lim \mu(a_n) = \mu(a) > 0$, im zweiten Fall gäbe es mindestens ein $b \in \mathfrak{B}$, das nicht in $\mathfrak{A}$ liegt, so daß $b \neq \emptyset$, $b \leqq a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, wäre; wir hätten dann auch $\lim \mu(a_n) \geqq \mu(b) > 0$, also in beiden Fällen einen Widerspruch zu der Voraussetzung, daß μ auf $\mathfrak{A}$ stetig ist.

2. 2. Es sei $(\mathfrak{B}, \mu)$ ein Maßverband und $(\mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßunterverband von $(\mathfrak{B}, \mu)$. Das Maß μ heißt *stetig* auf $\mathfrak{A}$ *relativ* $\mathfrak{B}$, wenn aus

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots, \; a_n \in \mathfrak{A} \text{ und } (\mathfrak{B}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = \emptyset \text{ stets } \lim \mu(a_n) = 0$$

folgt. Aus der Stetigkeit von μ auf $\mathfrak{B}$ folgt dann offenbar die Stetigkeit von μ auf $\mathfrak{A}$ relativ $\mathfrak{B}$ auch dann, wenn $\mathfrak{A}$ nicht σ-regulär bezüglich $\mathfrak{B}$ ist.

Die übliche Definition der Stetigkeit (σ-Additivität) eines Maßes auf einem Mengenkörper $\mathfrak{K}$ von Teilmengen einer Grundmenge E ist, in unserem Sinne (*verbandstheoretisch*) betrachtet, auch eine Stetigkeit von μ auf $\mathfrak{K}$, aber relativ des kleinsten σ-Körpers $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{K}$ oder, was gleichwertig ist, relativ des Körpers aller Teilmengen der Grundmenge E. Denn in $\mathfrak{K}$ kann ein Durchschnitt von abzählbar vielen Elementen verbandstheoretisch leer sein, ohne daß dies mengentheoretisch der Fall ist. Wir bezeichnen diese Stetigkeit als eine *mengentheoretische Stetigkeit.* Aus der mengentheoretischen Stetigkeit des Maßes μ auf einem Körper $\mathfrak{K}$ braucht nicht stets die Stetigkeit im Sinne der Definition (S) von μ auf $\mathfrak{K}$ zu folgen, wie folgendes Beispiel zeigt:

2. 3. *Beispiel.* Es sei $\{x\colon 0 \leqq x < 1\}$, $\mathfrak{D}$ das System aller halboffenen Teilintervalle von E, nämlich $I = [a, b) = \{x\colon 0 \leqq a \leqq x < b \leqq 1\}$. Es sei ferner $\mathfrak{K}$ der kleinste Mengenkörper über $\mathfrak{D}$. Wir nehmen eine streng monoton wachsende Funktion $f(x)$ auf $0 \leqq x \leqq 1$, für welche $f(0) = 0, f(1) = 1$ gilt, und setzen $\mu(I) = f(b) - f(a)$ für jedes $I \in \mathfrak{D}$. Wir setzen weiter voraus, daß $f(x)$ linksseitig stetig, aber mit gewissen rechtsseitigen Unstetigkeiten behaftet ist. $\mu(I)$ ist mengentheoretisch stetig auf $\mathfrak{D}$ und kann in bekannter Weise stetig auf $\mathfrak{K}$ erweitert werden. μ ist aber im Sinne der Definition (S) nicht stetig auf $\mathfrak{K}$. Ist nämlich c ein Unstetigkeitspunkt von $f(x)$ und $I_n = [c, x_n)$, wobei $x_n > x_{n+1}$ für $n = 1, 2, \ldots$ und $\lim x_n = c$ ist, so ist $(\mathfrak{K}) \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$, aber $\lim \mu(I_n) \neq 0$. Mengentheoretisch ist der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ nicht leer, sondern gleich dem Punkt (c); diesem Punkt wird bei der mengentheoretischen Erweiterung des Maßes auf den kleinsten σ-Körper $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{K}$ ein positives Maß zugeordnet.

2. 4. Wir wenden uns jetzt der Frage der Erweiterung eines Maßverbandes zu einem σ-Maßverband zu. Wir definieren zuerst:

Definition 1. *Zwei Maßverbände* $(\mathfrak{A}, \mu)$ *und* $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ *heißen isometrisch, wenn ein Isomorphismus* $\mathfrak{A} \underset{f}{\approx} \hat{\mathfrak{A}}$ *existiert derart, daß* $\mu(a) = \hat{\mu}(f(a))$ *für jedes* $a \in \mathfrak{A}$ *gilt.*

Definition 2. *Ein* σ*-Maßverband* $(\mathfrak{B}, \nu)$ *heißt eine* σ*-Erweiterung eines Maßverbandes* $(\mathfrak{A}, \mu)$, *wenn ein Maßunterverband* $(\mathfrak{B}_0, \nu)$ *von* $(\mathfrak{B}, \nu)$ *mit folgenden Eigenschaften existiert:*

1) $(\mathfrak{B}_0, \nu)$ *ist isometrisch zu* $(\mathfrak{A}, \mu)$, *d. h. eine sogenannte isometrische Einbettung von* $(\mathfrak{A}, \mu)$ *in* $(\mathfrak{B}, \nu)$.

2) $\mathfrak{B}_0$ *ist ein* σ*-erzeugende Basis von* $\mathfrak{B}$, *d. h. es gilt* $\mathfrak{B} = R_\sigma(\mathfrak{B}_0)$.

2. 5. *Metrik in Maßverbänden.* Es sei $(\mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßverband. Wir definieren nach Nikodym (vgl. [4], [5], [6]) durch $r(a, b) = \mu(a \dot{+} b)$ für jedes Paar $a, b \in \mathfrak{A}$ eine *Entfernung* $r(a, b)$, die bekanntlich die drei Eigenschaften einer metrischen Entfernung besitzt. $\mathfrak{A}$ wird hiermit zu einem metrischen Raum. Vervollständigt man nun im Sinn der Topologie den so erklärten metrischen Raum und betrachtet dabei die algebraische Struktur des Booleringes $\mathfrak{A}$ und die Eigenschaften des Maßes, so erweist sich, daß der Maßverband $(\mathfrak{A}, \mu)$ durch diese Vervollständigung zu einem σ-Maßverband erweitert wird, und dies auch dann, wenn das Maß μ auf $\mathfrak{A}$ nicht stetig ist, wie im folgenden gezeigt wird.

Bemerkung. In den folgenden Nummern dieses Paragraphen wird stets $(\mathfrak{A}, \mu)$ als ein Maßverband vorausgesetzt.

2. 6. Für eine Folge $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ aus $\mathfrak{A}$ soll $\mu\text{-}\lim a_n = a \in \mathfrak{A}$ bedeuten: $\lim \mu(a_n \dot{+} a) = 0$, also *Konvergenz im Sinne der Metrik von* Nr. 2. 5. Wir nennen diese Konvergenz *μ-Konvergenz.* Die Schreibweise

$$(\mathfrak{A})\, a_n \uparrow a \text{ bzw. } (\mathfrak{A})\, a_n \downarrow a$$

bedeutet

$$a_n \leqq a_{n+1} \text{ bzw. } a_n \geqq a_{n+1} \text{ für } n = 1, 2, \ldots \text{ und } (\mathfrak{A}) \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n = a \text{ bzw. } (\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = a,$$

d. h. die *Ordnungs-* (*algebraische*) *Konvergenz* von monotonen Folgen (vgl. [12], Ch. IV, Nr. 8, und [3]).

Es sei $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$; existieren zwei Folgen $(\mathfrak{A})\, s_n \uparrow s$ und $(\mathfrak{A})\, d_n \downarrow d$ mit $s_n \leqq a_n \leqq d_n$ und $s = d = a$, so schreiben wir

$$(\mathfrak{A})\, a_n \to a \text{ oder auch } (\mathfrak{A}) \lim \operatorname{alg} a_n = a.$$

Ist $\mathfrak{A}$ ein σ-Boolering, so ist (vgl. [3])

$$(\mathfrak{A})\, a_n \to a \text{ gleichwertig mit } (\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\tau=0}^{\infty} a_{n+\tau} = (\mathfrak{A}) \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\tau=0}^{\infty} a_{n+\tau}.$$

Man zeigt leicht:

(a) *Aus* $(\mathfrak{A})\, a_n \downarrow a$ *bzw.* $(\mathfrak{A})\, a_n \uparrow a$ *folgt* $\lim \mu(a_n) \geqq \mu(a)$ *bzw.* $\lim \mu(a_n) \leqq \mu(a)$, *d. h. in beiden Fällen* $\lim \mu(a_n \dot{+} a) \geqq 0$. *Gilt nur Gleichheit, so ist* $\mu\text{-}\lim a_n = a$. *In diesem letzten Fall heißt* $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$ *bzw.* $(\mathfrak{A}) \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$ *ein in* $\mathfrak{A}$ *existierender* μ*-stetiger Durchschnitt bzw. eine Vereinigung.*

(b) *Definition. Gilt* $(\mathfrak{A}) \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n = s$ *bzw.* $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = d$ *für eine Folge* (a_n) *und ist* $\lim \mu(s_n) = \mu(s)$ *bzw.* $\lim \mu(d_n) = \mu(d)$, *wobei* $s_n = a_1 \cup \cdots \cup a_n$ *bzw.* $d_n = a_1 \cap \cdots \cap a_n$ *ist, so heißt auch* $(\mathfrak{A}) \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n$ *bzw.* $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine in* $\mathfrak{A}$ *existierende* μ*-stetige Vereinigung bzw. ein Durchschnitt.*

(c) *Wenn aus* $(\mathfrak{A})\, a_n \to a$ *stets* $\lim \mu(a_n) = \mu(a)$ *folgt, so gilt* $\mu\text{-}\lim a_n = a$ *und man nennt die algebraische Konvergenz* μ*-stetig.*

(d) *Wenn das Maß auf* $\mathfrak{A}$ *stetig ist, so ist jede in* $\mathfrak{A}$ *existierende Vereinigung bzw. jeder Durchschnitt von abzählbar vielen Elementen* μ*-stetig und aus* $(\mathfrak{A})\, a_n \to a$ *folgt* $\mu\text{-}\lim a_n = a$.

2. 7. ${}_F(a_n)$ bedeutet: (a_n) ist eine *μ-Fundamentalfolge* (d. h. eine Fundamentalfolge bezüglich der Metrik von Nr. 2. 5) aus $\mathfrak{A}$; man zeigt leicht:

(e) *Aus ${}_F(a_n)$ und ${}_F(b_n)$ folgt ${}_F(a_n \dotplus b_n)$ bzw. ${}_F(a_n b_n)$.*

(f) *Aus μ-lim $a_n = a$ in $\mathfrak{A}$ folgt ${}_F(a_n)$.*

Es sei $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{N}$ die Gesamtheit aller μ-Fundamentalfolgen bzw. μ-Konvergentenfolgen bzw. μ-Nullfolgen in $\mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{M} > \mathfrak{K} > \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}$ nicht leer. Es gilt, falls ${}_F(a_n)$ auch als Symbol für die μ-Fundamentalfolge (a_n) genommen wird:

(g) *Erklärt man in $\mathfrak{M}$ eine Gleichheit: ${}_F(a_n) = {}_F(b_n)$ dann und nur dann, wenn $a_n = b_n$ ist für $n = 1, 2, \ldots$, und zwei Operationen:*

$$ {}_F(a_n) \dotplus {}_F(b_n) = {}_F(a_n \dotplus b_n); \quad {}_F(a_n) \cdot {}_F(b_n) = {}_F(a_n b_n), $$

so ist $\mathfrak{M}$ ein Boolering, $\mathfrak{K}$ ein Booleunterring von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ein Ideal in $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{K}$; hierbei ist die konstante Folge ${}_F(e)$ bzw. ${}_F(\emptyset)$ die Einheit bzw. die Null. $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ist auch ein Boolering und $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{K}/\mathfrak{N}$ ein Booleunterring von $\mathfrak{B}^*$.

Wir bemerken: $\mathfrak{B}_0$ ist im allgemeinen nicht σ-regulär bezüglich $\mathfrak{B}^*$.

(h) *Die Abbildung $\mathfrak{B}_0 \ni {}_F(a)/\mathfrak{N} \underset{\uparrow}{\to} a \in \mathfrak{A}$, wobei ${}_F(a)$ eine konstante μ-Fundamentalfolge in $\mathfrak{A}$ bedeutet, ist ein Isomorphismus, d. h. $\mathfrak{B}_0$ ist eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}^*$.*

2. 8. *Das Maß in $\mathfrak{B}^*$.* Jedem ${}_F(a_n)/\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}^*$ ordnen wir durch die Festsetzung $\hat{\mu}({}_F(a_n)/\mathfrak{N}) = \lim \mu(a_n)$, welcher stets existiert, einen reellen Wert zu. Diese Zuordnung ist eindeutig, d. h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ${}_F(a_n)$ der Restklasse ${}_F(a_n)/\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}^*$. Hiermit ist auch jedem Element von $\mathfrak{B}_0$ ein Wert $\hat{\mu}({}_F(a)/\mathfrak{N}) = \mu(a)$ zugeordnet.

2. 8. 1. **Satz.** *$(\mathfrak{B}^*, \hat{\mu})$ ist ein Maßverband, d. h. $\hat{\mu}$ hat die Eigenschaften* 1), 2) *und* 3) *von Nr.* 2. 1; *$(\mathfrak{B}_0, \hat{\mu})$ ist ein Maßunterverband von $(\mathfrak{B}^*, \hat{\mu})$ und isometrisch zu $(\mathfrak{A}, \mu)$, d. h. eine isometrische Einbettung von $(\mathfrak{A}, \mu)$ in $(\mathfrak{B}^*, \hat{\mu})$.*

Beweis. Daß $\hat{\mu}$ die Eigenschaften 1) und 2) von Nr. 2. 1 hat, folgt unmittelbar aus der Definition von $\hat{\mu}$. Wir zeigen also nur die Additivität von $\hat{\mu}$, d. h. Eigenschaft 3). Es seien ${}_F(a_n), {}_F(b_n) \in \mathfrak{M}$ mit ${}_F(a_n)/\mathfrak{N} \cdot {}_F(b_n)/\mathfrak{N} = {}_F(\emptyset)/\mathfrak{N}$, also ${}_F(a_n b_n) \in \mathfrak{N}$. Dann haben wir:

$$ \begin{aligned} \hat{\mu}({}_F(a_n)/\mathfrak{N} \cup {}_F(b_n)/\mathfrak{N}) &= \hat{\mu}({}_F(a_n \cup b_n)/\mathfrak{N}) = \lim \mu(a_n \cup b_n) \\ &= \lim \mu((a_n \dotplus a_n b_n) \cup b_n) = \lim (\mu(a_n \dotplus a_n b_n) + \mu(b_n)) \\ &= \lim (\mu(a_n) + \mu(b_n) - \mu(a_n b_n)) = \lim \mu(a_n) + \lim \mu(b_n) - \lim \mu(a_n b_n) \\ &= \hat{\mu}({}_F(a_n)/\mathfrak{N}) + \hat{\mu}({}_F(b_n)/\mathfrak{N}). \end{aligned} $$

Die Additivität ist also bewiesen. Aus (g), (h) und $\hat{\mu}({}_F(a)/\mathfrak{N}) = \mu(a)$, $a \in \mathfrak{A}$, folgt nun, daß $(\mathfrak{B}_0, \hat{\mu})$ eine isometrische Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}^*$ ist.

2. 9. Führt man in $(\mathfrak{B}^*, \hat{\mu})$ nach Nr. 2. 5 eine Metrik und $\hat{\mu}$-Konvergenz ein, so zeigt man in derselben Weise wie in der Theorie der metrischen Räume, daß $\mathfrak{B}^*$ vollständig bezüglich dieser Metrik ist.

Im folgenden werden die Elemente von $\mathfrak{B}^*$ mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet.

2. 9. 1. **Satz.** *Aus $(\mathfrak{B}^*)$ $\mathfrak{a}_n \uparrow \mathfrak{a}$ bzw. $(\mathfrak{B}^*)$ $\mathfrak{a}_n \downarrow \mathfrak{a}$ folgt $\hat{\mu}$-lim $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a} \in \mathfrak{B}^*$.*

Beweis. Es sei $(\mathfrak{B}^*)$ $\mathfrak{a}_n \uparrow \mathfrak{a}$. Aus Nr. 2. 6, (a) erhalten wir

$$ \text{(I)} \qquad \lim \hat{\mu}(\mathfrak{a}_n) \leqq \hat{\mu}(\mathfrak{a}). $$

Außerdem gilt

$$ \hat{\mu}(\mathfrak{a}_n) \leqq \hat{\mu}(\mathfrak{a}_{n+1}) \leqq \hat{\mu}(\mathfrak{a}) \text{ für } n = 1, 2, \ldots; $$

also kann $\hat{\mu}(\mathfrak{a}_n \dotplus \mathfrak{a}_{n+k}) = \hat{\mu}(\mathfrak{a}_{n+k}) - \hat{\mu}(\mathfrak{a}_n)$ für genügend großes n beliebig klein werden, d. h. $(\mathfrak{a}_n)$ ist eine $\hat{\mu}$-Fundamentalfolge in $\mathfrak{B}^*$, und wegen der Vollständigkeit des Raumes $\mathfrak{B}^*$ existiert ein $\mathfrak{a}^*$ so, daß $\hat{\mu}$-lim $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}^* \in \mathfrak{B}^*$ gilt. Nun ist aber für *festes m*:

(II) $$\mathfrak{a}_m\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}_m(\hat{\mu}\text{-lim}\,\mathfrak{a}_n) = \hat{\mu}\text{-lim}\,\mathfrak{a}_m\mathfrak{a}_n = \hat{\mu}\text{-lim}\,\mathfrak{a}_m \overset{\infty}{=} \mathfrak{a}_m,$$

weil m fest, und hieraus folgt

(III) $$\mathfrak{a}_m \leqq \mathfrak{a}^* \text{ für } m = 1, 2, \ldots, \text{ also } \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}^*$$

und daher $\hat{\mu}(\mathfrak{a}) \leqq \hat{\mu}(\mathfrak{a}^*) = \lim \mu(\mathfrak{a}_n)$. Dies zusammen mit (I) ergibt $\hat{\mu}(\mathfrak{a}) = \hat{\mu}(\mathfrak{a}^*)$. Wegen (III) ist aber $\hat{\mu}(\mathfrak{a}^* \dot{+} \mathfrak{a}) = \hat{\mu}(\mathfrak{a}^*) - \hat{\mu}(\mathfrak{a}) = 0$, d. h $\mathfrak{a}^* \dot{+} \mathfrak{a} = \emptyset$ und daher $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$, also $\hat{\mu}\text{-lim}\,\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$ in $\mathfrak{B}^*$. Dual beweist man den anderen Teil des Satzes.

2. 9. 2. **Satz.** *Aus* $\mathfrak{a}_n \leqq \mathfrak{a}_{n+1}$ *bzw.* $\mathfrak{a}_n \geqq \mathfrak{a}_{n+1}$ *für* $n = 1, 2, \ldots, \mathfrak{a}_n \in \mathfrak{B}^*$ *folgt die Existenz eines* $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}^*$ *mit*

$$(\mathfrak{B}^*)\ \mathfrak{a}_n \uparrow \mathfrak{a} \textit{ bzw. } (\mathfrak{B}^*)\ \mathfrak{a}_n \downarrow a.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}_n \leqq \mathfrak{a}_{n+1}$ für $n = 1, 2, \ldots$. Zuerst beweist man, wie beim vorigen Satz, daß $\hat{\mu}\text{-lim}\,\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}^*$ in $\mathfrak{B}^*$ existiert und daß

1) $\mathfrak{a}_m\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}_m$ für $m = 1, 2, \ldots$

gilt. Es gilt aber außerdem:

2) Aus $\mathfrak{a}_n\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_n$ für $n = 1, 2, \ldots$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}^*$ folgt

$$\mathfrak{a}^*\mathfrak{b} = (\hat{\mu}\text{-lim}\,\mathfrak{a}_n)\,\mathfrak{b} = \hat{\mu}\text{-lim}\,\mathfrak{a}_n\mathfrak{b} = \hat{\mu}\text{-lim}\,\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}^*, \text{ also } \mathfrak{a}^*\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^*.$$

Wegen 1) und 2) ist aber $\mathfrak{a}^* = (\mathfrak{B}^*) \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}_n$, d. h. $(\mathfrak{B}^*)\ \mathfrak{a}_n \uparrow \mathfrak{a}^*$. Dual beweist man den anderen Teil des Satzes.

Aus 2. 9. 1 und 2. 9. 2 folgt:

2. 9. 3. **Satz.** $(\mathfrak{B}^*, \hat{\mu})$ *ist ein* σ*-Maßverband;* $(\mathfrak{B}^*, \hat{\mu})$ *ist die sogenannte* μ*-Hülle von* $(\mathfrak{A}, \mu)$ *und wird im folgenden auch mit* $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ *bezeichnet.*

Mit Hilfe der Sätze und Definitionen von Nr. 2. 6 beweist man:

2. 9. 4. **Satz.** *Bei der Einbettung* $(\mathfrak{B}_0, \hat{\mu})$ *von* $(\mathfrak{A}, \mu)$ *in* $(\mathfrak{B}^*, \hat{\mu}) = (\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ *bleiben* μ*-stetige Vereinigungen bzw. Durchschnitte und Grenzelemente von algebraisch konvergenten Folgen, deren Konvergenz* μ*-stetig ist, ungeändert. Das Maß* $\hat{\mu}$ *ist stets stetig auf* $\mathfrak{B}_0$ *relativ* $\mathfrak{B}^*$. *Ist insbesondere* μ *stetig auf* $\mathfrak{A}$ *vorausgesetzt, so ist die Einbettung* $\mathfrak{B}_0$ *von* $\mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{B}^*$ σ*-regulär, d. h. das Maß* $\hat{\mu}$ *stetig auf* $\mathfrak{B}_0$.

Ferner gilt:

2. 9. 5. **Satz.** $\mathfrak{B}^*$ *ist der kleinste* σ*-Booleunterring von* $\mathfrak{B}^*$ *über* $\mathfrak{B}_0$, *in Zeichen* $R_\sigma(\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{B}^*$, *und zwar gilt:*

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}_0^{\sigma\delta} = \mathfrak{B}_0^{\delta\sigma} = \mathfrak{B}_0^{\lambda}\ ^{5)}.$$

Beweis. Wir brauchen nur zu beweisen, daß $\mathfrak{B}_0^{\sigma\delta}$ bzw. $\mathfrak{B}_0^{\delta\sigma}$ bzw. $\mathfrak{B}_0^{\lambda}$ Obermenge zu $\mathfrak{B}^*$ ist. Es sei $b \in \mathfrak{B}^*$; dann kann man $\mathfrak{b} = \hat{\mu}\text{-lim}\,\mathfrak{a}_n$ mit $\mathfrak{a}_n \in \mathfrak{B}_0$ setzen und es existiert eine Teilfolge $(\mathfrak{a}_{r_n})_{n=1,2,\ldots}$ so, daß lim alg $\mathfrak{a}_{r_n} = b$ gilt (vgl. [6], § 11). Daraus folgt

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{B}^*) \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\tau=0}^{\infty} \mathfrak{a}_{r_{n+\tau}} = (\mathfrak{B}^*) \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\tau=0}^{\infty} \mathfrak{a}_{r_{n+\tau}} \text{ in } \mathfrak{B}_0^{\sigma\delta} \text{ bzw. } \mathfrak{B}_0^{\delta\sigma},$$

d. h. die Behauptung.

Aus den Sätzen 2. 8. 1, 2. 9. 4 und 2. 9. 5 und der Definition 2 von Nr. 2 folgt nun:

2. 9. 6. **Satz.** *Der* σ*-Maßverband* $(\mathfrak{B}^*, \hat{\mu})$ *ist eine* σ*-Erweiterung des Maßverbandes* $(\mathfrak{A}, \mu)$.

---

[5]) Ist $\mathfrak{B}$ ein σ-Boolering und $\mathfrak{K}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{B}$, so wird mit $\mathfrak{K}^\sigma$ bzw. $\mathfrak{K}^\delta$ die Teilmenge von $\mathfrak{B}$ bezeichnet, die aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion aller $(\mathfrak{B}) \bigcup_{i \in I} a_i$ bzw. $(\mathfrak{B}) \bigcap_{i \in I} a_i$ mit $a_i \in \mathfrak{K}$ und $|I| \leqq \aleph_0$ entsteht. $\mathfrak{K}^\lambda$ entsteht aus $\mathfrak{K}$ durch Adjunktion aller Grenzwerte $(\mathfrak{B})$ lim alg $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}_n \in \mathfrak{K}$; $\mathfrak{K}^{\sigma\delta}$ bzw. $\mathfrak{K}^{\delta\sigma}$ ist dann $(\mathfrak{K}^\sigma)^\delta$ bzw. $(\mathfrak{K}^\delta)^\sigma$.

2. 10. Es sei $(\mathfrak{B}, \mu)$ ein σ-Maßverband und $(\mathfrak{B}_1, \mu)$ ein beliebiger Maßunterverband von $(\mathfrak{B}_1, \mu)$. Dann ist offenbar das Maß μ stetig auf $\mathfrak{B}_1$ relativ $\mathfrak{B}$. Es gilt der Satz:

2. 10. 1. **Satz.** *Es sei $(\mathfrak{B}, \mu)$ ein σ-Maßverband und $(\mathfrak{B}_1, \mu)$ ein Maßunterverband von $(\mathfrak{B}, \mu)$, so daß $\mathfrak{B} = R_\sigma(\mathfrak{B}_1)$ gilt, d. h. $\mathfrak{B}_1$ sei eine σ-erzeugende Basis von $\mathfrak{B}$. Dann gilt:*

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^{\sigma\delta} = \mathfrak{B}_1^{\delta\sigma} = \mathfrak{B}_1^{\lambda} = \mathfrak{B}_1^{\mu}\ ^{6)}.$$

Beweis. $\mathfrak{B}$, aufgefaßt als metrischer Raum mit der Entfernung $r(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mu(\mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b})$, ist vollständig (vgl. [6], § 11); daraus folgt, daß $(\mathfrak{B}_1^{\mu}, \mu)$ isometrisch zu der μ-Hülle $(\hat{\mathfrak{B}}_1, \hat{\mu})$ von $(\mathfrak{B}_1, \mu)$ ist (vgl. Bezeichnung Satz 2. 9. 3). $(\mathfrak{B}_1^{\mu}, \mu)$ ist deshalb eine isometrische Einbettung von $(\hat{\mathfrak{B}}_1, \hat{\mu})$ in $(\mathfrak{B}, \mu)$. Da aber das Maß $\hat{\mu}$ auf $\hat{\mathfrak{B}}_1$ stetig ist, so ist diese Einbettung σ-regulär. $\mathfrak{B}_1^{\mu}$ ist also der kleinste σ-Booleunterring von $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{B}_1$, also identisch mit $\mathfrak{B}$. Wendet man nun den Satz 2. 9. 5 an, so erhält man die Behauptung.

2. 10. 2. **Satz.** *Alle σ-Erweiterungen eines Maßverbandes $(\mathfrak{A}, \mu)$ sind isometrisch zueinander (m. a. W. isometrisch zu der μ-Hülle $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ von $(\mathfrak{A}, \mu)$).*

Beweis. Es sei $(\mathfrak{B}, \nu)$ eine beliebige σ-Erweiterung von $(\mathfrak{A}, \mu)$. Es sei ferner $(\mathfrak{B}_0, \nu)$ bzw. $(\mathfrak{A}_0, \hat{\mu})$ eine isometrische Einbettung von $(\mathfrak{A}, \mu)$ in $(\mathfrak{B}, \nu)$ bzw. in $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$. Dann ist $(\mathfrak{B}_0, \nu)$ isometrisch zu $(\mathfrak{A}_0, \hat{\mu})$. Es sei $\mathfrak{A}_0 \underset{f}{\approx} \mathfrak{B}_0$ diese Isometrie. Es gilt $\hat{\mu}(\mathfrak{a}) = \nu(f(\mathfrak{a}))$ für jedes $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}_0$. Daraus folgt: ${}_P(a_n)$ in $\mathfrak{A}_0$ gilt dann und nur dann, wenn ${}_P(f(a_n))$ in $\mathfrak{B}_0$ gilt, und es ist $\hat{\mu}$-$\lim \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}_0$ dann und nur dann, wenn ν-$\lim f(\mathfrak{a}_n) = f(\mathfrak{a})$ ist. Erweitert man den Definitionsbereich von f auf $\hat{\mathfrak{A}}$ durch die Vorschrift:

$$\text{für jedes } \mathfrak{x} \in \hat{\mathfrak{A}} \text{ sei } \hat{f}(\mathfrak{x}) = \nu\text{-}\lim f(\mathfrak{x}_n),$$

wobei ${}_P(\mathfrak{x}_n)$ in $\mathfrak{A}_0$ mit $\hat{\mu}$-$\lim \mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}$ gilt, so ist diese Erweiterung eindeutig bestimmt (d. h. unabhängig von der Wahl der $\hat{\mu}$-Fundamentalfolge in $\mathfrak{A}_0$, die gegen $\mathfrak{x} \in \hat{\mathfrak{A}}$ konvergiert) und erklärt eine Isometrie zwischen $\hat{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B}$, die für die Booleunterringe $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ mit f zusammenfällt. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung. Die σ-Erweiterung (μ-Hülle) $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ von $(\mathfrak{A}, \mu)$ ist vom Maß μ abhängig; eine Änderung des Maßes kann auch die algebraische Struktur der Hülle ändern.

§ 3. Cartesisches Produkt von Maßverbänden.

3. 1. Es sei $(\mathfrak{B}_i, \mu_i)$, $i \in I$, eine Familie von Maßverbänden, die Menge I der Indizes i sei von einer beliebigen Mächtigkeit $|I| \geqq 2$. Wir bilden nach [7], § 2 das *Produkt* (cartesisches Produkt) $(B, \mu) = \underset{i \in I}{P}(\mathfrak{B}_i, \mu_i)$ aller Maßverbände $(\mathfrak{B}_i, \mu_i)$, $i \in I$, die wir als Faktoren (Komponenten) von (B, μ) bezeichnen. Die Erklärung des Booleringes B geschieht algebraisch und unabhängig vom Maß. (B, μ) ist ein Maßverband. Es gilt der Satz:

3. 1. 1. **Satz.** *Es sei B_j die Gesamtheit aller Produktelemente $\alpha = \underset{i \in I}{P} a_i$ mit $a_i = e_i$ (Einheit von $\mathfrak{B}_i$) für $i \neq j$ (j fest in I) und $a_i = b_j$ für $i = j$ für alle $b_j \in \mathfrak{B}_j$. Es sei ferner $S = \bigvee_{i \in I} B_i$ die mengentheoretische Vereinigung aller B_i. Dann gilt:*

1) *(B_j, μ) ist ein Maßunterverband von (B, μ), eine isometrische Einbettung von $(\mathfrak{B}_j, \mu_j)$ in (B, μ).*

2) *B_j ist totalregulär bezüglich B.*

3) *Es gilt $R(S) = B$, d. h. S ist eine erzeugende Basis von B.*

4) *Die Booleunterringe B_i, $i \in I$, von B sind gegenseitig algebraisch unabhängig und die (B_i, μ) gegenseitig μ-unabhängig* (vgl. bezüglich dieser Begriffe [7], Anhang).

---

[6]) $\mathfrak{B}_1^{\mu}$ entsteht aus $\mathfrak{B}_1$ durch Adjunktion aller Grenzwerte μ-$\lim \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$ in $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{a}_n \in \mathfrak{B}$ für $n = 1, 2, \ldots$.

3. 1. 2. Zusatz. *Wenn das Maß μ_j stetig ist auf $\mathfrak{B}_j$, so ist $\tilde{\mu}$ stetig auf B_j, also auch stetig auf B_j relativ B. Gilt dies für jedes $j \in I$, so braucht doch μ im allgemeinen nicht stetig auf B zu sein.*

Beweis von 3. 1. 1. Zu 1): Die Abbildung $B_j \ni \alpha = \underset{i \in I}{P} a_i \to a_j \in \mathfrak{B}_j$ ist offensichtlich eine Isometrie.

Zu 2): Wenn $(B_j) \underset{k \in K}{\cap} \alpha_k = \alpha \in B_j$ gilt, so ist der j-te Faktor a_j von α gleich dem Durchschnitt $(\mathfrak{B}_j) \underset{k \in K}{\cap} a_{jk}$ aller j-ten Faktoren aller α_k, $k \in K$. Ist nun $B \ni \beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_\tau$ mit $\beta_\varrho = \underset{i \in I}{P} b_{i\varrho}$ und gilt $\beta \leqq \alpha_k$ für $k \in K$, so folgt daraus $b_{jr} \leqq a_{jk}$ für $r = 1, 2, \ldots, \tau$ und jedes $k \in K$, d. h. $b_{jr} \leqq a_j$ ($= j$-ter Faktor von α) für alle $r = 1, 2, \ldots, \tau$; und daher $\beta \leqq \alpha$, also $\alpha = (B) \underset{k \in K}{\cap} \alpha_k$.

Zu 3): Es gilt $S^{\cap} =$ (Gesamtheit aller Produktelemente), also $S^{\cap\dagger} = B$ (vgl. [7], § 2, insbesondere Nr. 2. 2. 4), d. h. $R(S) = B$.

Zu 4): vgl. [7], Anhang.

Beweis des Zusatzes 3. 1. 2. Aus der Stetigkeit von μ_j auf $\mathfrak{B}_j$ und der Totalregularität der Einbettung B_j von $\mathfrak{B}_j$ in B folgt offenbar die Stetigkeit von μ auf B_j. Daß aus der Stetigkeit von μ_j auf $\mathfrak{B}_j$ für jedes $j \in I$ nicht die Stetigkeit von μ auf B folgt, hat Sikorski [8] für $|I| = 2$ an einem Beispiel gezeigt.

3. 2. Es sei $(\hat{B}, \hat{\mu})$ die σ-Erweiterung (σ-Hülle) von (B, μ). Wir setzen $(\hat{B}, \hat{\mu}) = \underset{i \in I}{\overline{P}} (\mathfrak{B}_i, \mu_i)$ und bezeichnen dies als das *σ-Produkt* aller Maßverbände $(\mathfrak{B}_i, \mu_i)$, $i \in I$. Dies σ-Produkt $(\hat{B}, \hat{\mu})$ ist ein σ-Maßverband. Es sei $(B_0, \hat{\mu})$ die isometrische Einbettung von (B, μ) in $(\hat{B}, \hat{\mu})$, die man nach Nr. 2. 6, (*h*) gewinnt. Die Einbettung von (B, μ) in $(\hat{B}, \hat{\mu})$ induziert für jedes $j \in I$ eine Einbettung $(B_{0j}, \hat{\mu})$ von (B_j, μ) in $(\hat{B}, \hat{\mu})$, die man als eine Einbettung von $(\mathfrak{B}_j, \mu_j)$ in $(\hat{B}, \hat{\mu})$ betrachten kann. Das Maß $\hat{\mu}$ ist stetig auf B_0 bzw. auf B_{0j} relativ $\hat{B}$. Ist insbesondere μ_j stetig auf $\mathfrak{B}_j$, so ist auch $\hat{\mu}$ auf B_{0j} stetig und zwar unabhängig vom Oberring B_0 bzw. $\hat{B}$, d. h. die Einbettung von $\mathfrak{B}_j$ in $\hat{B}$ ist in diesem Falle σ-regulär. Jedoch ist die Einbettung B_0 von B in $\hat{B}$ im allgemeinen nicht σ-regulär, wie aus Zusatz 3. 1. 2 folgt. Setzt man $S_0 = \underset{i \in I}{\vee} B_{0j}$, so ist S_0 eine erzeugende Basis von B_0 bzw. eine σ-erzeugende Basis von $\hat{B}$. Man kann leicht zeigen:

Wenn $(\hat{\mathfrak{B}}_j, \hat{\mu}_j)$ die μ-Hülle von $(\mathfrak{B}_j, \mu_j)$ für jedes $j \in I$ bedeutet und $(B^*, \hat{\mu}) = \underset{i \in I}{P} (\hat{\mathfrak{B}}_i, \hat{\mu}_i)$ das Produkt bzw. $(\hat{B}^*, \hat{\mu}) = \underset{i \in I}{\overline{P}} (\hat{\mathfrak{B}}_i, \hat{\mu}_i)$ das σ-Produkt aller $(\hat{\mathfrak{B}}_i, \hat{\mu}_i)$, $i \in I$, so ist $(\hat{B}^*, \hat{\mu})$ isometrisch zu $(\hat{B}, \hat{\mu})$.

3. 3. Deutet man jedes $(\mathfrak{B}_i, \mu_i)$ als ein vollideelles Wahrscheinlichkeits-Feld (W-Feld), $i \in I$, (vgl. [7]), so ist das Produkt (B, μ) auch ein W-Feld; jedoch ist die Wahrscheinlichkeit μ im allgemeinen nicht stetig (σ-additiv) auf B. Jedes W-Unterfeld (B_j, μ), $j \in I$, ist aber eine totalreguläre Einbettung von $(\mathfrak{B}_j, \mu_j)$ in (B, μ), $j \in I$, mit stetiger Wahrscheinlichkeit. Das σ-Produkt $(\hat{B}, \hat{\mu})$ ist stets ein vollideelles W-Feld (mit stetiger Wahrscheinlichkeit). $(B_{0j}, \hat{\mu})$ ist eine σ-reguläre Einbettung von $(\mathfrak{B}_j, \mu_j)$ in $(\hat{B}, \hat{\mu})$ für jedes $j \in I$. Die $(B_{0j}, \hat{\mu})$, $j \in I$, als W-Unterfelder von $(\hat{B}, \hat{\mu})$ betrachtet, sind gegenseitig $\hat{\mu}$-unabhängig.

3. 4. *Bemerkung.* Nach Zusatz 3. 1. 2. (Beispiel von Sikorski) ist das Maß φ, das wir in einer früheren Arbeit ([6], § 10) auf dem Produkt $L = B_1 \times B_2$ definiert haben, wobei B_i ($i = 1, 2$) als σ-Booleringe mit σ-additivem, reduziertem Maß φ_i ($i = 1, 2$) vor-

ausgesetzt wurden, im allgemeinen nicht σ-additiv. Jedoch ist das erweiterte Maß auf die φ-Hülle $\bar{L}$ von L, wie es in § 12 derselben Arbeit erklärt wurde, σ-additiv und die Einbettungen der Faktoren B_1, B_2 in $\bar{L}$ σ-regulär. Bei den Beweisen der Sätze von § 12 wurde die Stetigkeit (σ-Additivität) von φ auf L nicht benutzt. Das Schlußergebnis dieser Arbeit, d. h. die Bildung des σ-Produktes der Maßverbände (B_1, φ_1) und (B_2, φ_2) bleibt richtig. Natürlich kann (L, φ) im allgemeinen nicht σ-regulär in $(\bar{L}, \varphi)$ eingebettet werden; dies gilt aber auch für ein maximales σ-Produkt, was Sikorski ([9], Nr. 5) zur Definition seines Produktmaßes eingeführt hat (vgl. auch Nr. 4. 5 des folgenden Paragraphen).

§ 4. Erweiterung eines Maßverbandes mit Hilfe der Stoneschen Darstellung.

4. 1. Es sei $(\mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßverband. Der Boolering $\mathfrak{A}$ kann nach Stone [1] durch einen Mengenkörper $\mathfrak{S}$ von Teilmengen der Grundmenge E aller Primideale in $\mathfrak{A}$, die man als Punkte betrachtet, isomorph dargestellt werden. Bezeichnet man mit $X = f(x)$ für jedes $x \in \mathfrak{A}$ die Gesamtheit aller Primideale in $\mathfrak{A}$, welche x nicht enthalten, so sind diese Mengen $X = f(x)$ die Elemente von $\mathfrak{S}$. Die Abbildung $X = f(x)$ ist ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}$. Erklärt man durch $\nu(X) = \mu(x)$ ein Maß auf $\mathfrak{S}$, so ist $(\mathfrak{S}, \nu)$ isometrisch zu $(\mathfrak{A}, \mu)$. Die Menge E, aufgefaßt als topologischer Raum mit $\mathfrak{S}$ als System von Umgebungen, ist total diskontinuierlich, bikompakt und normal (Stone [10]). $\mathfrak{S}$ besteht aus allen Mengen, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

4. 1. 1. **Satz.** *Das Maß $\nu(X) = \mu(x)$, das $\mathfrak{A}$ bei der Abbildung $X = f(x)$, $x \in \mathfrak{A}$, auf $\mathfrak{S}$ induziert, ist mengentheoretisch stetig auf $\mathfrak{S}$.*

Beweis[7]). Es gibt keine Menge $X \in \mathfrak{S}$, die in unendlich viele Mengen aus $\mathfrak{S}$ zerlegt werden kann. Denn ist $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots$ mit $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, und $X_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2, \ldots$, so können höchstens endlich viele X_i bei dieser Zerlegung vorkommen; denn E ist bikompakt und die X_i sind Umgebungen. Analog zeigt man, daß kein Durchschnitt von monoton absteigenden Folgen aus $\mathfrak{S}$ leer sein kann. Damit ist aber gezeigt, daß ν auf $\mathfrak{S}$ mengentheoretisch stetig (σ-additiv) ist.

4. 2. Erweitert man nun ν zu einem äußeren Maß ν^* auf allen Teilmengen der Grundmenge E und erklärt man ν^*-Meßbarkeit nach Carathéodory (vgl. etwa [11]), so enthält der σ-Körper $\mathfrak{L}$ aller ν^*-meßbaren Teilmengen von E den Mengenkörper $\mathfrak{S}$ und das durch ν^* auf $\mathfrak{L}$ induzierte Maß $\bar{\nu}(X) = \nu^*(X)$, $X \in \mathfrak{L}$, fällt für $X \in \mathfrak{S}$ mit $\nu(X)$ zusammen. Es sei nun $\mathfrak{N}$ das σ-Ideal der Nullmengen, dann ist $\mathfrak{L}/\mathfrak{N} = \mathfrak{B}$ ein σ-Boolering. $\hat{\nu}(X/\mathfrak{N}) = \bar{\nu}(X)$ für jede Restklasse $X/\mathfrak{N} \in \mathfrak{B}$ ist dann ein σ-additives, reduziertes und normiertes Maß auf $\mathfrak{B}$, d. h. $(\mathfrak{B}, \hat{\nu})$ ein σ-Maßverband. $\mathfrak{S}/\mathfrak{N} = \mathfrak{B}_0$ ist eine Einbettung von $\mathfrak{S}$ und demgemäß auch von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$. Also ist $(\mathfrak{B}_0, \hat{\nu})$ eine isometrische Einbettung von $(\mathfrak{S}, \nu)$ bzw. von $(\mathfrak{A}, \mu)$ in $(\mathfrak{B}, \hat{\nu})$. Da außerdem $R_\sigma(\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{B}_0^{\sigma\delta} = \mathfrak{B}_0^{\delta\sigma} = \mathfrak{B}$ gilt, so ist $(\mathfrak{B}, \hat{\nu})$ eine σ-Erweiterung von $(\mathfrak{A}, \mu)$, also isometrisch zu der μ-Hülle $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ von $(\mathfrak{A}, \mu)$. Wenn das Maß μ auf $\mathfrak{A}$ nicht stetig ist, so ist die Einbettung $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ nicht σ-regulär. Ist insbesondere $(\mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-Maßverband, so ist $(\mathfrak{B}, \nu)$ isometrisch zu $(\mathfrak{A}, \mu)$.

4. 3. Es sei $\mathfrak{S}^*$ der kleinste σ-Körper über $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{J}$ das σ-Ideal aller Teilmengen von E erster Kategorie bzw. $\mathfrak{J}^*$ das kleinste σ-Ideal, das alle Mengen[8]) $\bigwedge_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ enthält, wobei $x_n \in \mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} x_n = \emptyset$ ist. Dann ist $\mathfrak{S}^*/\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{S}^*/\mathfrak{J}^*$ eine minimale bzw. maximale σ-reguläre Erweiterung von $\mathfrak{A}$ ([9], Nr. 2). Wenn das Maß μ auf $\mathfrak{A}$ stetig ist, so kann die

[7]) Beim Beweise dieses Satzes betrachten wir die Operationen mengentheoretisch.

[8]) Hier bedeutet $\wedge$ wieder den mengentheoretischen Durchschnitt.

Erweiterung mit der Carathéodoryschen Methode durch Einbettung von $\mathfrak{A}$ in einen von diesen σ-Booleringen stattfinden. Alle Elemente von $\mathfrak{S}^*/\mathfrak{J}$ bzw. $\mathfrak{S}^*/\mathfrak{J}^*$ werden dann bei dieser Erweiterung meßbar sein. Diese σ-Booleringe sind im allgemeinen nicht isomorph zueinander. Die Bildung der Restklassen nach dem σ-Ideal der Elemente mit dem Maß Null führt aber auch hier in beiden Fällen zu σ-Maßverbänden, die zu der μ-Hülle $(\hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ von $(\mathfrak{A}, \mu)$ isometrisch sind.

4. 4. Mit Hilfe der Stoneschen Darstellung kann man auch das Produkt bzw. σ-Produkt von Maßverbänden erklären, in dem man jeden Faktor $\mathfrak{B}_i$ durch einen Mengenkörper $\mathfrak{S}_i$ von Teilmengen einer Grundmenge E_i, $i \in I$, darstellt. Das Produkt $\underset{i \in I}{P}\, \mathfrak{S}_i$ aller Mengenkörper $\mathfrak{S}_i$ ist dann der kleinste Körper aller Teilmengen des Produktraumes $\underset{i \in I}{P}\, E_i$[9]), welcher das System aller Produktmengen $\underset{i \in I}{P}\, X_i$ mit $X_i \in \mathfrak{S}_i$ und $X_i \neq E_i$ für nur endlich viele Indizes $i \in I$ enthält. $\underset{i \in I}{P}\, \mathfrak{S}_i$ ist isomorph zu $B = \underset{i \in I}{P}\, \mathfrak{B}_i$ (vgl. [9], Nr. 4, 5). Das Produktmaß μ ist mengentheoretisch stetig auf $S = \underset{i \in I}{P}\, \mathfrak{S}_i$. Die Erweiterung dieses Maßes, die bereits in Nr. 4. 2 angedeutet wurde, und die Bildung von Restklassen mod. Nullmengen führt zu einem σ-Maßverband, der zu $(\hat{B}, \hat{\mu}) = \underset{i \in I}{\overline{P}}\, (\mathfrak{B}_i, \mu_i)$ isometrisch ist.

4. 5. Ist $(\mathfrak{B}_i)$, $i \in I$, eine Familie von Booleringen, so kann man das Produkt $B = \underset{i \in I}{P}\, \mathfrak{B}_i$ (wie bereits erwähnt wurde) unabhängig vom Maß entweder abstrakt (algebraisch) oder mittels einer Darstellung von $\mathfrak{B}_i$ durch einen Mengenkörper $\mathfrak{S}_i$, $i \in I$, erklären. Beide Erklärungen führen zu isomorphen Produkten. Zur Definition des σ-Produktes haben wir in beiden Fällen die Metrik bzw. das Maß benutzt. Es entsteht nun die Frage, ob eine vom Maß unabhängige Definition eines σ-Produktes von $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, möglich ist. Diese Frage hängt mit der Frage einer σ-Erweiterung eines abstrakten Booleringes zusammen. Die Beantwortung der letzteren Frage ist, wie bereits in der Einleitung und Nr. 1. 10 bemerkt wurde, nicht eindeutig. Dasselbe gilt auch für die Definition des σ-Produktes. Man kann z. B. den kleinsten σ-Körper S^* über $S = \underset{i \in I}{P}\, \mathfrak{S}_i$ (vgl. Nr. 4. 3) als σ-Produkt aller $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, erklären. In S^* kann B bzw. jedes $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, isomorph eingebettet werden, die Einbettungen sind aber im allgemeinen nicht σ-regulär. Wie wir in Nr. 4. 4 gesehen haben, kann sogar auf S^* stets ein σ-additives Produktmaß erklärt werden. Erklärt man andererseits als σ-Produkt aller $\mathfrak{B}_i$ die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) totalreguläre σ-Erweiterung $B^\flat$ von $B = \underset{i \in I}{P}\, \mathfrak{B}_i$ (das sogenannte *minimale* σ-Produkt), so sind B bzw. jedes $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, in $B^\flat$ totalregulär einbettbar. $B^\flat$ ist jedoch zur Definition des Produktmaßes mit Erhaltung der σ-Additivität ungeeignet, wie Sikorski ([9], Nr. 14, [8]) bemerkt hat. Sikorski hat für das minimale σ-Produkt auch eine andere, äquivalente Definition gegeben (vgl. [9], Nr. 9) und außerdem ein anderes minimales σ-Produkt $B^{\flat *}$ eingeführt, das für $|I| \geqq \aleph_0$ verschieden von $B^\flat$ ist. Das letztere σ-Produkt ist ebenfalls zur Definition des Produktmaßes mit Erhaltung der σ-Additivität ungeeignet; beide Definitionen sind jedoch m. E. für die Topologie in Produktverbänden, die bis jetzt noch nicht untersucht wurde, wichtig. Sikorski hat ein drittes σ-Produkt, das sogenannte *maximale* σ-Produkt $B^\natural$, eingeführt, in welchem jedes $\mathfrak{B}_i$ σ-regulär, jedoch B, wie in unserem σ-Produkt $\hat{B}$, im allgemeinen nicht σ-regulär einbettbar ist. Die Definition ist unabhängig vom Maß; man kann aber in $B^\natural$ das Produktmaß mit Erhaltung der σ-Addivität definieren (vgl. [9],

---

[9]) Hier ist mengentheoretische cartesische Produktbildung gemeint.

Nr. 14). Ist auf jedem $\mathfrak{B}_i$ ein reduziertes Maß erklärt, so ist das Sikorskische Maß im Falle $|I| \geqq \aleph_0$ nicht reduziert. Wegen der σ-Regularität der Einbettung von $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, in $B^\flat$ ist außerdem zur Definition eines σ-additiven Produktmaßes auf $B^\flat$ die σ-Addivität des Maßes auf jedem Faktor $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$, notwendig. Ist diese Bedingung erfüllt, und definiert man auf $B^\flat$ ein σ-additives Produktmaß, so ist der σ-Boolering der Restklassen $B^\flat$ mod. den Elementen mit dem Maß Null zu unserem $\hat{B}$ isomorph.

Literatur.

1. *Stone, M. H.*, Theory of representations of Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 36—111.
2. *MacNeille, H.*, Partially ordered sets, Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), 416—460.
3. *Löwig, H.*, Intrinsic topology and completion of Boolean rings, Annals of Math. **42** (1941), 1118—1196.
4. *Nikodym, O.*, Sur une généralisation des integrales de M. J. Radon, Fund. Math. **15** (1930), 131—179.
5. *MacNeille, H.*, Extensions of measure, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **24** (1938), 188—193.
6. *Kappos, D. A.*, Die cartesischen Produkte und die Multiplikation von Maßfunktionen in Booleschen Algebren. I, Math. Annalen **120** (1947), 43—74.
7. *Kappos, D. A.*, Über die Unabhängigkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie, Sitzungsberichte der Bayr. Akad. Wiss., Math. Nat. Klasse, 1950, 157—185.
8. *Sikorski, R.*, On measures in cartesian products of Boolean algebras, Coll. Math. **2** (1950), 124—135.
9. *Sikorski, R.*, Cartesian products of Boolean algebras, Fund. Math. **37** (1950), 25—54.
10. *Stone, M. H.*, Application of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375—481.
11. *Halmos, P.*, Measure Theory, New York 1950.
12. *Birkhoff, G.*, Lattice Theory, New York 1948.

Eingegangen 28. März 1952.

Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Friedrich Hirzebruch* in Erlangen, z. Zt. Princeton, N. J.

Einleitung.

In dieser Arbeit sollen einige Sätze der algebraischen Geometrie über Kurven auf singularitätenfreien algebraischen Flächen mit Hilfe von topologischen Methoden von H. Hopf [12], [13] und E. G. Kundert [15]*) auf kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen übertragen werden (Definition der komplexen Mannigfaltigkeit z. B. in [11]). Es handelt sich um die Formel für das Geschlecht einer algebraischen Kurve auf einer algebraischen Fläche und um Formeln über die Anzahl der Kurven mit Doppelpunkt eines Kurvenbüschels.

Plückersche Geschlechtsformel ([18], p. 103, (13)).

Eine singularitätenfreie Kurve K der Ordnung n in der komplex-projektiven Ebene hat das Geschlecht $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$; es ist $2 - 2p = -n^2 + 3n$.

Wir verwenden hier die topologische Geschlechtsdefinition: K ist eine orientierte kompakte Fläche und hat als solche ein (topologisches) Geschlecht p und die Eulersche Charakteristik $2 - 2p$.

Hat die Kurve d Doppelpunkte und keine weiteren Singularitäten, so ist ihre Eulersche Charakteristik gleich

$$2 - 2p = -n^2 + 3n + 2d.$$

Entsprechende Formeln gelten, wenn andere Singularitäten auftreten. Bei der topologischen Geschlechtsdefinition einer Kurve K mit singulären Punkten ist so vorzugehen:

K wird zu einer orientierten Fläche K^*, wenn ein singulärer Punkt von K, durch den k Zweige hindurchgehen, in „natürlicher Weise" als Menge von k verschiedenen Punkten von K aufgefaßt wird. Das (topologische) Geschlecht von K^* ist das Geschlecht der Kurve K.

Für das Geschlecht einer Kurve auf einer (singularitätenfreien) algebraischen Fläche gelten analoge Formeln ([19], p. 34, 56, 59).

Die Verallgemeinerung der Plückerschen Geschlechtsformeln auf eine kompakte analytische Fläche H (eine komplexe Dimension) in einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit M von zwei komplexen Dimensionen ist der Inhalt des nachstehenden Satzes (vgl. Abschnitt 2. 5 dieser Arbeit):

---

*) Ziffern in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Satz I. *H sei singularitätenfrei in M eingebettet*[1]) *und h die durch H repräsentierte (ganzzahlige) Homologieklasse von M. Ferner sei $c_1(M)$ die zur Chernschen charakteristischen zweidimensionalen Cohomologieklasse duale zweidimensionale Homologieklasse, $\circ$ bedeute die Bildung der Schnittzahl und $e(H)$ die Eulersche Charakteristik von H. Dann gilt:*

$$e(H) = -h \circ h + c_1(M) \circ h.$$

Hat H (algebraische) Singularitäten, so kommen zu dem Ausdruck für $e(H)$ gewisse Summanden hinzu, die nur von der lokalen Struktur der Singularitäten abhängen und genau so wie in der algebraischen Geometrie bestimmt werden können.

Die Auflösung der Singularitäten erfolgt mit Hilfe des von H. Hopf [14] für komplexe Mannigfaltigkeiten definierten σ-Prozesses (Einsetzen einer Trägersphäre, vgl. auch [1], [8], [9]). Man kann allgemein folgende Frage stellen: $M^{(m)}$ sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit von m komplexen Dimensionen, $H^{(n)}$ $(n < m)$ eine singularitätenfrei eingebettete kompakte komplexe Mannigfaltigkeit von n komplexen Dimensionen. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Chernschen Klassen von $H^{(n)}$ und denen von $M^{(m)}$?

Diese Frage hat W. V. D. Hodge im Falle $n = m - 1$ durch die „adjunction formulas" ([10], p. 146) beantwortet, allerdings nur unter zusätzlichen Voraussetzungen über $M^{(m)}$. Man kann diese zusätzlichen Voraussetzungen vermeiden, wie ich in einer anderen Arbeit ausführen möchte (Anwendung von [15]). Der Satz I (für singularitätenfreies H) ist gerade die adjunction formula für $m = 2$ und $n = 1$[1a]).

Für eine singularitätenfreie algebraische Fläche M wird in der algebraischen Geometrie eine kanonische Klasse definiert, die als zweidimensionale (ganzzahlige) Homologieklasse aufgefaßt werden kann. Sie ist gleich $-c_1(M)$ (vgl. [10] und 2. 6, 2. 7 dieser Arbeit).

Aus diesem Grunde ist Satz I die genaue Verallgemeinerung der bekannten Formeln für das Geschlecht einer Kurve auf einer singularitätenfreien algebraischen Fläche.

Kurvenbüschel.

Ein allgemeines lineares Büschel von Kurven n-ter Ordnung mit getrennten Tangenten in der komplexprojektiven Ebene $\mathfrak{P}$ enthält nach Steiner (siehe z. B. Enzyklopädie, III C 4, p. 450, Fußnote 438) $3(n-1)^2$ Kurven mit je einem Doppelpunkt.

Ein solches Büschel bestimmt in $\mathfrak{P}$ ein Feld von komplexen Linienelementen. (Dem Punkte $P \in \mathfrak{P}$ wird das Linienelement zugeordnet, das an die durch P gehende Büschelkurve tangential ist.) Dieses Feld hat endlich viele isolierte Singularitäten, nämlich die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte und die n^2 Basispunkte. Der Index (vgl. [12]) jeder Singularität ist 1. Die Indexsumme des Feldes ist daher gleich $4n^2 - 6n + 3$.

H. Hopf ([12], [13]) und E. Kundert [15] haben Schnittflächen in speziellen Faserungen untersucht, ihre Ergebnisse insbesondere auf Felder von komplexen Linienelementen (mit endlich vielen Singularitäten) in komplexen Mannigfaltigkeiten angewandt und die Frage nach den möglichen Indexsummen beantwortet:

Satz von Hopf [12]. *Für die komplex-projektive Ebene gilt: Eine ganze Zahl tritt genau dann als Indexsumme eines Feldes komplexer Linienelemente mit endlich vielen Singularitäten auf, wenn sie von der Form $x^2 + 3x + 3$ ist (x ganz).* (Die obige Indexsumme $4n^2 - 6n + 3$ ist von dieser Form.)

---

[1]) Es gibt bekanntlich kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten M, in denen es keine eingebettete kompakte analytische Fläche H gibt.

[1a]) Vgl. Zusatz bei der Korrektur 1 am Schluß der Arbeit.

Wir beweisen in dieser Arbeit einen Satz (vgl. 3. 3), der eine Anwendung der Ergebnisse von H. Hopf und E. Kundert ist und gewisse Sätze der algebraischen Geometrie über lineare Kurvenbüschel verallgemeinert (die Invariante von Zeuthen-Segre spielt hier eine Rolle). Er lautet:

Satz II. *M sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen, F eine meromorphe Funktion in M. Die an den Niveauflächen (eine komplexe Dimension) von F tangentialen komplexen Linienelemente bilden ein Feld mit endlich vielen Singularitäten. Die Indexsumme dieses Feldes ist*

$$(2h - w) \circ (2h - w) - (2h - w) \circ c_1(M) + c_2(M),$$

wo h die gemeinsame zweidimensionale Homologieklasse der Niveauflächen von F ist, w eine durch F bestimmte zweidimensionale Homologieklasse, die Verzweigung von F, und $c_2(M)$ die Eulersche Charakteristik von M ist[1b]).

Über die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und Sätze aus der Theorie der gefaserten Räume kann man sich in dem Lehrbuch von Steenrod orientieren [17].

Die in Abschnitt 1 zusammengestellten Hilfssätze sind nicht in der größtmöglichen Allgemeinheit formuliert.

Der Satz I kann auch für fast-komplexe Mannigfaltigkeiten [5] formuliert und bewiesen werden. Wir gehen aber nicht darauf ein.

1. Zusammenstellung von Hilfssätzen.

1. 1. M sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen. M ist durch die komplexe Struktur in natürlicher Weise orientiert [2]). Ein kontravarianter Vektor $\mathfrak{v}$ in P, $P \in M$, wird in bezug auf ein in einer Umgebung von P definiertes zulässiges Koordinatensystem (z_1, z_2) von M durch komplexe Koordinaten ζ^1, ζ^2 gegeben. Zwei von Null verschiedene kontravariante Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ in P definieren dieselbe kontravariante Richtung in P, wenn es ein reelles positives r mit $\mathfrak{v} = r\mathfrak{w}$ gibt. $R(M)$ sei die Mannigfaltigkeit aller kontravarianten Richtungen in M. Die Richtungen in einem festen Punkte P von M bilden eine S^3. Die Mannigfaltigkeit $R(M)$ ist gefasert:

$$R(M)/S^3 = M. \tag{1}$$

Von Null verschiedene kontravariante Vektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ in P definieren dasselbe komplexe Linienelement in P, wenn es eine komplexe Zahl a mit $\mathfrak{v} = a\mathfrak{w}$ gibt. $L(M)$ sei die Mannigfaltigkeit der komplexen Linienelemente von M. Die komplexen Linienelemente in einem festen Punkte P von M bilden eine S^2 (komplex-projektive Gerade). $L(M)$ ist gefasert:

$$L(M)/S^2 = M. \tag{2}$$

Jede kontravariante Richtung $\mathfrak{r}$ bestimmt ein komplexes Linienelement $\tau(\mathfrak{r})$. Dies τ ist eine Faserabbildung von $R(M)$ auf $L(M)$:

$$R(M)/S^1 = L(M) \left(R(M) \to L(M) \to M\right). \tag{3}$$

Analog zu (1) gilt: Die Mannigfaltigkeit $R^*(M)$ aller kovarianten Richtungen in M ist gefasert:

$$R^*(M)/S^3 = M. \tag{1*}$$

[1b]) Vgl. Zusatz bei der Korrektur 2 am Schluß der Arbeit.

[2]) Vgl. [11]. Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten M von zwei komplexen Dimensionen.

Jede kovariante Richtung $\mathfrak{r}^*$ in P bestimmt ein komplexes Linienelement $\tau^*(\mathfrak{r}^*)$: Wird $\mathfrak{r}^*$ in bezug auf ein lokales Koordinatensystem durch Koordinaten a_1, a_2 gegeben, so ist $\tau^*(\mathfrak{r}^*)$ das durch die Gleichung $a_1\zeta^1 + a_2\zeta^2 = 0$ definierte komplexe Linienelement. τ^* ist eine Faserabbildung von $R^*(M)$ auf $L(M)$:

$$(3^*) \qquad R^*(M)/S^1 = L(M)\,(R^*(M) \to L(M) \to M).$$

Wenn im folgenden nur von *Richtung* gesprochen wird, ist stets *kontravariante Richtung* gemeint.

Man kann in M stets eine hermitesche Metrik einführen. Für die Faserungen (1) und (1*) kann die affine unitäre Gruppe, für (2) die projektive unitäre Gruppe, für (3) und (3*) die eigentliche Drehgruppe der Ebene als Strukturgruppe verwendet werden. Vgl. zu 1. 1 Hirsch [7], p. 128.

1. 2. Zu diesem Abschnitt siehe [13]; vgl. auch [6], [7], [15]. M ist ein endliches Polyeder. M werde so fein trianguliert, daß die Faserungen (1), (1*) und damit auch (2) über einer geeigneten Umgebung jedes Simplexes trivial sind. Es gibt kontravariante Richtungsfelder in M mit endlich vielen isolierten Singularitäten. Die Faserung (1) und damit auch (2) besitzen daher Schnittflächen über dem 3-dimensionalen Gerüst[3]) M^3 von M. Zu jeder Schnittfläche f der Faserung (2) über M^3 gehört ein 4-dimensionaler Hindernis-Cozyklus[4]) Γ_f, der durch eine ganze Zahl, die Indexsumme von f, gegeben werden kann. Der Wert von Γ_f auf einem orientierten Simplex x^4 ist gleich der ganzen Zahl, die die durch f bestimmte Abbildungsklasse der S^3 (= orientierter Rand von x^4) in die S^2 charakterisiert ($\pi_3(S^2)$ unendlich zyklisch). Für zwei Schnittflächen f, g von (2) über M^3 ist ein 2-dimensionaler Differenzen-Cozyklus $\alpha(f, g)$ — das Hindernis, das sich der Deformation von f in g auf M^2 entgegenstellt — definiert. H. Hopf hat einen 2-dimensionalen Schnitt-Cozyklus $\omega(f, g)$ — das Hindernis, das sich der Trennung von f und g auf M^2 entgegenstellt — definiert. Andeutung der Definition von $\omega(f, g)$:

f, g lassen sich durch homotope Änderung über M^1 trennen, d. h es ist $f(P) \neq g(P)$ für $P \in M^1$. Für ein Simplex x^2 lassen sich f, g auffassen als singuläre 2-dimensionale Ketten im kartesischen Produkt $x^2 \times S^2$, deren ganzzahlige Schnittzahl definiert ist. Diese Schnittzahl ist gleich dem Wert von $\omega(f, g)$ auf x^2.

Die Cohomologieklassen von $\alpha(f, g)$ und $\omega(f, g)$ ändern sich nicht, wenn man f, g homotop abändert. $\alpha(f, g)$ ist cohomolog Null genau dann, wenn f, g auf M^2 homotop sind.

$\bar{f}$ sei die Schnittfläche der Faserung (2), die jedem Punkt P von M^3 das zu $f(P)$ in bezug auf eine feste hermitesche Metrik unitär-orthogonale komplexe Linienelemen zuordnet. Die Homotopieklasse von $\bar{f}$ auf M^3 hängt nicht von der Wahl der hermiteschen Metrik ab.

Es gelten folgende Formeln (α, ω, Γ sollen von nun an die entsprechenden Cohomologieklassen bezeichnen):

$$(4) \qquad \alpha(f, g) = -\alpha(g, f),$$
$$(5) \qquad \alpha(f, g) + \alpha(g, h) = \alpha(f, h),$$
$$(6) \qquad \omega(f, g) = \omega(g, f),$$
$$(7) \qquad \alpha(f, \bar{g}) = \omega(f, g),$$
$$(8) \qquad \Gamma_f - \Gamma_g = \alpha(f, g) \cdot \omega(f, g) \text{ (Cupprodukt!)},$$
$$(9) \qquad \alpha(f, g) + \alpha(\bar{f}, g) = -\omega(g, g) \text{ (folgt aus (4) bis (7))},$$
$$(9a) \qquad \alpha(f, h) + \alpha(g, h) - \omega(f, g) = -\omega(h, h),$$
$$(10) \qquad \Gamma_f = \alpha(f, g) \cdot \alpha(f, g) + \alpha(f, g) \cdot \omega(g, g) + \Gamma_g.$$

---

[3]) M^j ($j = 1, \ldots, 4$) bezeichnet das j-dimensionale Gerüst von M.

[4]) Alle in dieser Arbeit vorkommenden Homologie- und Cohomologiegruppen haben den Ring der ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich.

s sei eine Schnittfläche der Faserung (2), die sich vermöge (3) aus einem Richtungsfeld mit endlich vielen Singularitäten von M ergibt. Eine solche Schnittfläche werde Standard-Schnittfläche genannt. Zwei Standard-Schnittflächen der Faserung (2) über M^3 sind stets auf M^2 homotop.

Entsprechend werde eine Schnittfläche s^* der Faserung (2), die sich vermöge (3*) aus einem kovarianten Richtungsfeld mit endlich vielen Singularitäten ergibt, als *-Standardschnittfläche bezeichnet. Zwei *-Standardschnittflächen von (2) über M^3 sind auf M^2 homotop.

$\gamma_1(M)$ sei die 2-dimensionale Chernsche Cohomologieklasse ([4]) von M, ferner $\gamma_2(M)$ die 4-dimensionale Chernsche Cohomologieklasse von M, schließlich $c_1(M)$ die zu $\gamma_1(M)$ duale Homologieklasse, $c_2(M)$ die Eulersche Charakteristik von M. („$c_2(M)\cdot$ Punkt" ist dual zu $\gamma_2(M)$)[4]).

Nach Kundert [15] gilt für eine Standardschnittfläche s

$$\omega(s, s) = \gamma_1(M). \tag{11}$$

Für s ist natürlich

$$\Gamma_s = \gamma_2(M).$$

Aus (10) ergibt sich durch Spezialisierung

$$\Gamma_f = \alpha(f, s)\cdot\alpha(f, s) + \alpha(f, s)\cdot\gamma_1(M) + \gamma_2(M). \tag{10a}$$

Zur Faserung (1*) gehören Chernsche Klassen γ_1^*, γ_2^* (2- bzw. 4-dimensionale Cohomologieklasse von M). Es ist

$$\gamma_1^* = -\gamma_1, \quad \gamma_2^* = \gamma_2 \qquad \text{(vgl. [10], p. 141).} \tag{12}$$

1. 3. Eine Schnittfläche f der Faserung (2) über M^3 ist eine stetige Abbildung von M^3 in $L(M)$. Wegen 1. 1, (3) und (3*) definiert daher f Faserungen:

$$E_f/S^1 = M^3 \tag{13}$$

und

$$E_f^*/S^1 = M^3, \tag{13*}$$

wo $E_f = \tau^{-1}f(M^3)$ und $E_f^* = \tau^{*-1}f(M^3)$ ist.

Die zu $P \in M^3$ gehörige Faser S^1 der Faserung (13) besteht aus der S^1 der Richtungen in P, die das komplexe Linienelement $f(P)$ bestimmen. Entsprechend für (13*). Zur Faserung (13) bzw. (13*) gehört eine 2-dimensionale Chernsche Klasse (1. Hindernis) $\gamma(f)$ bzw. $\gamma^*(f)$. Es gilt

$$\gamma(f) = \alpha(s, f), \tag{14}$$

wo s irgendeine Standardschnittfläche ist.

Beweis. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß s, f auf M^1 übereinstimmen. Für eine Umgebung des Simplexes x^2 werde die Faserung (2) über x^2 so als kartesisches Produkt $x^2 \times S^2$ dargestellt, daß f in die konstante Abbildung von x^2 auf einen fes ten Punkt p_0 von S^2 übergeht. s gehe aus der Schnittfläche s_1 der Faserung (1) hervor. Der Wert des durch s, f gegebenen Cozyklus der Klasse $\alpha(s, f)$ auf x^2 ist das durch die folgende Abbildung gegebene Element A der Homotopiegruppe $\pi_2(S^2)$: Das orientierte Simplex x^2 wird durch s in S^2 abgebildet, der Rand von x^2 geht in p_0 über.

Man hat die Hopfsche Faserung $S^3/S^1 = S^2$ mit der Projektionsabbildung τ (vgl. 1. 1, (3)). Durch die exakte Sequenz der Homotopiegruppen erhält man in bekannter Weise Isomorphismen von $\pi_2(S^2)$ auf die relative Homotopiegruppe $\pi_2(S^3, \tau^{-1}(p_0))$ und auf $\pi_1(S^1)$. Das Bild von A bei dem Isomorphismus auf $\pi_2(S^3, \tau^{-1}(p_0))$ wird durch die

Abbildung s_1 von x^2 in S^3 repräsentiert. Die Abbildung s_1 auf dem Rande von x^2 repräsentiert das Bild A' von A bei dem Isomorphismus von $\pi_2(S^2)$ auf $\pi_1(S^1)$. Es ist aber A' gerade der Wert des durch s_1 definierten Cozyklus der Klasse $\gamma(f)$ auf x^2.

Damit ist (14) bewiesen. Entsprechend gilt

$$\gamma^*(f) = \alpha(s^*, f), \tag{14*}$$

wo s^* irgendeine *-Standardschnittfläche ist (vgl. 1. 2).

Es folgt

$$\gamma(f) - \gamma^*(f) = \alpha(s, s^*). \tag{15}$$

$\alpha(s, s^*)$ ist unabhängig von der Auswahl der Standardschnittfläche s und der *-Standardschnittfläche s^*.

Weiter gilt:

$$\alpha(s, s^*) = \gamma_1(M), \tag{16}$$

$$\gamma(f) = \gamma^*(f) + \gamma_1(M). \tag{16a}$$

Beweis. In M sei eine hermitesche Metrik eingeführt. s_1 sei eine Schnittfläche von (1) über M^3, also ein kontravariantes Richtungsfeld. s_1^* sei das in bezug auf die hermitesche Metrik zu s_1 gehörige kovariante Richtungsfeld. s_1^* ist eine Schnittfläche von (1*) über M^3. Wir betrachten die Schnittflächen $s = \tau s_1$ und $s^* = \tau^* s_1^*$ über M^3 (siehe 1. 1, (3) und (3*)). Wie leicht zu sehen, ist für jeden Punkt $P \in M^3$

$$s(P) \neq s^*(P).$$

Daraus ergibt sich: s^* ist homotop zu $\bar{s}$ (siehe 1. 2) und damit

$$\alpha(s, s^*) = \alpha(s, \bar{s}) = \omega(s, s) = \gamma_1(M)$$

mittels 1. 2, (7) und (11). Aus (15) folgt dann (16a).

2. Verallgemeinerung der Plückerschen Geschlechtsformel.

2. 1. M sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen, H eine in M singularitätenfrei eingebettete analytische Fläche, die kompakt und zusammenhängend sei[1]) (H ist eine abgeschlossene zusammenhängende Punktmenge von M; für $P \in H$ gilt: Die Fläche H wird in einer Umgebung von P in bezug auf ein geeignetes lokales Koordinatensystem (z_1, z_2) durch $z_1 = 0$ gegeben). H ist eine kompakte orientierte Fläche, die Orientierung wird durch die komplexe Struktur in bekannter Weise bestimmt. $g(H)$ sei ihr Geschlecht, $e(H)$ ihre Eulersche Charakteristik. Es ist $e(H) = 2 - 2g(H)$.

In M werde eine Hermitesche Metrik eingeführt.

2. 1. 1. Für $P \in H$ bilden die Richtungen in P, die tangential zu H sind, eine S^1. Die zu H tangentiellen Richtungen von M bilden eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit $E_T(H)$, die in die Sphären S^1 der Tangentialrichtungen der Punkte von H gefasert ist:

$$E_T(H)/S^1 = H. \tag{17}$$

H, die Fasern und damit $E_T(H)$ sind in natürlicher Weise orientiert. Strukturgruppe ist die Gruppe S^1 der eigentlichen Drehungen in der Ebene. Zur Faserung (17) gehört eine 2-dimensionale Chernsche Cohomologieklasse (1. Hindernis) von H, die durch eine ganze Zahl $c_T(H)$, nämlich die Indexsumme einer Schnittfläche mit endlich vielen Singularitäten, gegeben werden kann ($c_T(H)$ ist eine *Seifertsche* Invariante der 3-dimensionalen gefaserten Mannigfaltigkeit $E_T(H)$, [16]). $c_T(H)$ hängt nicht von der speziellen Schnittfläche ab. Es gilt $c_T(H) = e(H)$.

2. 1. 2. Für $P \in H$ bilden die Richtungen in P, die unitär-orthogonal zu H sind, eine S^1. Die zu H unitär-orthogonalen (normalen) Richtungen von M bilden eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit $E_N(H)$, die in die Sphären S^1 der Normalrichtungen der Punkte von H gefasert ist:

$$E_N(H)/S^1 = H. \tag{18}$$

H ist durch die komplexe Struktur orientiert. S^1_P sei die zum Punkte P von H gehörige Faser; sie ist so zu orientieren, daß durch die Orientierung von H und die von S^1_P die natürliche Orientierung von M aufgespannt wird. Zur Faserung (18) gehört eine 2-dimensionale Chernsche Cohomologieklasse von H (1. Hindernis), die durch eine ganze Zahl $c_N(H)$, nämlich die Indexsumme einer Schnittfläche mit endlich vielen Singularitäten gegeben werden kann. $c_N(H)$ hängt nicht von der speziellen Schnittfläche ab. h sei die durch H repräsentierte 2-dimensionale Homologieklasse von M. Es gilt ($\circ$ bedeutet wieder Schnittzahlbildung)

$$c_N(H) = h \circ h \text{ [5]}. \tag{19}$$

Beweis. P sei ein Punkt von H. Es gibt ein lokales Koordinatensystem (u, v) von M mit $P = (0, 0)$, so daß H gegeben wird durch $u = 0$. In einer geeigneten Umgebung U von P kann man in bezug auf dieses Koordinatensystem die folgenden Konstruktionsschritte durchführen. Jeder Punkt $Q \in U \cap H$ $(Q = (0, v))$ wird mit dem Punkt (v, v) geradlinig verbunden. Der Vektor $\overrightarrow{[(0, v), (v, v)]}$ ist, falls $v \neq 0$, d. h. $Q \neq P$ ist, nicht 0 und nicht tangential zu H. Ferner sei $s(Q)$ $(Q \neq P)$ die zu H in Q unitär-orthogonale Richtung, die durch die zu H unitär-orthogonale Komponente dieses Vektors gegeben wird. $s(Q)$ ist eine „lokale" Schnittfläche der Faserung (18). Sie ist in $U \cap H$ definiert und hat in P eine isolierte Singularität mit dem Index 1.

Jeder Punkt $Q \in U \cap H$, $Q = (0, v)$, werde nun mit dem Punkt $(\bar{v}, v)$ geradlinig verbunden. Der Vektor $\overrightarrow{[(0, v), (\bar{v}, v)]}$ ist, falls $v \neq 0$, d. h. $Q \neq P$ ist, nicht Null und nicht tangential zu H. Man erhält jetzt eine „lokale" Schnittfläche der Faserung (18), die in $U \cap H$ definiert ist und in P eine isolierte Singularität mit dem Index -1 hat.

In geeigneten H-Umgebungen endlich vieler Punkte P_i von H $(i = 1, \ldots, |c_N(H)|)$ werden nun lokale Schnittflächen der Faserung (18) mit dem Index 1 bzw. -1 so angebracht, daß die Indexsumme gleich $c_N(H)$ ist. Diese lokalen Schnittflächen besitzen nach bekannten Sätzen eine gemeinsame Erweiterung s, wo s eine Schnittfläche ist, die nur die Singularitäten P_i hat. Aus dieser Schnittfläche s kann man nun eine 2-dimensionale kompakte orientierte in M liegende Fläche F_s konstruieren, die H in den Punkten P_i mit der Schnittzahl 1 bzw. -1 schneidet. (Man repräsentiert das Richtungsfeld s durch ein Vektorfeld $\mathfrak{v}$, das genau in den P_i Nullstellen hat. Der Vektor $\mathfrak{v}$ im Punkte $P \in M$ werde gegeben durch eine kleine Verrückung von P in einen benachbarten Punkt, den „Endpunkt des Vektors". Vgl. Alexandroff-Hopf, Topologie, p. 549. F_s ist die Fläche der Endpunkte dieser Vektoren.) F_s ist zu H homolog. Die Schnittzahl von F_s mit H ist gleich $c_N(H)$.

2. 2. **Satz.** *M und H seien wie in 2. 1 definiert. Die Eulersche Charakteristik $e(H)$ hängt nur von der Homologieklasse h von H ab und zwar gilt*

$$e(H) = -h \circ h + \gamma_1 h, \tag{20}$$

wo γ_1 die 2-dimensionale Chernsche Klasse von M (vgl. 1. 2), $\gamma_1 h$ das skalare Produkt von γ_1 mit h (γ_1 angewandt auf h) und $\circ$ die Bildung der Schittzahl bedeutet. Bezeichnet ferner c_1 die zu γ_1 duale 2-dimensionale Homologieklasse, so gilt

$$e(H) = -h \circ h + c_1 \circ h. \tag{20a}$$

[5]) Diesen Satz kenne ich durch Herrn H. Hopf.

Beweis. M kann so trianguliert werden, daß H ein Teilkomplex ist[6]) Die Triangulation sei so fein wie in 1. 2 und s_1 eine Schnittfläche der Faserung (17) mit endlich vielen Singularitäten $O_i \in H$. Ferner sei s_2 eine Schnittfläche von (18) mit Singularitäten $P_i \in H$. Es sei stets $O_i \neq P_j$. Die O_i, P_j sollen im Innern von 2-Simplexen von H liegen, in jedem 2-Simplex liege höchstens eine Singularität. (s_1, s_2) definiert ein 2-Feld auf H, das auf das 2-Gerüst von M erweitert werden kann. $\gamma_1 h$ ist die Singularitätensumme von (s_1, s_2) auf H; das bedeutet: Der Rand x^2 des orientierten 2-Simplexes x^2 von H wird durch (s_1, s_2) in U_2 (Raum der unitär-orthogonalen 2-Beine = unitäre Gruppe) abgebildet. Diese Abbildung repräsentiert ein Element der unendlich-zyklischen Gruppe $\pi_1(U_2)$. Jedem Simplex x^2 von H ist so eine ganze Zahl zugeordnet, die mit $\sigma_1(x^2)$ bezeichnet werde. Die Summe dieser Zahlen für alle 2-Simplexe von H ist $\gamma_1 h$. Wenn s_1 über x^2 keine Singularität hat, so ist, wie leicht einzusehen, $\sigma_1(x^2)$ gleich dem Index von s_2. Entsprechend für s_2. Es folgt:

$$\begin{aligned} \gamma_1 h &= \text{Indexsumme von } s_1 + \text{Indexsumme von } s_2, \\ \gamma_1 h &= \quad e(H) \quad + \quad h \circ h \quad . \end{aligned}$$

2. 3. M sei wie bisher eine komplexe Mannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen, Q ein Punkt von M. Wir verwenden den folgenden, aus der algebraischen Geometrie bekannten und von H. Hopf ([14], vgl. auch [8], p. 85) für komplexe Mannigfaltigkeiten betrachteten Einsetzungsprozeß (σ-Prozeß).

Mit $\sigma_Q M$ werde die komplexe Mannigfaltigkeit bezeichnet, die aus M durch Herausstechen von Q und darauf folgendes analytisches Einsetzen von T_Q entsteht. T_Q bezeichnet dabei die Sphäre S^2 (= komplex-projektive Gerade = Riemannsche Zahlenkugel) der komplexen Linienelemente in Q, die eine kompakte analytische Fläche vom Geschlecht Null ist und singularitätenfrei in $\sigma_Q M$ liegt. Es gibt eine analytische Abbildung t_Q von $\sigma_Q M$ auf M mit folgenden Eigenschaften:

1. t_Q bildet T_Q auf Q ab.
2. t_Q bildet $\sigma_Q M - T_Q$ eineindeutig auf $M - Q$ ab.
3. Wenn z_1, z_2 lokale Koordinaten in einer Umgebung von Q sind, so gibt es in $\sigma_Q M$ lokale Koordinatensysteme (z_1', z_2'), (z_1'', z_2''), die eine Umgebung von T_Q überdecken und für die t_Q gegeben wird durch

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1', & z_1 &= z_1'' z_2'', \\ z_2 &= z_1' z_2', & z_2 &= z_2''. \end{aligned}$$

Für die durch T_Q repräsentierte Homologieklasse τ_Q von $\sigma_Q M$ gilt

$$\tau_Q \circ \tau_Q = -1. \tag{21}$$

Jede j-dimensionale ($j < 4$) Homologieklasse h von M läßt sich durch einen Zyklus repräsentieren, der Q nicht trifft und deshalb sofort als Zyklus von $\sigma_Q M$ aufgefaßt werden kann und eine Homologieklasse $t_Q^* h$ von $\sigma_Q M$ repräsentiert. t_Q^* bildet den Schnittring von M isomorph in den von $\sigma_Q M$ ab (Hopfscher Umkehrungshomomorphismus). Die erste und dritte Homologiegruppe von M und $\sigma_Q M$ sind isomorph (Isomorphismus t_Q^*). Für die zweite Homologiegruppe gilt

$$H^2(\sigma_Q M) = t_Q^* H^2(M) \dotplus (\tau_Q) \qquad (\dotplus = \text{direkte Summe}), \tag{22}$$

---

[6]) Die in dieser Arbeit vorkommenden Triangulierbarkeitsaussagen lassen sich aus den Arbeiten [2], [3] von Cairns mit Hilfe von einigen Zusätzen zu den dortigen Beweisanordnungen entnehmen.

wo (τ_Q) die von τ_Q erzeugte unendlich-zyklische Gruppe bezeichnet. Die Schnittmatrix von $\sigma_Q M$ wird durch (21) und durch

$$t_Q^* h \circ \tau_Q = 0 \quad \text{für} \quad h \in H^2(M) \tag{23}$$

gegeben.

Für die 2-dimensionalen Chernschen Homologieklassen von M und $\sigma_Q M$ gilt, wie sofort zu sehen ist,

$$c_1(\sigma_Q M) = t_Q^* c_1(M) + m\tau_Q \qquad (m \text{ ganze Zahl}).$$

Aus 2. 2, (20a) folgt

$$-\tau_Q \circ \tau_Q + c_1(\sigma_Q M) \circ \tau_Q = 1 - m = 2, \text{ d. h. } m = -1.$$

Es gilt also

$$c_1(\sigma_Q M) = t_Q^* c_1(M) - \tau_Q. \tag{24}$$

2. 4. H sei eine kompakte analytische zusammenhängende Fläche in der kompakten komplexen Mannigfaltigkeit M mit einem Doppelpunkt D. Sie wird zu einer orientierten topologischen Fläche H^*, wenn man in natürlicher Weise den Doppelpunkt D von H als Menge von zwei verschiedenen Punkten von H^* auffaßt. Unter $e(H)$ soll die Eulersche Charakteristik von H^* verstanden werden. H ist eine abgeschlossene Teilmenge von M. Für $P \in H$ und $P \neq D$ gibt es eine Umgebung U und ein lokales Koordinatensystem z_1, z_2 in U, so daß H in U durch $z_1 = 0$ gegeben wird. Es gibt eine Umgebung V von D und ein lokales Koordinatensystem v_1, v_2 in V so, daß H in V durch $v_1 v_2 = 0$ gegeben wird. In D werde T_D eingesetzt (2. 3). In $\sigma_D M$ liegt jetzt eine singularitätenfreie analytische Fläche H^*, die T_D in zwei Punkten einfach schneidet und außerhalb T_D durch t_D eineindeutig auf H abgebildet wird. Die Eulersche Charakteristik $e(H^*)$ bestimmt sich jetzt so:

h, h^* seien die Homologieklassen von H, H^* in M bzw. $\sigma_D M$. Hierfür gilt:

$$h^* + 2\tau_D = t_D^* h.$$

Damit erhält man aus 2. 2, (20a) unter Verwendung von (21) und (23)

$$\begin{aligned} e(H) = e(H^*) &= -h^* \circ h^* + h^* \circ c_1(\sigma_D M) \\ &= -(t_D^* h - 2\tau_D) \circ [(t_D^* h - 2\tau_D) - (t_D^* c_1(M) - \tau_D)] \\ &= -h \circ h + h \circ c_1(M) + 2. \end{aligned}$$

Durch einen Doppelpunkt wird also wie in der algebraischen Geometrie die Eulersche Charakteristik um 2 vermehrt, das Geschlecht um 1 vermindert.

Durch wiederholte Anwendung des σ-Prozesses (Einsetzen von σ-Bäumen [14]) kann man wie in der algebraischen Geometrie jede beliebige algebraische Singularität einer analytischen Fläche auflösen ([9]), wie wir es am Beispiel des Doppelpunktes durchgeführt haben. Man erhält dann folgendes Ergebnis:

2. 5. **Satz.** *M sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, H eine kompakte analytische Fläche in M. Wir lassen zu, daß H (algebraische) Singularitäten hat und daß H reduzibel ist. Wir setzen voraus, daß H keine mehrfachen Bestandteile enthält. H wird zu einer kompakten orientierten topologischen evtl. nicht zusammenhängenden Fläche H^*, wenn man einen singulären Punkt von H, durch den k Zweige hindurchgehen, in „natürlicher" Weise als Menge von k verschiedenen Punkten von H^* auffaßt. H^* liegt als singularitätenfreie analytische Fläche in einer komplexen Mannigfaltigkeit M^*, die aus M durch Einsetzen von σ-Bäumen in die singulären Punkte von H hervorgeht. Unter $e(H)$ werde die Eulersche*

Charakteristik von H^* ($=$ Summe der Charakteristiken der Zusammenhangskomponenten von H^*) verstanden. Wie in der algebraischen Geometrie kann jeder Singularität Q eine Zahl a_Q zugeordnet werden: $a_Q = \Sigma\, v_j(v_j - 1)$. Die Summe ist zu erstrecken über die Vielfachheiten von H in Q und den „unendlich benachbarten" Punkten von Q, die in naheliegender Weise als Punkte auf in Q eingesetzten σ-Bäumen zu deuten sind. a_Q hängt nur von der lokalen Struktur der Singularität ab. h sei die durch H repräsentierte Homologieklasse von M, c_1 die 2-dimensionale Chernsche Homologieklasse von M. Dann gilt:

$$e(H) = -h \circ h + c_1 \circ h + \Sigma\, a_Q.$$

Die Summe ist über alle Singularitäten von H zu erstrecken.

2. 6. Der Satz 2. 5 ist die genaue Verallgemeinerung der Formel über das Geschlecht einer algebraischen Kurve auf einer singularitätenfreien algebraischen Fläche, wenn man die Tatsache beachtet, daß für eine algebraische Fläche $-c_1$ die kanonische Klasse der Fläche ist (vgl. [10]).

Für die komplex-projektive Ebene ist die kanonische Klasse gleich

$$-3 \cdot \text{projektive Gerade} = -\text{Chernsche Klasse}.$$

Die Formel in 2. 5 besagt dann: Die Charakteristik einer Kurve n-ter Ordnung ist gleich

$$-n^2 + 3n + \Sigma\, a_Q.$$

Die Übereinstimmung der Chernschen Klasse mit der negativen kanonischen Klasse ergibt sich aus folgendem Satz:

2. 7. Es wird vorausgesetzt, daß es in M zwei unabhängige meromorphe Funktionen F_1, F_2 gibt. Durch die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z_1, z_2)}$ (z_1, z_2 beliebige lokale Koordinaten in M) wird eine Verteilung von Null- und Polstellenflächen mit ganzzahligen Vielfachheiten gegeben (in üblicher Weise: Nullstellenfläche positive, Polstellenfläche negative Vielfachheit). Hierdurch wird ein Zyklus C von M gegeben. Die Homologieklasse von C hängt nicht von der Auswahl von F_1, F_2 ab, wie direkt einzusehen ist. Sie ist gleich $-c_1(M)$.

Ein Beweis dieses Satzes soll in 3. 6. 1 angedeutet werden.

3. Verallgemeinerung von Sätzen über Kurvenbüschel auf algebraischen Flächen (Invariante von Zeuthen-Segre).

3. 1. M sei eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit[2]), F eine in M definierte nicht konstante meromorphe Funktion. (Es gibt bekanntlich komplexe Mannigfaltigkeiten, in denen keine nicht konstanten meromorphen Funktionen existieren!) Die an die Niveauflächen von F tangentiellen komplexen Linienelemente bilden ein Feld f mit endlich vielen Singularitäten (Schnittfläche der Faserung 1. 1, (2)). Die Indexsumme von f (vgl. 1. 2) soll bestimmt werden.

H_a sei die a-Stellenfläche von F (a komplexe Zahl oder $a = \infty$; H_∞ Polstellenfläche von F). Ein Punkt P von M heißt (algebraisch-)singulärer Punkt von F, wenn F in P eine Unbestimmtheitsstelle oder wenn die durch P gehende $H_{F(P)}$ in P eine Singularität hat (d. h. es gibt kein lokales Koordinatensystem z_1, z_2 mit $P = (0, 0)$, in dem $H_{F(P)}$ durch $z_1 = 0$ gegeben wird). Es gibt nur endlich viele singuläre Punkte S_i von F. Ist P kein singulärer Punkt, so bezeichne $f(P)$ das in P an $H_{F(P)}$ tangentielle komplexe Linienelement. f ist eine Schnittfläche der Faserung 1. 1, (2) mit den endlich vielen Singularitäten S_i.

h bezeichne die (von a unabhängige) 2-dimensionale Homologieklasse, die durch H_a repräsentiert wird. Die einzelnen irreduziblen Komponenten von H_a sind dabei mit den entsprechenden positiven Vielfachheiten zu versehen. $D_{a,1}, \ldots, D_{a,n_a}$ seien die irreduziblen Komponenten von H_a. Die entsprechenden Vielfachheiten seien $v_{a,j}$ $(j = 1, \ldots, n_a)$. Sie geben die Ordnung des Verschwindens von $F - a$ $(a \neq \infty)$ bzw. $1/F$ auf $D_{a,j}$ bzw. $D_{\infty,j}$ an. Wir setzen

$$W_a = \sum_j (v_{a,j} - 1)\, D_{a,j}.$$

Nur für endlich viele a gibt es Komponenten $D_{a,j}$ mit $v_{a,j} > 1$.

Nur für endlich viele a ist also $W_a \neq 0$. Schließlich sei w die durch die Summe aller W_a repräsentierte Homologieklasse von M, die kurz als *Verzweigung* bezeichnet werde.

3. 2. Satz. *s sei eine Standardschnittfläche der Faserung* 1. 1, (2) *und f, h, w seien wie in* 3. 1 *definiert. Dann ist $\alpha(s, f)$ die zu $-2h + w + c_1(M)$ duale Cohomologieklasse.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $W_\infty = 0$ ist. In $M - H_\infty$ ist F regulär. z_1, z_2 seien lokale Koordinaten von M. Dann ist $(\partial F/\partial z_1, \partial F/\partial z_2)$ ein in $M - H_\infty$ definiertes kovariantes Vektorfeld. In $M - H_\infty - \Sigma W_a - \{S_i\}$ ist $(\partial F/\partial z_1, \partial F/\partial z_2) \neq 0$, bestimmt also dort ein kovariantes Richtungsfeld $\mathfrak{r}^*(P)$. Es ist $\mathfrak{r}^*\mathfrak{r}^*(P) = f(P)$ (vgl. 1. 1). M kann so trianguliert werden, daß folgendes gilt[6]):

1. Die S_i sind Nullsimplexe.
2. H_∞ und jede W_a sind 2-dimensionale Teilkomplexe.
3. Die Triangulation erfüllt die Bedingung von 1. 2. Die duale Zellteilung erfüllt die analoge Bedingung: Über einer geeigneten Umgebung jeder Zelle sind (1) und (1*) trivial.

M^j $(j = 1, \ldots, 4)$ bezeichne hier das j-dimensionale Gerüst der dualen Zellteilung.

f ist eine Schnittfläche der Faserung (2) über M^3, ebenso $\mathfrak{r}^*$ eine Schnittfläche von 1. 3, (13*) über M^1. Bezeichnet $\Gamma^*(f)$ den 2-dimensionalen Hindernis-Cozyklus von $\mathfrak{r}^*$, so ist der Wert von $\Gamma^*(f)$ auf einer Zelle x^2 von M^2, die H_∞ und ΣW_a nicht schneidet, Null. Ferner gilt:

(*) Der Wert von $\Gamma^*(f)$ auf einer Zelle x^2, die H_∞ mit der Schnittzahl 1 schneidet, ist gleich -2.

Denn in einer Umgebung U jedes nichtsingulären Punktes P von H_∞ gilt $1/F = z_1$ in bezug auf geeignete lokale Koordinaten (z_1, z_2), und H_∞ wird in U durch $z_1 = 0$ gegeben. Man hat daher $\partial F/\partial z_1 = -1/z_1^2$, $\partial F/\partial z_2 = 0$.

(**) Der Wert von $\Gamma^*(f)$ auf einer Zelle x^2, die einen irreduziblen Bestandteil $D_{a,j}$ (Vielfachheit $v_{a,j} > 1$) von W_a mit der Schnittzahl 1 schneidet, ist $v_{a,j} - 1$.

Denn in einer Umgebung U jedes nichtsingulären Punktes P von $D_{a,j}$ gilt $F - a = z_1^{v_{a,j}}$ in bezug auf geeignete lokale Koordinaten (z_1, z_2), und $D_{a,j}$ wird durch $z_1 = 0$ gegeben. Es ist daher $\partial F/\partial z_1 = v_{a,j} z_1^{v_{a,j}-1}$, $\partial F/\partial z_2 = 0$.

Aus (*) und (**) folgt: Die Cohomologieklasse $\gamma^*(f)$ von $\Gamma^*(f)$ ist dual zu $-2h + w$. Aus 1. 3, (14), (16a) erhält man dann die zu beweisende Behauptung.

3. 3. Die Indexsumme der Schnittfläche f ist eine ganze Zahl, die mit c_f bezeichnet werde (vgl. 1. 2). Es gilt

$$c_f = (2h - w) \circ (2h - w) - (2h - w) \circ c_1(M) + c_2(M), \tag{25}$$

wie sofort aus 1. 2, (10a) und 3. 2 folgt. Wir haben also insgesamt den

Satz. *F sei eine in der kompakten komplexen Mannigfaltigkeit*[2]) *M definierte meromorphe Funktion. h sei die (gemeinsame) Homologieklasse der Niveaustellenflächen von F,*

w die Verzweigung (vgl. 3. 1) von F, $c_1(M)$ die zur 2-dimensionalen Chernschen Cohomologieklasse duale Homologieklasse von M, $c_2(M)$ die Eulersche Charakteristik von M. Dann wird die Indexsumme c_f des Feldes f der an die Niveauflächen tangentiellen komplexen Linienelemente durch die Formel (25) *gegeben.*

3. 4. Von einer *allgemeinen* meromorphen Funktion F wollen wir sprechen, wenn F folgende Eigenschaften hat:

1. Es ist $W_a = 0$.
2. F hat $h \circ h$ Unbestimmtheitsstellen. Jede Unbestimmtheitsstelle P ist vom Typus z_1/z_2, d. h. in einer geeigneten Umgebung U von P gibt es ein lokales Koordinatensystem z_1, z_2, in dem $F(z_1, z_2) = z_1/z_2$ gilt.
3. Jede andere Singularität P von F ist Doppelpunkt von $H_{F(P)}$ (vgl. 2. 4).
4. Jede Fläche H_a besitzt höchstens einen Doppelpunkt.

Wie sofort zu sehen, hat f in jedem singulären Punkt P den Index 1. Aus **3. 3** folgt nun:

Eine allgemeine meromorphe Funktion F besitzt $3h \circ h - 2h \circ c_1(M) + c_2(M)$ Niveauflächen mit Doppelpunkt.

3. 5. Zusammenhang mit bekannten Sätzen der algebraischen Geometrie. Als Anwendung des Bisherigen untersuchen wir einige bekannte Aussagen mit den Mitteln von **3. 1** bis **3. 4.**

3. 5. 1. M sei zunächst die komplex-projektive Ebene. In diesem Fall gilt:

$$c_1 = 3 \cdot \text{projektive Gerade}, \quad c_2 = 3.$$

Der Satz in **3. 4.** besagt: Ein allgemeines lineares Büschel von Kurven n-ter Ordnung enthält

$$3n^2 - 6n + 3 = 3(n-1)^2$$

Kurven mit Doppelpunkt[7]).

Einfachstes Beispiel: Ein Kegelschnittbüschel ($n = 2$) enthält drei Kurven mit Doppelpunkt, nämlich die drei in Geradenpaare zerfallenden Kegelschnitte des Büschels.

Nun sei M eine (singularitätenfreie) algebraische Fläche. Dann gilt ([19], p. 62):

Let $\{C\}$ be an irreducible linear pencil of curves, of genus π and degree n, and let δ be the number of curves in $\{C\}$ which are of genus $\pi - 1$. Then $I = \delta - n - 4\pi$. It can be shown that this expression is independent of the pencil $\{C\}$.

Hierin ist I die Zeuthen-Segre-Invariante. Diese Aussage der algebraischen Geometrie läßt sich aus **3. 4** so herleiten:

Die gemeinsame Homologieklasse der Kurven von $\{C\}$ ist h. Nach Definition des Grades einer Kurve auf einer algebraischen Fläche ist $n = h \circ h$. Die Kurven mit Doppelpunkt haben das Geschlecht $\pi - 1$ (vgl. 2. 4). π ist das (gemeinsame) Geschlecht der übrigen Kurven von $\{C\}$. Die Anzahl der Kurven mit Doppelpunkt ist gleich δ. Es ist dann (vgl. 2. 2, (20a))

$$2 - 2\pi = -h \circ h + c_1(M) \circ h.$$

Daher folgt

$$I = \delta - n - 4\pi = 3h \circ h - 2h \circ c_1(M) + c_2(M) - h \circ h + 2(-h \circ h + c_1(M) \circ h - 2),$$
$$I = c_2(M) - 4.$$

Wir haben noch die bekannte Tatsache ([19], p. 113) mitbewiesen, daß $I + 4$ die Eulersche Charakteristik von M ist.

---

[7]) Die Kurven eines linearen Büschels sind stets die Niveauflächen einer in der komplex-projektiven Ebene definierten meromorphen Funktion (siehe [18], p. 184).

3. 5. 2. Wir kehren nun zum Ausgangspunkt von **3. 1** zurück. Die irreduziblen Komponenten der Niveauflächen von F lassen sich in natürlicher Weise[8]) in Äquivalenzklassen einteilen. (Zwei irreduzible Komponenten einer Fläche H_a, die sich schneiden, gehören dabei stets zur gleichen Äquivalenzklasse.) Die Äquivalenzklassen können in natürlicher Weise[8]) als Punkte einer (kompakten) Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ aufgefaßt werden. Unter dem Geschlecht $\varrho(F)$ von F werde das Geschlecht dieser Fläche $\mathfrak{F}$ verstanden. Q_i seien die Unbestimmtheitsstellen von F. Ordnet man jedem Punkt P von $M - \{Q_i\}$ die Äquivalenzklasse der durch ihn hindurchgehenden Komponenten von $H_{F(P)}$ zu, so erhält man eine analytische Abbildung F' von $M - \{Q_i\}$ auf $\mathfrak{F}$.

Satz. *Wenn F eine Unbestimmtheitsstelle besitzt, so ist $\varrho(F) = 0$.*

(In [19], p. 25 findet sich ein entsprechender Satz über Kurvenbüschel auf algebraischen Flächen.)

Beweis. $\mathfrak{F}$ kann so als verzweigte analytische Überlagerung der Riemannschen Zahlenkugel S^2 mit der Überlagerungsabbildung G aufgefaßt werden, daß $F = GF'$ ist. P sei eine Unbestimmtheitsstelle von F und es werde $\varrho(F) > 0$ angenommen. S^3 sei der Rand einer geeigneten Umgebung von P. Die Hopfsche Invariante γ der Abbildung $F \mid S^3$ von S^3 auf S^2 ist $\neq 0$, nämlich gleich der Schnittzahl von H_0 und H_∞ in P (hierbei bezeichnet $F \mid S^3$ die auf S^3 beschränkte Abbildung F). Die Abbildung $F' \mid S^3$ von S^3 auf $\mathfrak{F}$ ist nullhomotop, da $\pi_3(\mathfrak{F}) = 0$ ist. Also wäre auch $F \mid S^3$ nullhomotop. Widerspruch zu $\gamma \neq 0$.

3. 5. 3. Wir betrachten jetzt allgemein eine analytische Abbildung F' von M auf eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$ vom Geschlecht ϱ. Ist H_a $(a \in \mathfrak{F})$ die a-Stellenfläche von F', so schneiden sich H_a, H_b nicht für $a \neq b$. Analog zu **3. 1.** sei $h(F')$ die gemeinsame Homologieklasse der H_a. Ebenso wie in **3. 1.** ist eine Verzweigungs-Homologieklasse $w(F')$ definiert. f sei das durch die H_a definierte Feld von komplexen Linienelementen. Dann ist

$$\alpha(s, f) \text{ dual zu } (2\varrho - 2)\, h(F') + w(F') + c_1(M).$$

Beweis. G sei eine analytische verzweigte n-blättrige Überlagerungsabbildung von $\mathfrak{F}$ auf die Riemannsche Zahlenkugel S^2. Die Anzahl der Verzweigungspunkte (mit Vielfachheiten) sei d (ein k-blättriger Verzweigungspunkt hat die Vielfachheit $k - 1$). Wir wenden **3. 2** mit $h = h(F)$, $w = w(F)$ auf die meromorphe Funktion $F = GF'$ an und erhalten:

$\alpha(s, f)$ ist dual zu

$$\begin{aligned} -2h(F) + w(F) + c_1(M) &= -2nh(F') + dh(F') + w(F') + c_1(M) \\ &= (2\varrho - 2)\, h(F') + w(F') + c_1(M). \end{aligned}$$

Ist speziell $w(F') = 0$, so folgt aus **1. 2**, (10a) und wegen $h(F') \circ h(F') = 0$ für die Indexsumme c_f des Feldes f:

$$c_f = (2\varrho - 2)\, h(F')\, c_1(M) + c_2(M).$$

Wenn π das Geschlecht einer H_a ohne Singularitäten ist, und alle anderen H_a genau einen Doppelpunkt haben, also vom Geschlecht $\pi - 1$ sind, und δ die Anzahl der H_a mit Doppelpunkt ist, dann folgt weiter (vgl. **2. 2**, (20a))

$$h(F') \circ c_1(M) = 2 - 2\pi$$

und

$$\delta = -(2\varrho - 2)(2\pi - 2) + c_2(M).$$

---

[8]) Vgl. hierzu eine demnächst in Münster erscheinende Dissertation von K. Koch.

Für eine algebraische Fläche ist diese Formel bekannt ([19], p. 43):

$$I = \delta + 4(\varrho - 1)(\pi - 1) - 4$$

(Formel von Castelnuovo-Enriques).

3. 6. In diesem Abschnitt soll ein Beweis für **2.** 7. angedeutet werden. Auf die Einzelheiten des Beweises wird nicht eingegangen.

3. 6. 1. Die meromorphen Funktionen F_1, F_2 bestimmen (siehe **3.** 1.) in M Felder f_1, f_2 von komplexen Linienelementen. Der Ort der Punkte P von M mit $f_1(P) = f_2(P)$ ist eine in M liegende kompakte analytische Fläche, die durch die singulären Punkte von f_1, f_2 hindurchgeht.

Diese analytische Fläche, deren irreduzible Komponente in natürlicher Weise mit positiven Vielfachheiten zu versehen sind, repräsentiert eine Homologieklasse c' von M.

Man kann zeigen (vgl. das Lemma in [12]):

$$\omega(f_1, f_2) \text{ dual zu } c'. \tag{26}$$

h_1, h_2 seien die Homologieklassen der Niveauflächen von F_1, F_2, ferner w_1, w_2 die Verzweigungen von F_1, F_2 (vgl. **1.** 3).

Dann läßt sich zeigen: Der Zyklus C (siehe **2.** 7) gehört zur Homologieklasse

$$-2h_1 + w_1 - 2h_2 + w_2 + c'.$$

Diese Homologieklasse ist nach **3.** 2 und (26) dual zu

$$\alpha(s, f_1) + \alpha(s, f_2) + \omega(f_1, f_2) - 2\gamma_1(M).$$

Aus **1.** 2, (9a) und (11) folgt schließlich, daß diese Summe gleich $-\gamma_1(M)$ ist. Damit ist dann die Behauptung von **2.** 7 bewiesen.

3. 6. 2. Es werde noch ein Beispiel für (26) angegeben.

In der komplex-projektiven Ebene seien zwei lineare Kurvenbüschel[7]) von Kurven der Ordnung n bzw. n' gegeben. Der Ort der Punkte, in denen sich zwei Kurven der beiden Büschel berühren, ist eine Kurve der Ordnung $2(n + n') - 3$ (siehe z. B. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik II 1 (2. Auflage 1910). p. 339).

Zu den Kurvenbüscheln gehören die tangentialen Felder f, f' von komplexen Linienelementen. Es ist

$$\omega(f, f') \text{ dual zu } (2(n + n') - 3) \cdot \text{projektive Gerade.}$$

Literatur.

1. *Behnke, H.* und *Stein, K.*, Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete, Math. Annalen **124**, 1—16 (1951).
2. *Cairns, S. S.*, On the triangulation of regular loci, Annals of Mathematics (2) **35**, 579—587 (1934).
3. *Cairns, S. S.*, Triangulation of the manifold of class one, Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 549—552 (1935).
4. *Chern, S. S.*, Characteristic classes of Hermitian manifolds, Annals of Mathematics (2) **47**, 85—121 (1946).
5. *Ehresmann, Ch.*, Sur la théorie des espaces fibrés (Topologie algébrique, Paris 1947). Colloques internat. centre nat. rech. sci. Nr. 12, 3—15 (1949).
6. *Hirsch, G.*, L'anneau de cohomologie d'un espace fibré et les classes caractéristiques, C. R. Acad. Sci. Paris **229**, 1297—1299 (1949).
7. *Hirsch, G.*, Quelques relations entre l'homologie dans les espaces fibrés et les classes caractéristiques relatives à un groupe de structure. Centre Belge rech. math., Coll. Top., 123—136 (1951).
8. *Hirzebruch, F.*, Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **124**, 77—86 (1951).
9. *Hirzebruch, F.*, Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Dissertation Münster 1950.

10. *Hodge, W. V. D.*, The characteristic classes on algebraic varieties, Proc. London Math. Soc. (3) **1**, 138—151 (1951).
11. *Hopf, H.*, Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant, New York, 167—185 (1948).
12. *Hopf, H.*, Sur les champs d'éléments de surface dans les variétés à 4 dimensions. Colloques internat. centre nat. rech. sci. Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 1947), 55—59 (1949).
13. *Hopf, H.*, Sur une formule de la théorie des espaces fibrés. Centre Belge rech. math., Coll. Top., 117—121 (1951).
14. *Hopf, H.*, Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten, Rend. Mat. e Appl. V, **10**, 169—182 (1951).
15. *Kundert, E. G.*, Über Schnittflächen in speziellen Faserungen und Felder reeller und komplexer Linienelemente, Annals of Mathematics (2) **54**, 215—246 (1951).
16. *Seifert, H.*, Topologie 3-dimensionaler gefaserter Räume, Acta Math. **60**, 147—238 (1932).
17. *Steenrod, N.*, The topology of fibre bundles, Princeton Mathematical Series No. 14 (1951).
18. *van der Waerden, B. L.*, Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin, Julius Springer (1939).
19. *Zariski, O.*, Algebraic Surfaces. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin, Julius Springer (1935).

Eingegangen 29. März 1952.

Zusätze bei der Korrektur.

Zusatz 1. Die Herren S. S. Chern und K. Kodaira haben mir gesagt, daß die adjunction formula aus der Dualitätsformel für die Chernschen Klassen erhalten werden kann. Für einen Beweis der Dualitätsformel siehe eine demnächst erscheinende Arbeit von S. S. Chern. Diejenigen Ergebnisse von Kundert, die in meiner Arbeit benutzt werden, können mit Hilfe der Dualitätsformel bewiesen werden. Vgl. dazu die Arbeiten von W. T. Wu. — Zu Satz I vgl. ferner: K. Kodaira, The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces, Amer. Journal of Math. **73**, 813—875 (1951), insb. p. 852, (5. 4.), und Annals of Math. **56**, 288—342 (1952), insb. p. 319—320 und Fußnote 45.

Zusatz 2. In einer Note in Proc. of the Nat. Acad. Sciences **38**, 893—895 (1952) hat E. G. Kundert einen Satz über meromorphe Differentialformen angegeben, der den Satz II bei richtiger Interpretation von „polar cycle" teilweise enthält (Anwendung des Kundertschen Theorems I auf die meromorphe Differentialform dF).

Limitentheorie in topologischen Vereinen und Verbänden.

Herrn Prof. Dr. Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Georg Nöbeling* in Erlangen.

N. Bourbaki[1]) hat in einem topologischen Raum die adhärenten Punkte und die Konvergenz eines Filters definiert. G. Choquet[2]) hat, ebenfalls in einem topologischen Raum, den unteren und den oberen Limes einer Mengenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$ definiert und die Theorie dieser Limiten entwickelt; sie umfaßt die Limitentheorie der Mengenfolgen als Spezialfall. In der vorliegenden Arbeit entwickeln wir die Choquetsche Theorie allgemeiner in beliebigen topologischen Vereinen und Verbänden[3])

Eine nicht leere Menge $\mathfrak{V}$ irgendwelcher Dinge $A, B, \ldots$, welche wir *Somen* nennen, heißt teilweise geordnet oder, wie wir sagen wollen, ein *Verein*[4]), wenn für gewisse Paare A, B von Somen aus $\mathfrak{V}$ eine Relation $A \leqq B$ definiert ist, die den folgenden drei Bedingungen genügt:

1. Es ist $A \leqq A$ für jedes $A \in \mathfrak{V}$.
2. Aus $A \leqq B$, $B \leqq C$ folgt $A \leqq C$.
3. Es ist $A \leqq B$ und $B \leqq A$ dann und nur dann, wenn $A = B$ ist.

Es sei $\mathfrak{V}$ ein Verein. Existiert für ein System $\mathfrak{S}$ von Somen A aus $\mathfrak{V}$ ein Soma V in $\mathfrak{V}$ derart, daß erstens $A \leqq V$ gilt für jedes $A \in \mathfrak{S}$ und zweitens $V \leqq W$ gilt für jedes Soma W aus $\mathfrak{V}$ mit $A \leqq W$ für alle $A \in \mathfrak{S}$, so heißt V die *Vereinigung* der Somen $A \in \mathfrak{S}$; existiert in $\mathfrak{V}$ ein Soma D derart, daß erstens $D \leqq A$ gilt für jedes $A \in \mathfrak{S}$ und zweitens $F \leqq D$ gilt für jedes Soma F aus $\mathfrak{V}$ mit $F \leqq A$ für alle $A \in \mathfrak{S}$, so heißt D der *Durchschnitt* der Somen $A \in \mathfrak{S}$; man bezeichnet die Vereinigung der $A \in \mathfrak{S}$ mit $\bigvee A$ und den Durchschnitt der $A \in \mathfrak{S}$ mit $\bigwedge A$; besteht $\mathfrak{S}$ speziell nur aus endlich vielen Somen $A_1, \ldots, A_n$, so bezeichnet man ihre Vereinigung auch mit $A_1 \vee \cdots \vee A_n$ und ihren Durchschnitt mit $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$. Die Vereinigung aller Somen aus $\mathfrak{V}$, falls vorhanden, heißt das *Einssoma* E von $\mathfrak{V}$ und der Durchschnitt aller Somen aus $\mathfrak{V}$, falls vorhanden, das *Nullsoma* 0 von $\mathfrak{V}$. Ein Soma P heißt ein *Atom*, wenn jedes Soma X aus $\mathfrak{V}$ mit $X \leqq P$ entweder gleich P oder, falls das Nullsoma 0 existiert, gleich 0 ist.

Existiert im Verein $\mathfrak{V}$ für je zwei Somen A_1 und A_2 sowohl die Vereinigung $A_1 \vee A_2$ als auch der Durchschnitt $A_1 \wedge A_2$, so heißt $\mathfrak{V}$ ein *Verband*. Existiert in $\mathfrak{V}$ für jedes (endliche oder unendliche) Somensystem sowohl die Vereinigung als auch der Durch-

---

[1]) *N. Bourbaki*, Topologie générale, Act. Sc. et ind. 848, Paris 1940.

[2]) *G. Choquet*, Convergences, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys. II. s., **23** (1948), S. 37—112.

[3]) Auf Boole-Verbände sind topologische Begriffe und Theorien schon mehrfach ausgedehnt worden (vgl. hierzu u. a. *S. Sikorski*, Closure algebras Fund. Math. **36** (1949). Eine allgemeine Theorie der topologischen Vereine und Verbände soll in meinem Buch „Analytische Topologie" voraussichtlich 1954 erscheinen.

[4]) Zur Theorie der Vereine und Verbände vgl. *H. Hermes* u. *G. Köthe*, Die Theorie der Verbände, Enzykl. Math. Wiss. I 1, 13; *G. Birkhoff*, Lattice theory, Amer. Math. Soc. Publ. XXV, 1948.

schnitt, so heißt $\mathfrak{V}$ ein *Vollverband*. Ein Verband $\mathfrak{V}$ heißt *distributiv*, wenn für je drei Somen A, B und C die Gleichung $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ gilt (dann ist auch $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ und umgekehrt). Existiert in einem distributiven Verband $\mathfrak{V}$ mit Eins- und Nullsoma für jedes Soma A ein (dann eindeutig bestimmtes) Soma A' derart, daß $A \vee A' = E$ und $A \wedge A' = 0$ ist, so heißt $\mathfrak{V}$ ein *Boole-Verband* (und das Soma A' das *Komplement* von A).

Beispiel 1. Ist M eine nicht leere Menge irgendwelcher Dinge, so ist das System aller Teilmengen $A, B, \ldots$ von M ein Boole-Vollverband bezüglich der Relation $\leqq$ = „ist Teilmenge von". Er heiße der *Mengenverband* von M. Die Menge M ist das Einssoma und die leere Menge das Nullsoma dieses Verbandes; die aus je einem Element von M bestehenden Mengen sind die Atome. In einem Mengenverband schreiben wir $\bigcup, \bigcap, \cup, \cap$ statt $\bigvee, \bigwedge, \vee, \wedge$[5]).

Ein nicht leeres Teilsystem $\mathfrak{R}$ eines Vereins $\mathfrak{V}$ nennen wir einen *Raster*, wenn es folgende zwei Eigenschaften hat:

4. Kein Soma R aus $\mathfrak{R}$ ist das Nullsoma (falls dieses überhaupt in $\mathfrak{V}$ existiert).

5. Sind R_1 und R_2 zwei Somen aus $\mathfrak{R}$, so existiert in $\mathfrak{R}$ ein Soma R mit $R \leqq R_1$ und $R \leqq R_2$.

Gilt außerdem:

6. Aus $R \in \mathfrak{R}$, $R \leqq S$, $S \in \mathfrak{V}$ folgt $S \in \mathfrak{R}$,

so heißt $\mathfrak{R}$ ein *Filter*[6]). — Ist $\mathfrak{R}$ ein Raster, so ist das System aller Somen S aus $\mathfrak{V}$ mit $R \leqq S$ für mindestens ein $R \in \mathfrak{R}$ ein Filter; er heißt durch $\mathfrak{R}$ *erzeugt* und $\mathfrak{R}$ eine *Basis* dieses Filters[6]).

Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^*$ zwei Raster in $\mathfrak{V}$ und existiert zu jedem $R \in \mathfrak{R}$ mindestens ein $R^* \in \mathfrak{R}^*$ mit $R^* \leqq R$, so heißt $\mathfrak{R}^*$ *mindestens so fein wie* $\mathfrak{R}$. Ist beispielsweise $\mathfrak{R}^*$ der durch einen Raster $\mathfrak{R}$ erzeugte Filter, so ist $\mathfrak{R}^*$ mindestens so fein wie $\mathfrak{R}$ und umgekehrt.

Ein Raster (Filter) $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{V}$ heißt ein *Ultraraster* (*Ultrafilter*) in $\mathfrak{V}$, wenn in $\mathfrak{V}$ kein Raster (Filter) existiert, welcher $\mathfrak{U}$ als echte Teilmenge enthält. Jeder Ultraraster ist ein Ultrafilter und umgekehrt.

Beispiel 2. Es sei I die Menge aller natürlichen Zahlen. Für jedes $i \in I$ sei I_i die Menge aller natürlichen Zahlen $\geqq i$. Dann ist das System aller Mengen I_i ein Raster im Mengenverband von I; wir nennen ihn den Fréchet-Raster. Der von ihm erzeugte Filter, er heißt der Fréchet-Filter, ist das System aller Teilmengen von I, deren jede schließlich alle natürlichen Zahlen enthält. Das System aller Teilmengen von I, welche eine feste Zahl als Element enthalten, ist ein Ultraraster (-filter).

Ist jedem Soma A eines Vereins $\mathfrak{V}$ ein Soma $\bar{A}$ aus $\mathfrak{V}$ derart zugeordnet, daß die beiden Bedingungen

7. $A \leqq \bar{A}$ für jedes $A \in \mathfrak{V}$.

8. Aus $A \leqq B$ folgt $\bar{A} \leqq \bar{B}$

erfüllt sind, so heiße der Verein $\mathfrak{V}$ *topologisch* und das Soma $\bar{A}$ die *Hülle* von A. Ist außerdem

9. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ für jedes $A \in \mathfrak{V}$,

---

[5]) Die runden Zeichen haben also die übliche *mengentheoretische* Bedeutung der Inklusion, der Vereinigung und des Durchschnittes.

[6]) *H. Cartan* (C. R. 205 (1937), S. 595 u. 777) hat die Wichtigkeit dieses Begriffes aufgedeckt „qui élimine définitivement le denombrable de la topologie générale" (A. Weil). Eine Filterbasis nennen wir Raster, da dieser Begriff seiner selbständigen Bedeutung wegen einen eigenen Namen verdient. Manche Autoren nennen die Filterbasis (= Raster) einen Filter, da sie die Filterbasis für den wichtigeren Begriff ansehen. Ich halte die Bezeichnung „Filter" für die Filterbasis für bedauerlich, da sich der Filterbegriff im ursprünglichen Sinne doch nicht vermeiden läßt.

so heiße $\mathfrak{V}$ *einstufig* topologisch. Ist $\mathfrak{V}$ speziell ein Verband und ist

10. $\overline{A_1 \vee A_2} = \bar{A}_1 \vee \bar{A}_2$,

so heiße $\mathfrak{V}$ v-topologisch (dieses Axiom 10 ist eine Verschärfung des Axioms 7). Gelten im Verband $\mathfrak{V}$ die Axiome 8 bis 10 und ist außerdem

11. $\bar{0} = 0$,

falls das Nullsoma 0 überhaupt in $\mathfrak{V}$ existiert, so nennen wir $\mathfrak{V}$ *orthodox*-topologisch[7]) (die Axiome 8 bis 11 sind die bekannten Hüllenaxiome von C. Kuratowski).

Ein Soma A heiße *abgeschlossen*, wenn $\bar{A} = A$ ist.

Ein System $\mathfrak{B}$ von Somen B aus $\mathfrak{V}$ heiße eine (Hüllen-)*Basis*, wenn für jedes Soma A aus $\mathfrak{V}$ die Hülle $\bar{A}$ der Durchschnitt der Hüllen $\bar{B}$ aller Somen B aus $\mathfrak{B}$ mit $A \leqq B$ ist:

$$\bar{A} = \bigwedge_{A \leqq B} \bar{B}.$$

Ist $\mathfrak{V}$ speziell einstufig topologisch, so ist ein System abgeschlossener Somen B derart, daß jedes abgeschlossene Soma der Durchschnitt von Somen aus $\mathfrak{B}$ ist, eine Basis. Eine solche Basis heißt *abgeschlossen*.

In einem orthodox-topologischen Boole-Verband $\mathfrak{V}$ heißen die Komplemente A' der abgeschlossenen Somen A *offen*. Ein System $\mathfrak{B}^*$ offener Somen von $\mathfrak{V}$ heißt eine *offene Basis*, wenn jedes offene Soma aus $\mathfrak{V}$ eine Vereinigung von Somen aus $\mathfrak{B}^*$ ist. Ein System $\mathfrak{B}^*$ offener Somen ist dann und nur dann eine offene Basis, wenn das System $\mathfrak{B}$ der Komplemente der Somen aus $\mathfrak{B}^*$ eine abgeschlossene Basis ist.

Beispiel 3. Ist der orthodox-topologische Verband $\mathfrak{V}$ speziell der Mengenverband einer Menge M, so ist M ein topologischer Raum im üblichen Sinne und ebenso umgekehrt. (Von unserem Standpunkt aus empfiehlt es sich, nicht M, sondern den Mengenverband als (orthodox-)topologischen Raum zu bezeichnen.)

Nun kommen wir zum eigentlichen Thema dieser Arbeit. Dabei soll *für alles Folgende ein fester topologischer Verein* $\mathfrak{V}$ *vorliegen.*

Unter einer *Somenfamilie* $\{A_i\}_{i \in I}$ in $\mathfrak{V}$ verstehen wir eine Funktion, deren Definitionsbereich I eine beliebige Menge irgendwelcher, Indizes genannter, Dinge ist und deren Werte A_i Somen aus $\mathfrak{V}$ sind. Eine solche Somenfamilie sei gegeben. In I (genauer im Mengenverband von I; vgl. das Beispiel 1) sei ein Raster $\mathfrak{R}$ gegeben, also ein nicht leeres Mengensystem, welches den Bedingungen 4 und 5 mit $\leqq$ statt $\leqq$ genügt.

Beispiel 4. Eine Somenfolge $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots}$ ist eine Somenfamilie. Dabei denken wir uns in der Menge I der natürlichen Zahlen stets den Fréchet-Raster gegeben.

Ein Soma A aus $\mathfrak{V}$ heiße nun der Somenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch den Raster $\mathfrak{R}$ *adjungiert* bzw. *stark adjungiert*[8]), wenn folgendes gilt: Ist S ein Soma aus $\mathfrak{V}$ derart, daß $A_i \leqq S$ gilt für alle Elemente i mindestens einer Menge $R \in \mathfrak{R}$ bzw. für mindestens ein Element i jeder Menge $R \in \mathfrak{R}$, so gilt $A \leqq \bar{S}$. (Existiert in $\mathfrak{V}$ kein Soma S mit $A_i \leqq S$ für alle i mindestens eines $R \in \mathfrak{R}$ bzw. für mindestens ein i jedes $R \in \mathfrak{R}$, so betrachten wir jedes Soma A aus $\mathfrak{V}$ der Familie als adjungiert bzw. stark adjungiert.) Existiert in $\mathfrak{V}$ die Vereinigung aller der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungierten bzw. stark adjungierten Somen (was z. B. der Fall ist, wenn $\mathfrak{V}$ ein Vollverband ist), so bezeichnen wir diese Vereinigung

---

[7]) Nach *Chr. Pauc.*

[8]) (Zusatz bei der Korrektur.) Es wäre vielleicht besser, im Anschluß an N. Bourbaki „adhärent" und „stark adhärent" statt „adjungiert" und „stark adjungiert" zu sagen.

mit $\lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i$ bzw. $\lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i$. Ist $\lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i = \lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i = L$, so schreiben wir $L = \lim_{\mathfrak{R}} A_i$ und nennen die Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ gegen L *konvergent* bezüglich $\mathfrak{R}$. (Es kann L auch das Nullsoma sein!) — Ist klar, welcher Raster $\mathfrak{R}$ in I vorliegt (ist z. B. die Familie eine Folge und daher der Raster $\mathfrak{R}$ in I verabredungsgemäß (vgl. das Beispiel 3 der Fréchet-Raster), so lassen wir den Hinweis auf $\mathfrak{R}$ weg, schreiben also z. B. $\lim\sup A_i$, $\lim A_i$, usw.

Beispiel 5. In einem (orthodox-) topologischen Raum sei eine Folge $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots}$ von Punktmengen bzw. von Punkten gegeben. Ein Punkt p (genauer die Punktmenge $P = (p)$) ist der Folge adjungiert bzw. stark adjungiert dann und nur dann, wenn jede Umgebung von p mit unendlich vielen bzw. schließlich allen A_i einen nicht leeren Durchschnitt hat. Der $\lim\sup A_i$ bzw. der $\lim\inf A_i$ ist die Menge aller der Folge adjungierten bzw. stark adjungierten Punkte (der $\lim\sup A_i$ und der $\lim\inf A_i$ hat also im vorliegenden Fall die übliche Bedeutung). Eine Punktfolge $\{p_i\}_{i=1,2,\ldots}$ konvergiert gegen einen Punkt p (genauer die Mengenfolge $\{(p_i)\}_{i=1,2,\ldots}$ konvergiert gegen (p)) dann und nur dann, wenn jede Umgebung von p schließlich alle p_i enthält (also ebenfalls wie üblich).

Beispiel 6. Es sei $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots}$ eine Folge von Teilmengen einer Menge E. Wir topologisieren den Mengenverband von E durch die triviale Festsetzung $\bar{A} = A$ für jedes $A \leqq E$. Dann ist

$$\lim\sup A_i = \bigcap_j \bigcup_{j \leq i} A_i, \quad \lim\inf A_i = \bigcup_j \bigcap_{j \leq i} A_i,$$

also $\lim\sup A_i$ die Menge der in unendlich vielen A_i enthaltenen Elemente und $\lim\inf A_i$ der in schließlich allen A_i enthaltenen Elemente von E.

Nun liege im topologischen Verein $\mathfrak{V}$ eine Somenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$ und in der Indexmenge I ein Raster $\mathfrak{R}$ vor; für den Satz 2 liege in $\mathfrak{V}$ noch eine zweite Familie $\{A_i^*\}_{i \in I}$, jedoch mit derselben Indexmenge I, vor. Aus den obigen Definitionen ergeben sich unmittelbar zunächst die folgenden fünf Sätze.

Satz 1. *Jedes Soma A, das der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ stark adjungiert ist, ist ihr durch $\mathfrak{R}$ adjungiert.*

Satz 2. *Ist das Soma A der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert (stark adjungiert) und ist A^* ein Soma mit $A^* \leqq A$, so ist auch A^* der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert (stark adjungiert). Die Vereinigung beliebig vieler der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungierter (stark adjungierter) Somen ist, falls vorhanden, der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ ebenfalls adjungiert (stark adjungiert).*

Satz 3. *Ist das Soma A der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert (stark adjungiert), so ist A auch der Familie $\{\bar{A}_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert (stark adjungiert). Ist die Topologie einstufig, so gilt auch das Umgekehrte.*

Satz 4. *Es sei A bzw. A^* ein der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ bzw. $\{A_i^*\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiertes (stark adjungiertes) Soma. Es existiere in $\mathfrak{V}$ die Vereinigung $A \vee A^*$ und für jedes $i \in I$ die Vereinigung $A_i \vee A_i^*$. Dann ist das Soma $A \vee A^*$ der Familie $\{A_i \vee A_i^*\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert (stark adjungiert).*

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{R}^*$ ein Raster in I, der mindestens so fein ist wie $\mathfrak{R}$*[9]*. Dann ist jedes der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}^*$ adjungierte Soma der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ auch durch $\mathfrak{R}$ adjungiert und umgekehrt jedes der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}^*$ stark adjungierte Soma der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ auch durch $\mathfrak{R}$ stark adjungiert. Ist $\mathfrak{R}^*$ speziell der durch $\mathfrak{R}$ in I erzeugte Filter, so sind der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^*$ dieselben Somen adjungiert bzw. stark adjungiert.*

---

[9]) Der Übergang von $\mathfrak{R}$ zu einem mindestens so feinen Raster $\mathfrak{R}^*$ entspricht bei einer Folge der Übergang zu einer Teilfolge. Vgl. *G. Nöbeling*, Über eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffes, Sitzber. Bayr. Akad. Wiss. 1950.

Ein gewisses Gegenstück zum Satz 1 ist der folgende Satz, in welchem man im allgemeinen die Voraussetzung, daß P ein Atom ist, nicht fallen lassen kann.

Satz 6. *$\mathfrak{V}$ sei ein distributiver, v-topologischer Verband. Es sei P ein Atom in $\mathfrak{V}$, welches der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert ist. Dann existiert in I ein Raster $\mathfrak{R}^*$, der mindestens so fein ist wie $\mathfrak{R}$ und durch welchen P der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ sogar stark adjungiert ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Somen aus $\mathfrak{V}$ mit der Eigenschaft, daß zwar in jeder Menge R des Rasters $\mathfrak{R}$ ein Element i mit $A_i \leqq S$ existiert, daß aber trotzdem nicht $P \leqq \bar{S}$ ist. Ist nun $\mathfrak{S}$ leer, so leistet der Raster $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$ das Verlangte. Es sei also $\mathfrak{S}$ nicht leer. Für jedes Soma $S \in \mathfrak{S}$ und jede Menge $R \in \mathfrak{R}$ bezeichnen wir mit $L = L(S, R)$ die Menge aller $i \in R$, für welche nicht $A_i \leqq S$ ist. Erstens ist dann keine Menge $L(S, R)$ leer; denn wäre $L(S, R)$ leer, so wäre $A_i \leqq S$ für jedes $i \in R$, also $P \leqq \bar{S}$, da P der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert ist, im Widerspruch zu $S \in \mathfrak{S}$. Zweitens enthält der mengentheoretische Durchschnitt $L_1 \frown L_2$ zweier Mengen $L_1 = L(S_1, R_1)$ und $L_2 = L(S_2, R_2)$ eine Menge $L = L(S, R)$; denn setzen wir $S_1 \vee S_2 = S$, so gilt zunächst $S \in \mathfrak{S}$, da einerseits wegen $S_1 \leqq S$ und $S_1 \in \mathfrak{S}$ in jeder Menge $R \in \mathfrak{R}$ ein Index i mit $A_i \leqq S$ existiert und anderseits nicht $P \leqq \bar{S}$ gilt, weil $\bar{S} = \overline{S_1} \vee \overline{S_2}$ ist, nicht $P \leqq \overline{S_1}$ und nicht $P \leqq \overline{S_2}$ gilt und P ein Atom ist (man beachte, daß $\mathfrak{V}$ als distributiver, v-topologischer Verband vorausgesetzt ist); für dieses $S \in \mathfrak{S}$ und eine beliebige Menge R aus $\mathfrak{R}$ mit $R \leqq R_1 \frown R_2$ hat nun die Menge $L = L(S, R)$ die Eigenschaft $L \leqq L_1 \frown L_2$. Damit ist gezeigt, daß das System aller Mengen $L = L(S, R)$, wobei S die Menge $\mathfrak{S}$ und R den Raster $\mathfrak{R}$ durchläuft, ein Raster in I ist. Es sei $\mathfrak{R}^*$ der in I durch diesen Raster erzeugte Filter. Dieser Filter $\mathfrak{R}^*$ ist mindestens so fein wie der Raster $\mathfrak{R}$; er enthält $\mathfrak{R}$ sogar als Teilsystem; denn für jede Menge $R \in \mathfrak{R}$ ist die Menge $L(S, R)$ bei beliebigem $S \in \mathfrak{S}$ eine Teilmenge von R, so daß also R in $\mathfrak{R}^*$ auftritt. Schließlich sei S ein Soma aus $\mathfrak{S}$ derart, daß in jedem $R^* \in \mathfrak{R}^*$ ein Element i existiert mit $A_i \leqq S$. Angenommen, es wäre nicht $P \leqq \bar{S}$. Dann ist $S \in \mathfrak{S}$, weil jede Menge R aus $\mathfrak{R}$ eine Menge aus $\mathfrak{R}^*$ ist. Also ist $L(S, R)$ definiert für jedes $R \in \mathfrak{R}$. Nach der Definition von $L(S, R)$ existiert kein $i \in L(S, R)$ mit $A_i \leqq S$. Anderseits folgt aber aus $L(S, R) \in \mathfrak{R}^*$ nach der Definition von S, daß in $L(S, R)$ mindestens ein i existiert mit $A_i \leqq S$. Dies ist ein Widerspruch. Also ist doch $P \leqq \bar{S}$. Folglich ist das Atom P der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}^*$ stark adjungiert.

Bemerkung. Der Satz 6 ist ein Analogon zu dem bekannten Satz, daß in einem dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügenden (orthodox-)topologischen Raum jede Punktfolge mit einem Häufungspunkt p eine gegen p konvergierende Teilfolge enthält; der Satz 6 umfaßt diesen Satz jedoch nicht als Spezialfall.

In den folgenden sechs Sätzen beschäftigen wir uns mit dem $\lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i$ und dem $\lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i$. Es sei wieder im topologischen Verein $\mathfrak{V}$ eine Somenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$ und in der Indexmenge I ein Raster $\mathfrak{R}$ gegeben.

Zunächst ergeben sich aus den Definitionen unmittelbar die folgenden zwei Sätze.

Satz 7. *Existiert der $\lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i$, so ist er der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert; existiert der $\lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i$, so ist er der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ stark adjungiert. Existieren beide, so ist $\lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i \leqq \lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i$. Ist $\mathfrak{V}$ einstufig topologisch, so sind $\lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i$ und $\lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i$, falls vorhanden, abgeschlossen.*

Satz 8. *$\mathfrak{V}$ sei einstufig topologisch. Existiert der $\lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i$, so ist er der $\lim\sup_{\mathfrak{R}} \overline{A_i}$ und umgekehrt. Existiert der $\lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i$, so ist er der $\lim\inf_{\mathfrak{R}} \overline{A_i}$ und umgekehrt.*

Die nächsten zwei Sätze zeigen, wie man, wenn $\mathfrak{B}$ ein Vollverband ist, den $\lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i$ und den $\lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i$ (die dann beide existieren) durch die Somen A_i darstellen kann.

Ist M eine beliebige Teilmenge der Indexmenge I, so setzen wir

$$\bigvee_{i \in M} A_i = V_M.$$

Satz 9. *$\mathfrak{B}$ sei ein Vollverband*[10]*. Dann ist das Soma $D = \bigwedge_{R \in \mathfrak{R}} \overline{V_R}$ der $\lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i$.*

Beweis. Einerseits sei S ein Soma aus $\mathfrak{B}$, für welches eine Menge R des Rasters $\mathfrak{R}$ existiert mit $A_i \leqq S$ für alle $i \in R$. Dann ist auch $V_R \leqq S$, also $\overline{V_R} \leqq \bar{S}$, wegen $D \leqq \overline{V_R}$ folglich auch $D \leqq \bar{S}$; mithin ist D der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert. Anderseits sei A ein Soma aus $\mathfrak{B}$, für welches nicht $A \leqq D$ ist; dann existiert im Raster $\mathfrak{R}$ eine Menge R_0 derart, daß nicht $A \leqq \overline{V_{R_0}}$ ist; da für das Soma $S_0 = V_{R_0}$ die Relation $A_i \leqq S_0$ für alle $i \in R_0$ besteht, so ist also A der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ nicht adjungiert (da andernfalls $A \leqq \overline{S_0}$ sein müßte, was nicht der Fall ist). Das Soma D ist also die Vereinigung aller Somen, die der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert sind.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathfrak{R})$ das System aller Teilmengen G von I mit der Eigenschaft, daß für keine Menge R des Rasters $\mathfrak{R}$ der Durchschnitt $G \frown R$ leer ist. Der Raster $\mathfrak{R}$ ist ein Teilsystem von $\mathfrak{G}$. (Ist $\mathfrak{R}$ speziell ein Filter, so nennt man $\mathfrak{G}$ das zugehörige *Gitter*.)

Satz 10. *$\mathfrak{B}$ sei ein Vollverband*[10]*. Dann ist das Soma $D = \bigwedge_{G \in \mathfrak{G}} \overline{V_G}$ der $\lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i$.*

Beweis. Einerseits sei S ein Soma aus $\mathfrak{B}$, für welches in jeder Menge R des Rasters $\mathfrak{R}$ ein Element i mit $A_i \leqq S$ existiert; ist G die Menge aller $i \in I$ mit $A_i \leqq S$, so ist also G eine Menge aus $\mathfrak{G}$ und es ist $V_G \leqq S$, also $\overline{V_G} \leqq \bar{S}$; wegen $D \leqq \overline{V_G}$ ist also auch $D \leqq \bar{S}$; mithin ist D der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ stark adjungiert. Anderseits sei A ein Soma aus $\mathfrak{B}$, für welches nicht $A \leqq D$ ist; dann existiert in $\mathfrak{G}$ eine Menge G_0 derart, daß nicht $A \leqq \overline{G_0}$ ist; für das Soma $S_0 = V_{G_0}$ ist $A_i \leqq S_0$ für alle $i \in G_0$; nun ist der Durchschnitt $G_0 \frown R$ für kein $R \in \mathfrak{R}$ leer; folglich existiert in jeder Menge R des Rasters $\mathfrak{R}$ ein Element i, welches auch ein Element von G_0 ist, für welches also $A_i \leqq S_0$ ist; daher ist das Soma A der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ nicht stark adjungiert. Das Soma D ist mithin die Vereinigung aller Somen aus $\mathfrak{B}$, die der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ stark adjungiert sind.

Beispiel 7. $\mathfrak{B}$ sei ein Vollverband und $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots}$ eine Folge von Somen aus $\mathfrak{B}$. Dann ist

$$\lim\sup A_i = \bigcap_{j} \overline{\bigcup_{j \leq i} A_i}, \quad \lim\inf A_i = \bigcap_{n} \overline{\bigcup_{n} A_{i_n}},$$

wobei der letztere Durchschnitt über das System aller Teilfolgen $(i_1, i_2, \ldots)$ von $(1, 2, \ldots)$ zu nehmen ist.

Über das Verhalten des $\lim\sup A_i$ und des $\lim\inf A_i$ bei Verfeinerung des Rasters gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 11. *Es sei $\mathfrak{R}^*$ ein Raster in I, der mindestens so fein ist wie der Raster $\mathfrak{R}$. Dann ist $\lim\inf_{\mathfrak{R}} A_i \leqq \lim\inf_{\mathfrak{R}^*} A_i \leqq \lim\sup_{\mathfrak{R}^*} A_i \leqq \lim\sup_{\mathfrak{R}} A_i$, soweit diese Limiten existieren.*

Beweis. Satz 5 und Satz 7.

Die Somen lim inf und lim sup rücken also bei Verfeinerung des Rasters näher zusammen.

Für den folgenden Satz bemerken wir, daß, wenn $\{\mathfrak{F}\}$ ein nicht leeres (endliches oder unendliches) System von Filtern in I ist, der mengentheoretische Durchschnitt

[10]) Betrachtet man nur Folgen $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots}$, so genügt es vorauszusetzen, daß für je abzählbar viele Somen aus $\mathfrak{B}$ die Vereinigung und der Durchschnitt existiert.

$\mathfrak{F}_0 = \bigcap \mathfrak{F}$ dieser Filter, also das System aller Mengen, die in jedem Filter $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}$ auftreten, wieder ein Filter ist (für Raster ist dies i. a. nicht der Fall); dieser Filter $\mathfrak{F}_0$ heißt der *Durchschnittsfilter* der Filter $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}$.

Satz 12. *Es sei $\{\mathfrak{F}\}$ ein (nicht leeres) System von Filtern $\mathfrak{F}$ in I und $\mathfrak{F}_0 = \bigcap \mathfrak{F}$ ihr Durchschnittsfilter. Es seien $\lim\inf_{\mathfrak{F}_0} A_i$ und $\lim\inf_{\mathfrak{F}} A_i$ für jeden Filter $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}$ in $\mathfrak{B}$ vorhanden. Dann ist*

$$\lim\inf_{\mathfrak{F}_0} A_i = \bigcap_{\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}} \lim\inf_{\mathfrak{F}} A_i.$$

Beweis. Wir setzen $\lim\inf_{\mathfrak{F}_0} A_i = L_0$ und $\lim\inf_{\mathfrak{F}} A_i = L_{\mathfrak{F}}$. Da jeder Filter $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}$ mindestens so fein ist wie der Filter $\mathfrak{F}_0$, so ist $L_0 \leqq L_{\mathfrak{F}}$ für jedes $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}$ nach dem Satz 11. Können wir nun zeigen, daß, wenn L ein beliebiges Soma aus $\mathfrak{B}$ mit $L \leqq F_{\mathfrak{F}}$ für jedes $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}$ ist, stets auch $L \leqq L_0$ ist, so sind wir fertig. Nach den Sätzen 7 und 2 folgt aus $L \leqq L_{\mathfrak{F}}$, daß L der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch jedes $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}$ stark adjungiert ist. Nun sei S ein Soma aus $\mathfrak{B}$, für welches in jeder Menge $F_0 \in \mathfrak{F}_0$ ein Element i mit $A_i \leqq S$ existiert. Bezeichnen wir mit K die Menge aller $i \in I$ mit $A_i \leqq S$, so ist also K zu keiner Menge $F_0 \in \mathfrak{F}_0$ fremd. Dann existiert ein Filter $\mathfrak{F}^0 \in \{\mathfrak{F}\}$ derart, daß K auch zu keiner Menge $F^0 \in \mathfrak{F}^0$ fremd ist; denn gäbe es in jedem Filter $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}$ eine Menge $F_{\mathfrak{F}}$, die zu K fremd ist, so wäre auch die Vereinigungsmenge $F_0 = \bigcup_{\mathfrak{F}} F_{\mathfrak{F}}$ zu K fremd, was falsch ist, da aus $F_{\mathfrak{F}} \leqq F_0$ für jedes $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{F}\}$ folgt, daß F_0 eine Menge jedes Filters $\mathfrak{F}$ und daher auch des Filters $\mathfrak{F}_0$ ist. In jeder Menge $F^0 \in \mathfrak{F}^0$ existiert also ein Element i mit $A_i \leqq S$. Hieraus folgt, da L der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{F}^0$ stark adjungiert ist, die Beziehung $L \leqq \bar{S}$. Nach der Definition von S ist daher L der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{F}_0$ stark adjungiert. Folglich ist $L \leqq L_0$.

Nun folgen einige Sätze über die $\mathfrak{R}$-Konvergenz. Wieder sei in einem topologischen Verein $\mathfrak{B}$ eine Somenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$ gegeben, für den Satz 16 noch eine zweite Familie $\{A_i^*\}_{i \in I}$ (mit derselben Indexmenge I). In I sei ein Raster $\mathfrak{R}$ gegeben.

Aus den Sätzen 1, 7 und 8 ergeben sich sofort die folgenden drei Sätze.

Satz 13. *Die Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ ist $\mathfrak{R}$-konvergent gegen das Soma L dann und nur dann, wenn L der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ stark adjungiert ist und für jedes der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungierte Soma A gilt $A \leqq L$.*

Satz 14. *Ist $\mathfrak{B}$ einstufig topologisch und die Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ $\mathfrak{R}$-konvergent gegen das Soma L, so ist L abgeschlossen.*

Satz 15. *Ist $\mathfrak{B}$ einstufig topologisch, so ist die Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ dann und nur dann $\mathfrak{R}$-konvergent gegen das Soma L, wenn die Familie $\{\bar{A}_i\}_{i \in I}$ $\mathfrak{R}$-konvergent ist gegen L.*

Nun folgt ein Satz, welcher besagt, daß die $\mathfrak{R}$-Konvergenz unter gewissen Voraussetzungen invariant ist gegenüber der $\vee$-Operation.

Satz 16. *$\mathfrak{B}$ sei ein $\vee$-topologischer Boole-Verband. Die beiden Familien $\{A_i\}_{i \in I}$ und $\{A_i^*\}_{i \in I}$ seien $\mathfrak{R}$-konvergent. Dann ist auch die Familie $\{A_i \vee A_i^*\}_{i \in I}$ $\mathfrak{R}$-konvergent und es ist*

$$\lim_{\mathfrak{R}} (A_i \vee A_i^*) = \lim_{\mathfrak{R}} A_i \vee \lim_{\mathfrak{R}} A_i^*.$$

Beweis. Wir setzen $\lim_{\mathfrak{R}} A_i = L$ und $\lim_{\mathfrak{R}} A_i^* = L^*$. Nach den Sätzen 7 und 4 ist $L \vee L^*$ der Familie $(A_i \vee A_i^*)_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ stark adjungiert. Nach Satz 13 genügt es also zu zeigen, daß $A \leqq L \vee L^*$ ist für jedes der Familie $(A_i \vee A_i^*)_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungierte Soma A aus $\mathfrak{B}$. Es sei A ein Soma aus $\mathfrak{B}$, für welches nicht $A \leqq L \vee L^*$ gilt. Wir zeigen, daß dann A der Familie $(A_i \vee A_i^*)_{i \in I}$ nicht adjungiert ist. Es sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Somen S aus $\mathfrak{B}$ derart, daß es im Raster eine Menge R gibt mit $A_i \leqq S$ für alle $i \in R$. Dann ist einerseits $L \leqq \bar{S}$ für alle $S \in \mathfrak{S}$, da L nach Satz 7 der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ adjungiert ist;

anderseits ist jedes Soma B mit $B \leqq \bar{S}$ für alle $S \in \mathfrak{S}$ der Familie $\{A_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}$ adjungiert und daher $B \leqq L$; folglich ist $L = \bigwedge_{S \in \mathfrak{S}} \bar{S}$. Angenommen nun, es wäre $A \leqq \bar{S} \vee L^*$ für alle $S \in \mathfrak{S}$. Dann wäre

$$A \wedge (L^*)' \leqq (\bar{S} \vee L^*) \wedge (L^*)' = (\bar{S} \wedge (L^*)') \vee (L^* \wedge (L^*)') = (\bar{S} \wedge (L^*)') \vee 0 = \bar{S} \wedge (L^*)' \leqq \bar{S}$$

für jedes $S \in \mathfrak{S}$, also $A \wedge (L^*)' \leqq \bigwedge \bar{S} = L$ und folglich $A \leqq L \vee L^*$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also existiert ein Soma $S_0 \in \mathfrak{S}$ (d. h. ein Soma S_0 aus $\mathfrak{S}$, zu welchem es im Raster $\mathfrak{R}$ eine Menge R_0 gibt mit $A_i \leqq S_0$ für alle $i \in R_0$) derart, daß nicht $A \leqq \bar{S}_0 \vee L^*$ ist. Analog ergibt sich hieraus weiter die Existenz eines Somas S_0^* in $\mathfrak{B}$ und einer Menge R_0^* des Rasters $\mathfrak{R}$ mit $A_i^* \leqq S_0^*$ für alle $i \in R_0^*$ derart, daß nicht $A \leqq \bar{S}_0 \vee \overline{S_0^*}$ ist. Wegen $\overline{S_0 \vee S_0^*} = \bar{S}_0 \vee \overline{S_0^*}$ ist also nicht $A \leqq \overline{S_0 \vee S_0^*}$. Da $\mathfrak{R}$ ein Raster ist, existiert in $\mathfrak{R}$ eine Menge R mit $R \leqq R_0 \frown R_0^*$. Für jedes $i \in R$ ist dann $A_i \leqq S_0$ und $A_i^* \leqq S_0^*$ und folglich $A_i \vee A_i^* \leqq S_0 \vee S_0^*$. Weil aber nicht $A \leqq \overline{S_0 \vee S_0^*}$ ist, so ist also A der Familie $(A_i \vee A_i^*)_{i \in I}$ nicht adjungiert.

Daß die Rasterverfeinerung die Konvergenz nicht stört, besagt der folgende Satz, der sich unmittelbar aus Satz 11 ergibt:

Satz 17. *Ist die Familie $(A_i)_{i \in I}$ $\mathfrak{R}$-konvergent gegen das Soma L und $\mathfrak{R}^*$ ein Raster in I, der mindestens so fein ist wie der Raster $\mathfrak{R}$, so ist $(A_i)_{i \in I}$ auch $\mathfrak{R}^*$-konvergent gegen L.*

Nun folgt ein merkwürdiger Satz. Er besagt nämlich, daß, wenn $\mathfrak{U}$ ein *Ultra*raster in I ist, *jede* Somenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$ $\mathfrak{U}$-konvergent ist.

Satz 18. *$\mathfrak{B}$ sei ein Vollverband, $\{A_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Somenfamilie in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{U}$ ein Ultraraster in I. Dann ist $\{A_i\}_{i \in I}$ $\mathfrak{U}$-konvergent.*

Beweis. Für jeden Raster $\mathfrak{R}$ gilt $\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{G}(\mathfrak{R})$. Ist nun $\mathfrak{R}$ speziell ein Ultraraster $\mathfrak{U}$, so ist sogar $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$; denn angenommen, es gäbe eine Teilmenge G von I, welche mit jeder Menge aus $\mathfrak{U}$ einen nicht leeren Durchschnitt hat, ohne $\mathfrak{U}$ anzugehören; dann ist das Mengensystem $\mathfrak{U}^*$, das aus allen Mengen R von $\mathfrak{U}$, der Menge G und den Durchschnitten $G \frown R$ besteht, ein Raster, welcher $\mathfrak{U}$ als echtes Teilsystem enthält, im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{U}$ ein Ultraraster ist. Aus $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}$ folgt aber $\limsup_{\mathfrak{U}} A_i = \liminf_{\mathfrak{U}} A_i$ nach den Sätzen 9 und 10.

Beispiel 8. Besteht der Ultraraster $\mathfrak{U}$ aus allen Teilmengen von I, die ein festes Element i_0 enthalten, so ist jede Somenfamilie $\{A_i\}_{i \in I}$ $\mathfrak{U}$-konvergent gegen das Soma $\overline{A_{i_0}}$.

Satz 19. *$\mathfrak{B}$ sei ein Vollverband und besitze eine abzählbare (Hüllen-)Basis. Dann enthält jede Folge von Somen aus $\mathfrak{B}$ eine konvergente Teilfolge* (der Limes kann aber das leere Soma sein!).

Wir beweisen zunächst folgenden

Hilfssatz. *Der topologische Verein $\mathfrak{B}$ besitze eine abzählbare (Hüllen-)Basis. Dann enthält jede Folge $S_1, S_2, \ldots$ von Somen aus $\mathfrak{B}$ eine Teilfolge mit der Eigenschaft, daß jedes ihr adjungierte Soma ihr auch stark adjungiert ist.*

Es sei $B_1, B_2, \ldots$ eine abzählbare (Hüllen-)Basis von $\mathfrak{B}$. Für jedes $i = 1, 2, \ldots$ setzen wir $S_i = S_i^0$. Wir machen die Induktionsvoraussetzung, daß für irgendein ganzes $j \geqq 0$ bereits eine Teilfolge $S_j^j, S_{j+1}^j, \ldots$ von $S_1, S_2, \ldots$ definiert ist. Nun sind zwei Fälle möglich: Entweder ist $S_i^j \leqq B_j$ für schließlich alle $i = j, j+1, \ldots$ oder nicht. Im ersten Fall setzen wir $S_i^j = S_i^{j+1}$ für jedes $i = j+1, j+2, \ldots$. Im zweiten Fall sei $S_{j+1}^{j+1}, S_{j+2}^{j+1}, \ldots$ die Folge aller derjenigen Somen $S_{j+1}^j, S_{j+2}^j, \ldots$, die nicht $\leqq B_j$ sind. Damit ist eine Folge von Folgen definiert, deren erste die Folge $S_1, S_2, \ldots$ ist und von

denen jede die nächste als Teilfolge enthält. Es sei $T_1, T_2, \ldots$ die Diagonalfolge dieser Folgen, also $T_k = S_k^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Wir behaupten, daß diese Teilfolge von $S_1, S_2, \ldots$ das im Hilfssatz Behauptete leistet. Es sei nämlich A ein Soma, das der Folge $T_1, T_2, \ldots$ adjungiert ist. Wir haben zu zeigen, daß es ihr stark adjungiert ist. Es genügt folgendes zu zeigen: Ist S ein Soma derart, daß nicht $A \leqq \bar{S}$ ist, so ist $T_k \leqq S$ nur für endlich viele k. Da $\bar{S}$ der Durchschnitt von Somen $\overline{B_j}$ mit $S \leqq B_j$ ist (Definition der Basis), so existiert ein Soma B_j mit $S \leqq B_j$, für welches nicht $A \leqq \overline{B_j}$ ist. Daher genügt es zu zeigen, daß $T_k \leqq B_j$ nur für endlich viele k ist. Da A nach Voraussetzung der Folge $T_1, T_2, \ldots$ adjungiert und nicht $A \leqq \overline{B_j}$ ist, so ist für unendlich viele k nicht $T_k \leqq B_j$. Nun ist $T_j, T_{j+1}, \ldots$ eine Teilfolge von $S_j^j, S_{j+1}^j, \ldots$. Also ist auch für unendlich viele S_i^j nicht $S_i^j \leqq B_j$. Es liegt also der zweite Fall der Definition der Folge $S_{j+1}^{j+1}, S_{j+2}^{j+1}, \ldots$ vor. Folglich ist für alle $i = j+1, j+2, \ldots$ nicht $S_i^{j+1} \leqq B_j$. Da $T_{j+1}, T_{j+2}, \ldots$ eine Teilfolge von $S_{j+1}^{j+1}, S_{j+2}^{j+1}, \ldots$ ist, so ist also $T_k \leqq B_j$ nur für endlich viele k. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Beweis von Satz 11. Es sei $\mathfrak{V}$ ein Vollverband und besitze eine abzählbare (Hüllen-) Basis. Es sei $S_1, S_2, \ldots$ eine Somenfolge in $\mathfrak{V}$. Es sei $T_1, T_2, \ldots$ eine Teilfolge von $S_1, S_2, \ldots$ im Sinne des Hilfssatzes. Nach Satz 9 existiert der $\limsup T_k = L$. Nach Satz 7 ist L der Folge $T_1, T_2, \ldots$ adjungiert und daher auch stark adjungiert nach Wahl der Folge $T_1, T_2, \ldots$. Wegen $L = \limsup T_k$ ist $A \leqq L$ für jedes Soma A, welches der Folge $T_1, T_2, \ldots$ adjungiert ist. Nach Satz 13 konvergiert also $T_1, T_2, \ldots$ gegen A.

Abschließend wenden wir die Definitionen eines adjungierten bzw. stark adjungierten Somas speziell auf einen Raster in einem topologischen Verein an. Es sei also in einem topologischen Verein $\mathfrak{V}$ ein Raster $\mathfrak{R}$ gegeben. Wir fassen $\mathfrak{R}$ als eine Somenfamilie in $\mathfrak{V}$ auf, indem wir eine Menge I gleicher Mächtigkeit wie $\mathfrak{R}$, bestehend aus irgendwelchen Elementen i, eineindeutig auf $\mathfrak{R}$ abbilden; das einem $i \in I$ zugeordnete Soma des Rasters heiße R_i. Wir definieren in I einen Raster $\mathfrak{R}^*$ folgendermaßen: Für jedes $i \in I$ sei $M(i)$ die Menge aller $j \in I$ mit $R_j \leqq R_i$; das System aller Mengen $M(i)$ ist dann ein Raster $\mathfrak{R}^*$. Jedes der Familie $\mathfrak{R} = \{R_i\}_{i \in I}$ durch $\mathfrak{R}^*$ stark adjungierte Soma A von $\mathfrak{V}$ ist ihr nach Satz 1 auch adjungiert. Das Umgekehrte gilt jetzt aber auch; denn bei beliebigem $i \in I$ ist $R_j \leqq R_i$ für alle $j \in M(i)$. Die Begriffe „adjungiert" und „stark adjungiert" (durch $\mathfrak{R}^*$) fallen hier also zusammen. Berücksichtigen wir nun noch, daß die Aussage „es ist $R_i \leqq S$ für alle i einer Menge des Rasters $\mathfrak{R}^*$" dasselbe bedeutet wie die Aussage „es ist $R \leqq S$ für mindestens ein Soma R des Rasters $\mathfrak{R}$", so ergibt sich, daß im vorliegenden Fall eines Rasters $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{V}$ die Definition eines dem Raster $\mathfrak{R}$ (durch $\mathfrak{R}^*$) adjungierten und stark adjungierten Somas mit der folgenden Definition äquivalent ist:

Ein Soma A aus $\mathfrak{V}$ heißt dem Raster $\mathfrak{R}$ *adjungiert*, wenn folgendes gilt: Ist S ein Soma aus $\mathfrak{V}$ mit $R \leqq S$ für mindestens ein Soma $R \in \mathfrak{R}$, so ist $A \leqq \bar{S}$.

Beispiel 9. In einem (orthodox-)topologischen Raum sei ein Raster $\mathfrak{R}$ und ein Punkt p gegeben. Damit p (genauer die Menge $P = (p)$) dem Raster $\mathfrak{R}$ adjungiert ist, ist notwendig und hinreichend, daß jede Umgebung von p mit jeder Menge des Rasters $\mathfrak{R}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Satz 20. *Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^*$ zwei Raster in $\mathfrak{V}$ und ist $\mathfrak{R}^*$ mindestens so fein wie $\mathfrak{R}$, so ist jedes dem Raster $\mathfrak{R}^*$ adjungierte Soma auch dem Raster $\mathfrak{R}$ adjungiert.*

Satz 21. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Raster in $\mathfrak{V}$. Ein Soma A aus $\mathfrak{V}$ ist dem Raster $\mathfrak{R}$ dann und nur dann adjungiert, wenn $A \leqq \bar{R}$ ist für jedes Soma $R \in \mathfrak{R}$.*

Beweis. Es sei A ein Soma aus $\mathfrak{B}$ mit $A \leqq \bar{R}$ für jedes $R \in \mathfrak{R}$. Ist nun S ein Soma, für welches ein Soma $R_0 \in \mathfrak{R}$ existiert mit $R_0 \leqq S$, so ist $\overline{R_0} \leqq \bar{S}$, wegen $A \leqq \overline{R_0}$ also $A \leqq \bar{S}$. Daher ist A dem Raster $\mathfrak{R}$ adjungiert. Umgekehrt sei A ein dem Raster $\mathfrak{R}$ adjungiertes Soma und R ein beliebiges Soma aus $\mathfrak{R}$. Wir setzen $R = S$. Dann ist $R \leqq S$, also $A \leqq \bar{S}$, d. h. $A \leqq \bar{R}$.

Beispiel 10. In einem (orthodox-) topologischen Raum sei ein Raster und ein Punkt p gegeben. Der Punkt p (genauer die Menge (p)) ist dem Raster $\mathfrak{R}$ dann und nur dann adjungiert, wenn $p \in \bar{R}$ ist für alle $R \in \mathfrak{R}$.

Ist wieder $\mathfrak{R}$ ein Raster eines topologischen Vereins $\mathfrak{B}$ und ist dieser Raster, aufgefaßt als Somenfamilie $\{R_i\}_{i \in I}$, $\mathfrak{R}^*$-konvergent gegen ein Soma L, so ist L die Vereinigung aller dem Raster $\mathfrak{R}$ adjungierten Somen; existiert umgekehrt die Vereinigung L aller dem Raster $\mathfrak{R}$ adjungierten Somen, so ist $\mathfrak{R}$, aufgefaßt als Somenfamilie, $\mathfrak{R}^*$-konvergent gegen L. Wir können also die Konvergenzdefinition für den Fall eines Rasters folgendermaßen formulieren:

Ein Raster $\mathfrak{R}$ eines topologischen Vereins $\mathfrak{B}$ heißt *konvergent* gegen eine Soma L aus $\mathfrak{B}$, wenn L die Vereinigung aller dem Raster $\mathfrak{R}$ adjungierten Somen ist.

L ist dann nach Satz 2 dem Raster $\mathfrak{R}$ ebenfalls adjungiert.

Satz 22. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Raster in $\mathfrak{B}$. Existiert der Durchschnitt $D = \wedge \bar{R}$ der Hüllen aller Somen R aus $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{R}$ konvergent gegen D. Konvergiert $\mathfrak{R}$ gegen das Soma D, so ist $D = \wedge \bar{R}$.*

Beweis. Satz 21 und die Tatsache, daß $\wedge \bar{R}$ die Vereinigung aller Somen A ist mit $A \leqq \bar{R}$ für alle $R \in \mathfrak{R}$.

Beispiel 11. In einem (orthodox-)topologischen Hausdorffschen Raum sei ein Raster und ein Punkt p gegeben. Jede Umgebung von p enthalte wenigstens eine Menge des Rasters als Teilmenge. Dann konvergiert der Raster gegen p (genauer gegen (p)).

Eingegangen 3. April 1952.

Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien.

Herrn Prof. Dr. Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *Hans-Joachim Kowalsky* in Erlangen und *Hansjürgen Dürbaum* in Münster.

Einleitung.

Das Ergebnis der vorliegenden Arbeit kann auf zweierlei Arten gedeutet werden. Vom Standpunkt der Bewertungstheorie aus kann man es als eine Charakterisierung der allgemeinen Bewertungen von Schiefkörpern mit topologischen Hilfsmitteln auffassen. In dieser Deutung bildet die Arbeit einen, wenn auch im einzelnen noch nicht ganz befriedigenden Abschluß der von Kaplansky [5], Šafarevič [11] und Zelinsky [13] begonnenen Untersuchung der topologischen Eigenschaften der Bewertungen. Vom Standpunkt der topologischen Algebra gesehen steht unsere Arbeit aber am Anfang einer Untersuchung der topologischen Körper mit dem Endziel einer Bestimmung aller Körpertopologien.

Durch eine solche Auffassung wird gerechtfertigt, daß wir nicht sogleich das Endresultat, eine topologische Charakterisierung der Bewertungen, ansteuern. Statt dessen beginnen wir nach Zusammenstellung einer Reihe mehr oder weniger bekannter Eigenschaften topologischer Körper mit der Untersuchung einer Klasse besonders einfach zu behandelnder Ringtopologien in Körpern, der sog. *beschränkten Topologien*, bei denen die Körperelemente beschränkte Umgebungen besitzen. Diese Topologien sind deshalb so einfach zu behandeln, weil bei ihnen das System der Vielfachen xU — wo U eine beschränkte Umgebung des Nullelementes ist; x durchläuft die Menge der von Null verschiedenen Körperelemente — ein vollständiges Umgebungssystem der Null bildet. Da eine Ringtopologie in einem Körper schon durch ein vollständiges Umgebungssystem der Null völlig bestimmt ist, so können wir auch sagen, die beschränkten Topologien werden durch eine Umgebung der Null erzeugt. Von hier bis zu einer arithmetischen Kennzeichnung der beschränkten Ringtopologien von Körpern ist es aber nicht weit. Man kann als eine die Topologie erzeugende Umgebung eine solche mit einer Reihe arithmetischer Eigenschaften, denen einer Fastordnung, auswählen. Der Begriff einer *Fastordnung* stellt eine Verallgemeinerung des Begriffes der Ordnung eines Körpers dar; die Verallgemeinerung liegt vor allem in einer Abschwächung der an eine Ordnung hinsichtlich der Addition gestellten Forderung: An Stelle der additiven Abgeschlossenheit wird nur verlangt, daß in der Fastordnung O Addiatoren $z\,(\neq 0)$ liegen, d. h. Elemente z, für die $z(O \pm O) \leqq O$ gilt. Die arithmetische Charakterisierung folgt nun sofort daraus, daß umgekehrt auch jede Fastordnung eines Körpers in diesem eine beschränkte Ringtopologie erzeugt, so daß *die beschränkten Ringtopologien eines Körpers genau die durch Fastordnungen des Körpers erzeugten Topologien sind.*

Diese arithmetische Kennzeichnung der beschränkten Topologien gibt uns nun aber auch sogleich ein Mittel an die Hand, um die Frage nach den charakteristischen topolo-

gischen Eigenschaften der Bewertungen zu beantworten. Man stellt nämlich ziemlich leicht fest, daß die *Bewertungstopologien* genau diejenigen Topologien eines Körpers sind, die durch *invariante Vollfastordnungen* erzeugt werden. (Allerdings ist, um dieses Ergebnis zu erzwingen, der übliche Bewertungsbegriff über Krull und Schilling hinaus noch einmal etwas verallgemeinert worden. Vom topologischen Standpunkt aus sind aber keine neuen Bewertungen hinzugekommen; vgl. die Schlußbemerkung der Einleitung.) Die gestellte Frage ist also gleichwertig mit derjenigen nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen, die zusätzlich an eine beschränkte Topologie zu stellen sind, damit sie von einer invarianten Vollfastordnung erzeugt wird. Die wesentliche von der Topologie neu zu fordernde Eigenschaft ist: Die Topologie muß vom *Bewertungstyp* sein; d. h. das reziproke Komplement einer jeden Umgebung der Null muß beschränkt sein. Die Bedingung ist bei kommutativen Körpern und bei Schiefkörpern mit beschränkter Kommutatorgruppe auch die einzige neue Forderung, die an die Topologie gestellt werden muß. Da der Bewertungstyp einer Ringtopologie eines Körpers u. a. auch deren Beschränktheit nach sich zieht, so läßt sich in diesem Falle das Ergebnis ganz kurz in folgenden Satz zusammenfassen:

Eine Topologie eines nicht notwendig kommutativen Körpers, dessen Kommutatorgruppe bei der Topologie beschränkt ist, ist genau dann zu einer Bewertung topologisch äquivalent, wenn sie vom Bewertungstyp ist.

Im allgemeinen nichtkommutativen Falle haben wir zwei weitere notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben. Um sie formulieren zu können, führen wir die beiden folgenden Begriffe ein [5]: Ein Element eines topologischen Körpers heiße *analytisch nilpotent*, wenn die Folge seiner Potenzen gegen Null konvergiert, *neutral*, wenn weder sein Inverses noch es selbst analytisch nilpotent ist. Die Bedingungen lauten:

Gibt es in dem Körper kein analytisch nilpotentes Element, so soll eine invariante beschränkte Umgebung existieren; gibt es aber mindestens ein analytisch nilpotentes Element, so soll das Produkt eines analytisch nilpotenten mit einem neutralen oder analytisch nilpotenten Element wieder analytisch nilpotent sein.

Daß dies wirklich zusätzliche Voraussetzungen sind, ist bisher nur im ersten Fall in bejahendem Sinne entschieden durch die Angabe einer Topologie vom Bewertungstyp ohne invariante beschränkte Umgebung.

Die Unterscheidung in Existenz und Nichtexistenz eines analytisch nilpotenten Elementes ist bei dem Beweis unserer topologischen Charakterisierung der allgemeinen Bewertungen von großer Wichtigkeit. Wir geben hier den Gedankengang des Beweises im kommutativen Falle in groben Zügen an, wollen also kurz sagen, wie man beweist, daß eine Topologie vom Bewertungstyp eines kommutativen Körpers K durch eine Vollfastordnung O (für alle $a \in K$ liegt a oder a^{-1} in O) erzeugt wird. Im allgemeinen Falle kommen natürlich noch eine Reihe weiterer Überlegungen hinzu.

Nach dem oben Gesagten weiß man zunächst, daß die gegebene Topologie als beschränkte Topologie durch eine Fastordnung O erzeugt wird. Es folgt ziemlich einfach aus der Definition des Bewertungstyps, daß diese erzeugende Fastordnung noch die folgende Eigenschaft besitzt: Es gibt in ihr ein Element $c \neq 0$ so, daß für alle Elemente a des Körpers stets mindestens a oder a^{-1} in $c^{-1}O$ liegt.

Besitzt nun K kein analytisch nilpotentes Element so, ist die Menge $\{c^{-n}\}_{n=0,1,\ldots}$ und folglich auch das Produkt $\{c^{-n}\}\,O$ bei der Topologie beschränkt. Algebraisch ist $\{c^{-n}\}\,O$ eine Vollfastordnung, insgesamt also eine die Topologie erzeugende Vollfastordnung. Mit denselben Schlüssen sieht man weiter, daß, falls kein analytisch nilpotentes Element existiert, es sogar eine die Topologie erzeugende Vollordnung gibt. Denn man

braucht nur mit einem Addiator z von $\tilde{O} = \{c^{-n}\} O$ die Menge $\{z^{-n}\} \tilde{O}$ zu bilden; diese ist auf Grund derselben Überlegungen eine erzeugende Vollfastordnung, und sie ist eine Ordnung, da aus der Definition des Addiators unmittelbar die Beziehung

$$\underbrace{\tilde{O} + \cdots + \tilde{O}}_{2^n\text{-mal}} \leqq z^{-n}\tilde{O}$$

folgt.

Existiert jedoch in K ein analytisch nilpotentes Element, so sind die obigen Schlüsse nicht durchführbar. Dieser Fall macht aber trotzdem keine Schwierigkeiten, da sich unmittelbar zeigen läßt, daß die Menge aller analytisch nilpotenten und neutralen Elemente eine die Topologie erzeugende Vollfastordnung ist. In diesem Falle kann im allgemeinen keine erzeugende Vollordnung gefunden werden (vgl. die durch den absoluten Betrag im rationalen Zahlkörper gegebene Topologie). Dafür aber läßt sich hier eine maximale erzeugende Vollfastordnung wählen — es ist gerade die oben definierte. Die Folge davon ist, daß in der zu der Topologie gehörigen Klasse topologisch äquivalenter Bewertungen eine gewöhnliche Bewertung liegt, eine Bewertung mit reellen Zahlen als Werten, die die bekannte Dreiecksungleichung erfüllt.

Die sowohl im nilpotenten wie im nichtnilpotenten Falle gemachten zusätzlichen Bemerkungen geben über das eigentliche Ergebnis hinaus die Aussage, daß *im kommutativen Falle jede Topologie vom Bewertungstyp sogar schon zu einer gewöhnlichen oder zu einer Krullschen Bewertung unendlichen Ranges äquivalent ist. Folglich ist z. B. im rationalen Zahlkörper jede Topologie vom Bewertungstyp zu einer der p-adischen Bewertungen oder zum absoluten Betrag äquivalent.*

Den hier in Umrissen angegebenen Gedankengang, der zu einer Charakterisierung der „kommutativen" Bewertungen von Schiefkörpern führt, verdanken wir großenteils Herrn Prof. Dr. F. K. Schmidt. Wir möchten ihm an dieser Stelle hierfür, für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge unseren herzlichen Dank aussprechen.

I. Grundlagen.

a) Topologische Körper. Im folgenden bedeutet K stets einen nicht notwendig kommutativen Körper. Ist M eine Teilmenge von K, so soll unter $M^\times$ die Menge aller von Null verschiedenen Elemente aus M verstanden werden. Weiter sollen noch folgende Bezeichnungen benutzt werden: Es bedeuten

$+, -, \cdot$	die algebraischen (nicht die verbandstheoretischen) Rechenoperationen,		
0	Nullelement (nicht die leere Menge),		
$\cup$, $\cup$	Vereinigung,	$\cap$, $\cap$	Durchschnitt,
$\leqq$	Enthaltensein,	$<$	echtes Enthaltensein,
$\complement M$	Komplement der Teilmenge M in K,		
$\wedge$	und	$\vee$	oder
$\rightarrow$	logische Folgerung,	$\longleftrightarrow$	logische Äquivalenz,
$\bigwedge_{x \in K} H(x)$	für alle Elemente x von K gilt die Eigenschaft H,		
$\bigvee_{x \in K} H(x)$	es gibt mindestens ein Element x von K mit der Eigenschaft H,		
$\mathsf{E}_{x \in K} H(x)$	Menge derjenigen Elemente x von K, die die Eigenschaft H besitzen,		
$=_{Df}$	Definitionsgleichheit.		

Unter den verschiedenen Möglichkeiten der Definition eines topologischen Körpers erweist sich für die nachfolgenden Untersuchungen die Kennzeichnung durch Umgebungen als zweckmäßig, weil sich auf diese Weise eine arithmetische Charakterisierung gewisser Topologien gewinnen läßt und damit eine Verbindung zu den allgemeinen Bewertungen.

Definition. K heißt ein *topologischer Körper*, wenn in ihm ein nicht leeres System $\mathfrak{U}$ von Teilmengen $U, V, W, \ldots$ ausgezeichnet ist, das folgenden Axiomen genügt:

(I) $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = 0$ (Trennungsaxiom).

(II) $\bigwedge_{U, V \in \mathfrak{U}} \bigvee_{W \in \mathfrak{U}} [W \leqq U \cap V]$ (Durchschnittsaxiom).

(III) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [V - V \leqq U]$ (Stetigkeit der Subtraktion).

(IV) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigwedge_{x, y \in K} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [(x + V)(y + V) \leqq xy + U]$ (Stetigkeit der Multiplikation).

(V) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigwedge_{x \in K^\times} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [(x + V)^{-1} \leqq x^{-1} + U]$ (Stetigkeit der Division).

$\mathfrak{U}$ bestimmt dann eine *Körpertopologie* T von K und heißt selbst ein zu T gehörender *Raster von Umgebungen* (der Null). Der durch $\mathfrak{U}$ erzeugte Filter $\tilde{\mathfrak{U}}$ soll der *Umgebungsfilter* von T heißen.

Erfüllen die Umgebungen eines Umgebungsrasters $\mathfrak{U}$ nur die Axiome (I) bis (IV), so bestimmt $\mathfrak{U}$ eine *Ringtopologie* des Körpers K.

Zwei Körper- bzw. Ringtopologien T_1 und T_2 von K mit Umgebungsrastern $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ heißen gleich, wenn ihre Umgebungsfilter übereinstimmen. T_1 heißt gröber als T_2 (oder gleichbedeutend: T_2 feiner als T_1), wenn ihre Umgebungsfilter die Beziehung $\tilde{\mathfrak{U}}_1 \leqq \tilde{\mathfrak{U}}_2$ erfüllen.

Festsetzung. Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß die betrachteten Körper- bzw. Ringtopologien nicht *diskret* sind. Jede Umgebung soll also ein von Null verschiedenes Element enthalten.

Für das Rechnen mit Umgebungen ist es zweckmäßig, die Axiome (III) bis (V) durch die folgenden Forderungen zu ersetzen, von deren Gleichwertigkeit mit den ursprünglichen Axiomen man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt:

(IIIa) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [V + V \leqq U]$. (IIIb) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [(-V) \leqq U]$.

(IVa) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [V \cdot V \leqq U]$. (IVb) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigwedge_{x \in K} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [xV \leqq U \wedge Vx \leqq U]$.

(Va) $\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [(1 + V)^{-1} \leqq 1 + U]$.

Axiom (V) folgt aus (Va) folgendermaßen: $x \in K^\times$ und U seien vorgegeben. Nach (IVb) gelte dann $U' x^{-1} \leqq U$. Nach (Va) gibt es zu U' ein V' mit $(1 + V')^{-1} \leqq 1 + U'$. Wählt man dann noch, wiederum auf Grund von (IVb), die Umgebung V so, daß $x^{-1} V \leqq V'$ gilt, so folgt insgesamt

$$(1 + x^{-1} V)^{-1} \leqq (1 + V')^{-1} \leqq 1 + U' \leqq 1 + Ux.$$

Rechtsmultiplikation mit x^{-1} liefert die Behauptung.

Axiom (IVb) besagt noch, daß mit einer Umgebung V auch die Mengen xV bzw. Vx für $x \neq 0$ dem Umgebungsfilter angehören.

Definition. Eine Teilmenge $M \leqq K$ heißt bei der Ringtopologie T (mit dem Umgebungsraster $\mathfrak{U}$) *linksbeschränkt*, wenn folgendes gilt:

$$\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [VM \leqq U].$$

Entsprechend lautet die Definition *rechtsbeschränkter* Mengen. M heißt *beschränkt*, wenn M gleichzeitig rechts- und linksbeschränkt ist.

Die Definition der Beschränktheit kann auf Grund des folgenden Satzes dahingehend vereinfacht werden, daß an Stelle der Umgebung V nur ein einzelnes Element $x \neq 0$ tritt:

Satz 1. *Linksbeschränkt* $(M) \longleftrightarrow \bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{x \in K^\times} [xM \leqq U]$.

Beweis. In der Richtung von links nach rechts ist die Behauptung trivial, da man für x jedes von Null verschiedene Element aus der in obiger Definition benutzten Umgebung V setzen kann. Zum Beweis der Behauptung in umgekehrter Richtung sei $U \in \mathfrak{U}$ beliebig vorgegeben, und nach (IVa) gelte $U'U' \leqq U$. Da es jetzt nach Voraussetzung ein $x \in K^\times$ mit $xM \leqq U'$ gibt, folgt zunächst

$$U'xM \leqq U'U' \leqq U.$$

Nach (IVb) gelte nun $Vx^{-1} \leqq U'$. Dann ergibt sich die Behauptung:

$$VM \leqq U'xM \leqq U.$$

Satz 2. *Summe, Differenz und Produkt von zwei linksbeschränkten Mengen sind selbst linksbeschränkt.*

Beweis. M_1, M_2 seien zwei linksbeschränkte Mengen, U eine beliebig vorgegebene Umgebung. Nach (III) bzw. (IIIa) gelte $U' \pm U' \leqq U$. Wegen der Linksbeschränktheit von M_1, M_2 gibt es Umgebungen V_1, V_2 mit $V_1 M_1 \leqq U'$ und $V_2 M_2 \leqq U'$. Ist nach (II) $V \leqq V_1 \cap V_2$, so folgt

$$V(M_1 \pm M_2) \leqq V_1 M_1 \pm V_2 M_2 \leqq U' \pm U' \leqq U.$$

Ist andererseits $WM_2 \leqq U$ und $VM_1 \leqq W$, so folgt die Linksbeschränktheit des Produktes aus

$$VM_1 M_2 \leqq WM_2 \leqq U.$$

Abschließend werde noch ein später gebrauchter Satz bewiesen, der die Existenz einer Umgebung besagt, deren Komplement zusammen mit dem reziproken Komplement ganz $K^\times$ überdeckt [1].

Satz 3. $\mathfrak{U}$ *sei Umgebungsraster einer Ringtopologie von K. Dann gilt*

$$\bigvee_{U \in \mathfrak{U}} [\complement U \cup (\complement U)^{-1} = K^\times].$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so würde für jedes $V \in \mathfrak{U}$ die Vereinigung $\complement V \cup (\complement V)^{-1}$ in $K^\times$ echt enthalten sein. D. h. es würde zu jedem V ein $x_V \neq 0$ geben mit

$$x_V \notin \complement V \cup (\complement V)^{-1}.$$

Also würde gleichzeitig gelten: $x_V \in V$ und $x_V^{-1} \in V$. Ist nun U eine beliebige Umgebung und nach (IVa) $V \cdot V \leqq U$, so würde folgen:

$$1 = x_V x_V^{-1} \in V \cdot V \leqq U.$$

Da U beliebig war, hieße das: $1 \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U$ im Widerspruch zu (I).

b) Allgemeine Bewertungen. Die Definition der streng und voll angeordneten Gruppe sei der Definition der allgemeinen Bewertungen vorangestellt.

Definition. Eine multiplikative Gruppe Γ heißt *streng* und *voll angeordnet*, wenn in ihr eine Relation $\leqq$ definiert ist, die den folgenden Axiomen genügt:

$$\left.\begin{array}{ll} \bigwedge_{\alpha\in\Gamma} & [\alpha \leqq \alpha] \\ \bigwedge_{\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma} & [\alpha \leqq \beta \wedge \beta \leqq \gamma \rightarrow \alpha \leqq \gamma] \\ \bigwedge_{\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma} & [\alpha \leqq \beta \rightarrow \gamma\alpha \leqq \gamma\beta \wedge \alpha\gamma \leqq \beta\gamma] \end{array}\right\} \textit{Anordnung.}$$

$$\bigwedge_{\alpha,\beta\in\Gamma} [\alpha \leqq \beta \wedge \beta \leqq \alpha \longleftrightarrow \alpha = \beta] \qquad \textit{strenge Anordnung.}$$

$$\bigwedge_{\alpha,\beta\in\Gamma} [\alpha \leqq \beta \vee \beta \leqq \alpha] \qquad \textit{Vollanordnung.}$$

Definition. K sei ein Körper und Γ eine streng und voll angeordnete multiplikative Gruppe, die durch Hinzunahme eines Nullelementes 0 mit der Festsetzung

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma} [0\alpha = \alpha 0 = 0 \wedge 0 \leqq \alpha]$$

ergänzt ist. Eine *allgemeine Bewertung* von K mit der *Wertgruppe* Γ ist eine hinsichtlich der Multiplikation homomorphe Abbildung φ von K auf $\Gamma \cup \{0\}$ mit den Eigenschaften

(B 1) $$\bigwedge_{a\in K^\times} \varphi(a) \neq 0; \quad \varphi(0) = 0.$$

(B 2) $$\bigvee_{\lambda\in\Gamma} \bigwedge_{x,y\in K} [\varphi(x+y) \leqq \lambda \operatorname{Max}(\varphi(x), \varphi(y))].$$

Anmerkung. Die Gültigkeit der „*Dreiecksungleichung*" (B 2) ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Addition hinsichtlich der durch die allgemeine Bewertung in K definierten Topologie eine stetige Operation sein soll.

Festsetzung. Der Trivialfall, daß die Wertgruppe Γ nur aus dem neutralen Element besteht, soll im folgenden stets ausgeschlossen werden (triviale Bewertung).

Der hier eingeführte Begriff der allgemeinen Bewertung eines Körpers umfaßt sowohl die von Krull [6] und Schilling [10] gegebenen Verallgemeinerungen der nichtarchimedischen gewöhnlichen Bewertungen als auch die archimedischen Bewertungen und ihre Potenzen. Eine allgemeine Bewertung ist genau dann eine Krullsche bzw. Schillingsche Bewertung, wenn in (B 2) $\lambda = 1$ gewählt werden kann. Auch die Potenzen archimedischer Bewertungen der allgemeinen Theorie einzuordnen, ist wünschenswert, da sie bei Beweisen in der Einheitentheorie [12] auftreten. Die hier angegebene Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung, durch welche auch sie erfaßt werden, ist angesichts eines Lemmas von *Artin* [5] naheliegend. Vor allem aber ist der Begriff der allgemeinen Bewertung so brauchbar, weil sich die Ganzheitsbereiche der allgemeinen Bewertungen so überaus einfach kennzeichnen lassen. Unter dem *Ganzheitsbereich* versteht man dabei die Menge

$$O =_{Df} \mathop{\mathsf{E}}_{x\in K} [\varphi(x) \leqq 1].$$

Diese Menge besitzt folgende Eigenschaften:

(a) $$0 \in O \wedge 1 \in O,$$

(b) $$O \cdot O \leqq O,$$

(c) $$O < K \wedge K^\times = O^\times O^{\times -1},$$

(d) $$\bigwedge_{x\in K} [xO = Ox],$$

(e) $$\bigvee_{z\in O^\times} [z(O \pm O) \leqq O],$$

(f) $$\bigwedge_{x\in K^\times} [x \in O \vee x^{-1} \in O].$$

Die Eigenschaft (e) folgt unmittelbar aus der Dreiecksungleichung der Bewertungen. Wählt man nämlich ein Element $z \in K^\times$ mit $\varphi(z) = \lambda^{-1}$, so gilt für alle Elemente $x, y \in O$

$$\varphi(z(x \pm y)) = \lambda^{-1} \varphi(x \pm y) \leqq \operatorname{Max}(\varphi(x), \varphi(y)) \leqq 1,$$

also

$$z(x \pm y) \in O.$$

Da in der Dreiecksungleichung das Element λ offensichtlich größer oder gleich 1 sein muß, gilt auch $z \in O^\times$.

Definition. Eine Teilmenge $O \subseteq K$ heißt eine *invariante Fastordnung* von K, wenn sie die Eigenschaften (a) bis (e) besitzt. Erfüllt die Menge O statt der Invarianzbedingung (d) nur die schwächere Forderung

$$\text{(d*)} \qquad \bigwedge_{u \in O^\times} \bigvee_{v \in O^\times} [vO \subseteq Ou \wedge Ov \subseteq uO],$$

so heißt O eine *Fastordnung* von K.

Eine Fastordnung O von K, die außerdem noch die Eigenschaft (f) besitzt, heißt eine *Vollfastordnung* von K.

Ein Element z der in (e) geforderten Art heißt ein 2-*Addiator* der Fastordnung.

Der Begriff der Fastordnung unterscheidet sich von dem üblichen Begriff der Ordnung nur durch das Axiom (e): Eine Fastordnung braucht hinsichtlich der Addition nicht abgeschlossen zu sein. Sie ist es jedoch, wenn $1 \in K$ ein 2-Addiator ist. In diesem Fall ist die Fastordnung ein Ring und soll als Ordnung (bzw. invariante Ordnung, Vollordnung) bezeichnet werden.

Nach den vorangehenden Betrachtungen entspricht jeder allgemeinen Bewertung von K in eindeutiger Weise eine invariante Vollfastordnung von K. Aber es bestimmt auch umgekehrt jede invariante Vollfastordnung O von K eine allgemeine Bewertung in K. Zunächst nämlich bestimmt jede Fastordnung O von K vermittels der Festsetzung

$$x \leqq y =_{Df} x \in yO$$

eine reflexive und transitive Relation $\leqq$. Diese Relation ist eine Anordnung der multiplikativen Gruppe $K^\times$, ist also invariant gegenüber der Multiplikation von K, wenn O eine invariante Fastordnung ist. Ist schließlich O eine invariante Vollfastordnung, so ist diese Anordnung eine Vollanordnung von $K^\times$. Durch Restklassenbildung in $K^\times$ nach der Einheitengruppe E von O (bestehend aus denjenigen Elementen $u \in O$ mit $uO = O$) erhält man schließlich einen Homomorphismus φ von $K^\times$ auf die streng und voll angeordnete Gruppe $\Gamma = K^\times/E$, also eine allgemeine Bewertung von K. Die Dreiecksungleichung folgt nämlich sofort aus der Eigenschaft (e) mit $\lambda = \varphi(z^{-1})$. Es gilt somit der

Satz 4. *Die invarianten Vollfastordnungen von K und die Klassen äquivalenter allgemeiner Bewertungen von K entsprechen sich umkehrbar eindeutig.*

Die allgemeinen Bewertungen eines Körpers K können nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifiziert werden. Einige solche Typenunterscheidungen sollen hier noch kurz zusammengestellt werden.

Definition. Eine allgemeine Bewertung heißt *kommutativ*, wenn ihre Wertgruppe abelsch ist; sonst *nichtkommutativ*.

Diese Unterscheidung bezieht sich auf die gruppentheoretische Struktur der Gruppe. Eine andere Klassifikation gewinnt man bei Berücksichtigung der Anordnung der Wertgruppe:

Definition. Eine allgemeine Bewertung heißt eine *spezielle* oder *einstufige* Bewertung, wenn ihre Wertgruppe archimedisch geordnet ist. Sie heißt *mehrstufig*, wenn die Wertgruppe nichtarchimedisch geordnet ist.

Diese Unterscheidung ist nicht mit der bekannten Aufspaltung in archimedische und nichtarchimedische Bewertungen zu verwechseln. Letztere bezieht sich auf die additiven Eigenschaften der Bewertung.

Die Wertgruppe einer speziellen Bewertung ist wegen der archimedischen Anordnung zu einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen anordnungsisomorph. Nach dem oben erwähnten Artinschen Lemma stimmen daher die speziellen Bewertungen mit den bekannten gewöhnlichen Bewertungen überein [5].

Eine andere Kennzeichnung gewisser Bewertungstypen, die ebenfalls die Anordnung der Wertgruppe benutzt, erhält man, wenn man nach den *isolierten* Normalteilern der Wertgruppe fragt [6]. Dabei heißt ein Normalteiler einer streng und voll angeordneten Gruppe *isoliert*, wenn er mit je zwei Elementen auch alle Elemente enthält, die hinsichtlich der Anordnung zwischen diesen beiden Elementen liegen. Die Faktorgruppe nach einem solchen isolierten Normalteiler ist wieder eine streng und voll angeordnete Gruppe. Durch Faktorbildung kann man daher zu einer neuen Bewertung des Körpers gelangen. Jedoch definieren beide Bewertungen dieselbe Topologie im Körper, sind also im topologischen Sinne äquivalent. Besitzt nun die Wertgruppe einer allgemeinen Bewertung einen maximalen isolierten Normalteiler, so ist die Faktorgruppe archimedisch geordnet. Im topologischen Sinne ist diese Bewertung dann zu einer speziellen Bewertung äquivalent. Allgemeine Bewertungen, die diese Eigenschaft nicht besitzen, sollen kurz als unendliche Bewertungen bezeichnet werden:

Definition. Eine allgemeine Bewertung heißt *unendlich*, wenn ihre Wertgruppe keinen maximalen isolierten Normalteiler besitzt.

II. Beschränkte Topologien und Fastordnungen.

Unter allen möglichen Ringtopologien eines Körpers K sind gewisse Topologien dadurch ausgezeichnet, daß man zu ihren Umgebungsfiltern in besonders einfacher Weise eine Basis (Umgebungsraster) angeben kann. Schon in Abschnitt I wurde bemerkt, daß mit jeder Umgebung U auch ihre Vielfachen xU bzw. Ux $(x \in K^\times)$ dem Umgebungsfilter angehören. Jedoch werden im allgemeinen die Vielfachen einer festen Umgebung noch keine Basis des Umgebungsfilters bilden. Dies ist vielmehr genau dann der Fall, wenn die betreffende Umgebung beschränkt ist. Ringtopologien, die eine beschränkte Umgebung U besitzen, sind also dadurch gekennzeichnet, daß die Vielfachen xU $(x \in K^\times)$ einen zugehörigen Umgebungsraster bilden. Solche Topologien sollen beschränkte Topologien heißen.

Definition. Eine Ringtopologie von K heißt eine *beschränkte Topologie*, wenn ihr Umgebungsfilter mindestens eine beschränkte Umgebung enthält.

Anmerkung. Anstatt die Existenz einer beschränkten Umgebung zu fordern, würde es auch genügen, die Existenz einer nur linksbeschränkten Umgebung U zu postulieren. Auch dann bilden die Linksvielfachen xU einen Umgebungsraster. Die Topologie wäre in diesem Fall als linksbeschränkte Topologie zu bezeichnen. Alle folgenden Sätze und Beweise lassen sich zwanglos auf solche linksbeschränkten Topologien übertragen. Der Einfachheit halber soll hiervon jedoch abgesehen werden.

Nicht jede Ringtopologie eines Körpers braucht schon eine beschränkte Topologie zu sein. Daß es auch Ringtopologien gibt, die keine einzige beschränkte Umgebung besitzen, zeigt folgendes einfache Beispiel im Körper P der rationalen Zahlen:

$p_1, p_2, \ldots$ sei eine Folge verschiedener Primzahlen. In P werde ein Umgebungsraster $\mathfrak{U} = \{U_n\}$ wie folgt definiert:

$$U_n =_{Df} \underset{x \in P}{\mathsf{E}} [w_{p_1}(x) \geqq n \wedge \cdots \wedge w_{p_n}(x) \geqq n].$$

$w_{p_\nu}(x)$ bedeutet dabei den Exponentenwert von x hinsichtlich der Primzahl p_ν. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Umgebungsraster in P eine Körpertopologie definiert. Ebenso erkennt man unmittelbar, daß $xU_n \leqq U_{n+1}$ für kein $x \neq 0$ gilt. Diese Körpertopologie ist daher keine beschränkte Topologie. (Die angegebene Topologie ist die zu den p_ν-adischen Bewertungen gehörende Durchschnittstopologie.)

Die beschränkten Topologien sind vom topologischen Standpunkt dadurch ausgezeichnet, daß ihre Umgebungsfilter bereits durch die Vielfachen einer einzelnen Umgebung U erzeugt werden. Dieser Sachverhalt soll auch kurz durch die Redeweise „*U erzeugt die Topologie*" gekennzeichnet werden. Aber auch vom arithmetischen Standpunkt gesehen nehmen die beschränkten Topologien eine Sonderstellung ein. Es wird sich zeigen, daß jede beschränkte Topologie eines Körpers K bereits durch eine Fastordnung von K erzeugt werden kann und daß auch umgekehrt jede Fastordnung von K eine beschränkte Topologie definiert.

Es sei nämlich T eine beschränkte Topologie des Körpers K, U eine beschränkte Umgebung. Setzt man dann

$$O =_{Df} \mathop{\mathsf{E}}_{x \in K} [xU \leqq U],$$

so soll gezeigt werden, daß O eine erzeugende Fastordnung von K für die Topologie T ist.

Um dies nachzuweisen, muß zweierlei bewiesen werden: Erstens muß gezeigt werden, daß O selbst eine beschränkte Umgebung ist, also die Topologie erzeugt, und zweitens müssen die definierenden Eigenschaften einer Fastordnung nachgewiesen werden.

Da U nach Voraussetzung beschränkt ist, gibt es eine Umgebung V mit $VU \leqq U$. Es gilt daher $V \leqq O$, und O gehört folglich dem Umgebungsfilter von T an. Andererseits folgt aus $OU \leqq U$ für ein festes $u \in U^\times$ sofort $O \leqq Uu^{-1}$. Hier ist die rechte Seite als Produkt beschränkter Mengen selbst beschränkt. Daher ist O eine beschränkte Umgebung und erzeugt die Topologie.

Es sind nun die Eigenschaften (a), (b), (c), (d*) und (e) nachzuweisen.

(a) folgt trivial aus der Definition von O.

(b) ergibt sich aus $(OO)U = O(OU) \leqq OU \leqq U$.

Da O beschränkt ist, ist O in K echt enthalten. Weiter sei x ein beliebiges Element aus $K^\times$. Nach (IVb) gibt es dann eine Umgebung V mit $xV^\times \leqq O^\times$. Ist u ein Element aus $V^\times \cap O^\times$, so folgt $x \in O^\times u^{-1} \leqq O^\times O^{\times -1}$. Damit ist (c) nachgewiesen.

(d*) folgt unmittelbar aus der Beschränktheit von O. Da nämlich die Mengen uO und Ou selbst Umgebungen sind, gibt es Umgebungen V_1 und V_2 mit $V_1 O \leqq Ou$ und $OV_2 \leqq uO$. Für jedes Element v aus $V_1^\times \cap V_2^\times \cap O^\times$ folgt somit $vO \leqq Ou$ und $Ov \leqq uO$.

Schließlich existiert zu O nach (III) bzw. (IIIa) eine Umgebung V mit $V \pm V \leqq O$. Da es andererseits wegen der Beschränktheit von O ein $z \in K^\times$ gibt mit $zO \leqq V$, so ergibt sich sofort mit diesem Element z:

$$z(O \pm O) \leqq zO \pm zO \leqq V \pm V \leqq O.$$

Wegen $0, 1 \in O$ folgt hieraus $z = z(0 + 1) \in O$, also $z \in O^\times$. Damit ist auch (e) erfüllt.

Zusammenfassend gilt somit zunächst der

Satz 5. *Jede beschränkte Topologie eines Körpers K kann durch eine Fastordnung von K erzeugt werden.*

Anmerkung. Der Beweis hat gezeigt, daß ganz allgemein jede multiplikativ abgeschlossene beschränkte Umgebung eine erzeugende Fastordnung von K ist. Ist die bei

der Konstruktion der Fastordnung O benutzte beschränkte Umgebung U sogar eine invariante Umgebung, gilt also $xUx^{-1} = U$ für alle $x \in K^\times$, so ist die Fastordnung O eine invariante Fastordnung. Aus $OU \leqq U$ folgt nämlich sofort $xOx^{-1}U = xOUx^{-1} \leqq xUx^{-1} = U$.

Von Satz 5 soll nun auch die Umkehrung gezeigt werden:

Satz 6. *Jede Fastordnung von K erzeugt in K eine beschränkte Topologie.*

Beweis. O sei eine Fastordnung von K. Zu zeigen ist, daß die Mengen xO mit $x \in K^\times$ einen Umgebungsraster für eine beschränkte Topologie von K definieren. Es sind also zunächst die Axiome (I) bis (IV) nachzuweisen.

Zu (I): Wegen $O < K$ gibt es ein $a \in K^\times$ mit $a \notin O$. Ist nun y ein beliebiges Element aus $K^\times$, so folgt $y \notin (ya^{-1})O$. Da andererseits 0 in jeder Menge xO enthalten ist, gilt $\bigcap_{x \in K^\times} xO = 0$.

Zu (II): Zu zeigen ist, daß es zu je zwei Elementen $x, y \in K^\times$ ein Element $z \in K^\times$ gibt mit $zO \leqq xO \cap yO$, und dies ist wegen $OO \leqq O$ gleichwertig mit $z \in xO \cap yO$. Gäbe es nun kein solches Element z, wäre also $xO \cap yO = 0$, so würde für je zwei Elemente $u, v \in O^\times$ gelten $xu \neq yv$ oder gleichwertig $y^{-1}x \neq vu^{-1}$ im Widerspruch dazu, daß $y^{-1}x$ als Element aus $K^\times$ in $O^\times O^{\times -1}$ liegen muß.

Zu (III): Wegen $z(O - O) \leqq O$ gilt $(xz)O - (xz)O = xz(O - O) \leqq xO$.

Zu (IVa): Ist $x \in K^\times$ vorgegeben, so muß die Existenz eines Elements $y \in K^\times$ mit $yOyO \leqq xO$ nachgewiesen werden. Zu diesem Zweck wähle man y aus $O^\times \cap xO$. Dann gilt wegen $OO \leqq O$:

$$yOyO \leqq (xO)\,OO^\times O \leqq xO.$$

Zu (IVb): Zu zeigen ist, daß es zu zwei Elementen $x, y \in K^\times$ ein $z \in K^\times$ gibt mit $y(zO) \leqq xO$ und $(zO)\,y \leqq xO$. Setzt man $z_1 = y^{-1}x$, so folgt $y(z_1O) = xO$. Nach (c) ist y in der Form $y = uv^{-1}$ mit $u, v \in O^\times$ darstellbar. Ferner gibt es nach (d*) zu v ein Element $w \in O^\times$ mit $wO \leqq Ov$, also $Ov^{-1} \leqq w^{-1}O$. Setzt man nun $z_2 = xw$, so folgt wegen $u \in O^\times$, also $Ou \leqq O$:

$$(z_2O)\,y = xwOuv^{-1} \leqq xwOv^{-1} \leqq xww^{-1}O = xO.$$

Ein beliebiges Element z aus $z_1O^\times \cap z_2O^\times$ erfüllt dann beide Bedingungen gleichzeitig.

O erzeugt somit eine Ringtopologie von K. Und da offenbar O selbst bei dieser Topologie beschränkt ist, so ist die durch O erzeugte Topologie sogar eine beschränkte Topologie.

Durch die Sätze 5 und 6 sind die beschränkten Topologien arithmetisch charakterisiert. Sie sind genau diejenigen Ringtopologien, die durch Fastordnungen des betreffenden Körpers erzeugt werden können.

III. Topologien vom Bewertungstyp und zugehörige Fastordnungen.

Ist K ein bewerteter Körper mit der allgemeinen Bewertung φ, so ist die durch die Bewertung in K erzeugte Topologie offenbar eine beschränkte Topologie. Darüber hinaus besitzt aber eine solche Topologie noch eine weitere Eigenschaft: Das reziproker Komplement jeder Umgebung der Null ist beschränkt. Denn besteht etwa die Umgebung U aus allen Elementen $x \in K$ mit $\varphi(x) \leqq \alpha$, so gilt für jedes $y \in (\complement U)^{-1}$ die Relation $\varphi(y) < \alpha^{-1}$. Die Menge $(\complement U)^{-1}$ ist daher beschränkt. Von dieser Eigenschaft ausgehend gelangt man zu einer neuen Klasse von Topologien, deren enge Beziehungen zu den Bewertungen schon länger bekannt sind [4] [5].

Definition. Eine Ringtopologie des Körpers K heißt eine *Topologie vom Bewertungstyp*, wenn das reziproke Komplement jeder Umgebung der Null beschränkt ist. Ist also $\mathfrak{U}$ ein Umgebungsraster von T, so soll gelten:

$$\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} [\text{beschränkt } (\complement U)^{-1}].$$

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise sollen die Topologien vom Bewertungstyp auch als *V-Topologien* bezeichnet werden.

Satz 7. *Jede V-Topologie ist eine Körpertopologie.*

Beweis. Es genügt, Axiom (Va) nachzuweisen, also zu zeigen, daß folgendes gilt:

$$\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} [(1+V)^{-1} \leqq 1 + U]$$

oder gleichbedeutend

$$\bigwedge_{U \in \mathfrak{U}} \bigvee_{V \in \mathfrak{U}} \bigwedge_{v \in V^{\times}} [(1+v)^{-1} - 1 \in U].$$

Es sei demnach eine Umgebung U vorgegeben. Nach den Axiomen (I) und (IIIa) gibt es jedenfalls eine Umgebung V_1 derart, daß -1 nicht in $V_1 + V_1$ liegt. Weiter gibt es nach Definition der V-Topologien eine Umgebung V_2 mit $V_2(\complement U)^{-1} \leqq V_1$. Man wähle nun nach (II) die gesuchte Umgebung V so, daß $V \leqq V_1 \cap V_2$. Dann gilt

$$-1 \notin V + V(\complement U)^{-1},$$

also erst recht für ein beliebiges $v \in V^{\times}$:

$$-1 \notin v + v(\complement U)^{-1}.$$

Folglich ist $1 + v \in -vU^{\times -1}$ oder

$$(1+v)^{-1}(-v) = (1+v)^{-1} - 1 \in U.$$

Satz 8. *Jede V-Topologie ist eine beschränkte Topologie.*

Beweis. Nach Satz 3 existiert zu jeder Topologie mindestens eine Umgebung U mit $\complement U \cup (\complement U)^{-1} = K^{\times}$. Diese Umgebung ist bereits beschränkt, die Topologie also eine beschränkte Topologie. Denn diese Eigenschaft ist gleichwertig mit $U^{\times} \leqq (\complement U)^{-1}$. Da $(\complement U)^{-1}$ nach Definition der V-Topologien beschränkt ist, ist es auch U.

Nach diesem Satz stellen also die V-Topologien eine spezielle Klasse innerhalb der beschränkten Topologien dar. Die Ergebnisse des vorangehenden Abschnittes sind daher auf die V-Topologien anwendbar: Jede V-Topologie von K kann durch eine Fastordnung von K erzeugt werden. Da jedoch umgekehrt nicht jede beschränkte Topologie eine V-Topologie zu sein braucht — wie etwa das Beispiel der Durchschnittstopologie zweier verschiedenen p-adischen Bewertungen im Körper der rationalen Zahlen zeigt — so erhebt sich die Frage, ob sich nicht die zu V-Topologien gehörenden Fastordnungen durch zusätzliche Eigenschaften kennzeichnen lassen. Eine solche Kennzeichnung wird durch den folgenden Satz gegeben.

Satz 9. *Eine Fastordnung O von K erzeugt dann und nur dann eine V-Topologie in K, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:*

$$(\mathrm{f}^*) \qquad \bigvee_{c \in O^{\times}} \bigwedge_{x \in K^{\times}} [x \in O \vee x^{-1} \in c^{-1} O].$$

Die Eigenschaft (f*) stellt offenbar eine Abschwächung der Forderung (f) dar, die ja eine Vollfastordnung charakterisiert.

Beweis. Wenn die Fastordnung O von K eine Topologie vom Bewertungstyp erzeugt, dann ist $(\mathbf{C}O)^{-1}$ beschränkt. Es gibt daher ein Element c, das ohne Beschränkung der Allgemeinheit in $O^\times$ angenommen werden kann, mit $c(\mathbf{C}O)^{-1} \leqq O$ oder gleichbedeutend $(\mathbf{C}O)^{-1} \leqq c^{-1}O$. Dies aber ist eine äquivalente Umformung von (f*). Umgekehrt folgt aus (f*), also aus $c(\mathbf{C}O)^{-1} \leqq 0$, daß $(\mathbf{C}O)^{-1}$ beschränkt ist; denn O ist ja beschränkt. Ist nun xO mit $x \in K^\times$ eine beliebige Umgebung aus dem durch O bestimmten Umgebungsraster, so folgt

$$(\mathbf{C}xO)^{-1} = (\mathbf{C}O)^{-1}x^{-1} \leqq c^{-1}Ox^{-1}.$$

Die rechte Seite ist als Produkt beschränkter Mengen selbst beschränkt, folglich auch $(\mathbf{C}xO)^{-1}$. Daher erzeugt O eine V-Topologie.

Nachdem für die V-Topologien auf diese Weise eine arithmetische Charakterisierung gewonnen ist, wird es das Ziel des nächsten Abschnitts sein, die V-Topologien mit den allgemeinen Bewertungen in Verbindung zu bringen. Bei diesen Untersuchungen wird der Begriff des analytisch nilpotenten Elements [5] eine wesentliche Rolle spielen.

Definition. Ein Element $x \in K^\times$ heißt bei der Ringtopologie T von K *analytisch nilpotent*, wenn seine Potenzen x^n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Nullfolge hinsichtlich der Topologie T bilden. Ein Element $x \in K^\times$ heißt bei der Ringtopologie T von K *neutral*, wenn weder x noch x^{-1} hinsichtlich T analytisch nilpotent ist.

Es gelten dann folgende Sätze:

Satz 10. T *sei eine V-Topologie von K mit der erzeugenden Fastordnung O. Ist $x \in O^\times$ nicht analytisch nilpotent, so ist die Menge $\{x^{-n}\}_{n=0,1,\ldots}$ beschränkt.*

Beweis. Es genügt, die Existenz einer Umgebung U nachzuweisen mit $\{x^n\} \leqq \mathbf{C}U$. Denn dann folgt aus $\{x^{-n}\} \leqq (\mathbf{C}U)^{-1}$ die Behauptung. Nun zieht aber $x^{n_0} \in uO$ $(u \in O^\times)$ wegen $x \in O^\times$ sofort $x^{n_0+1} \in uOx \leqq uO$ nach sich. Mit x^{n_0} ist also auch jede höhere Potenz von x in uO enthalten. Würde es nun zu jedem $u \in O^\times$ eine in uO enthaltene Potenz von x geben, so würde jede Umgebung fast alle Elemente der Folge $\{x^n\}$ enthalten. $\{x^n\}$ wäre also Nullfolge im Widerspruch dazu, daß x nicht analytisch nilpotent ist.

Anmerkung. Eine einfache Erweiterung des Beweises ermöglicht die Abschwächung der Voraussetzung $x \in O^\times$ in $x \in K^\times$.

Satz 11. T *sei eine V-Topologie von K und t ein hinsichtlich dieser Topologie analytisch nilpotentes Element. Dann gibt es eine ganze Umgebung U aus lauter analytisch nilpotenten Elementen.*

Beweis. Es wird sogar gezeigt, daß es eine Umgebung U gibt, deren Potenzen U^n einen zu T gehörenden Umgebungsraster bilden. Die Behauptung des Satzes ist eine schwächere Aussage.

O sei eine erzeugende Fastordnung von T. Nach (d*) gibt es ein Element $u \in O^\times$ mit $uO \leqq Ot$. Setzt man $U =_{Df} uO$, so folgt

$$U^n = uO \cdots uOuO \leqq uO \cdots uOOt \leqq uO \cdots uOt \leqq \cdots \leqq Ot^n.$$

Da O beschränkt und t analytisch nilpotent ist, ist $\{U^n\}$ Umgebungsraster.

IV. Zusammenhang der V-Topologien mit den allgemeinen Bewertungen.

Wie in der Einleitung ausführlich auseinandergesetzt wurde, ist angesichts des Ergebnisses von Abschnitt Ib, daß die zu einer allgemeinen Bewertung gehörigen Topologien genau die durch invariante Vollfastordnungen erzeugten sind, jetzt die Hauptfrage:

Unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen wird eine beschränkte Topologie sogar durch eine invariante Vollfastordnung erzeugt? Daß die Topologie eine V-Topologie sein muß, ging schon aus Abschnitt III hervor. Diese Bedingung ist aber, wie aus einem am Schluß angegebenen Beispiel hervorgeht, nicht auch hinreichend. Es sollen nun noch zusätzliche notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben werden, die von verschiedener Natur sind, je nachdem ob der Körper hinsichtlich der betrachteten V-Topologie analytisch nilpotente Elemente enthält oder nicht.

Zunächst soll der Fall untersucht werden, in dem es zu der gegebenen V-Topologie des Körpers K keine analytisch nilpotenten Elemente gibt. Man kann dann zunächst ohne weitere Voraussetzungen zeigen, daß die Topologie stets schon durch eine Vollfastordnung, ja sogar durch eine Vollordnung von K erzeugt werden kann.

Satz 12. *Gibt es zu einer V-Topologie des Körpers K kein analytisch nilpotentes Element, so kann die Topologie stets durch eine Vollordnung von K erzeugt werden.*

Beweis. Nach Satz 9 wird die gegebene V-Topologie durch eine Fastordnung O von K erzeugt, die noch die Eigenschaft (f*) besitzt. D. h. es gibt ein Element $c \in O^\times$, so daß für alle $x \in K^\times$

$$x \in O \vee x^{-1} \in c^{-1}O$$

gilt oder gleichbedeutend

$$(\mathbf{C}O)^{-1} \leqq c^{-1}O.$$

Nach Eigenschaft (d*) der Fastordnungen gelte nun $Ov \leqq cO$ mit $v \in O^\times$, und es sei

$$\tilde{O} =_{Df} \mathop{\mathsf{E}}_{x \in K} [xO \leqq O\{v^{-n}\}_{n=0,1,2,\ldots}].$$

Wegen $OO \leqq O$ gilt zunächst $O \leqq \tilde{O}$; also ist $\tilde{O}$ eine Umgebung. Wegen $1 \in O$ folgt weiter $\tilde{O} \leqq O\{v^{-n}\}$. Nach Satz 10 ist die Menge $\{v^{-n}\}$ beschränkt. Denn da es bei der vorgegebenen V-Topologie keine analytisch nilpotenten Elemente geben soll, ist jedenfalls auch v nicht analytisch nilpotent. $O\{v^{-n}\}$ ist daher als Produkt beschränkter Mengen selbst beschränkt und folglich auch $\tilde{O}$. Also ist $\tilde{O}$ eine beschränkte Umgebung.

Sind schließlich x und y Elemente aus $\tilde{O}$, gilt also etwa $xO \leqq Ov^{-r}$ und $yO \leqq Ov^{-s}$, so folgt

$$(xy)\,O = x(yO) \leqq xOv^{-s} \leqq Ov^{-r}v^{-s} = Ov^{-(r+s)},$$

also $xy \in O$. Demnach ist $\tilde{O}$ sogar eine multiplikativ abgeschlossene beschränkte Umgebung, also eine erzeugende Fastordnung. $\tilde{O}$ ist aber auch Vollfastordnung. Dazu ist zu zeigen, daß $(\mathbf{C}\tilde{O})^{-1} \leqq \tilde{O}$ gilt. Nun folgt aber wegen $O \leqq \tilde{O}$ sofort $\mathbf{C}\tilde{O} \leqq \mathbf{C}O$ und hieraus

$$(\mathbf{C}\tilde{O})^{-1} \leqq (\mathbf{C}O)^{-1} \leqq c^{-1}O \leqq \tilde{O}.$$

Denn es gilt ja $c^{-1}OO \leqq c^{-1}O \leqq Ov^{-1}$, also $c^{-1}O \leqq \tilde{O}$.

Ist nun z ein 2-Addiator von $\tilde{O}$, so gilt

$$\tilde{O} \pm \tilde{O} \leqq z^{-1}\tilde{O}, \quad \tilde{O} \pm \tilde{O} \pm \tilde{O} \pm \tilde{O} \leqq z^{-2}\tilde{O},$$

allgemein

$$\underbrace{\tilde{O} \pm \cdots \pm \tilde{O}}_{2^n\text{-mal}} \leqq z^{-n}\tilde{O}.$$

Die von $\tilde{O}$ erzeugte Ordnung O^* von K ist daher in der Menge $\{z^{-n}\}_{n=0,1,2,\ldots}\tilde{O}$ enthalten. Aus denselben Gründen wie oben $\tilde{O}$ ist O^* daher eine die Topologie erzeugende Ordnung von K, die wegen $\tilde{O} \leqq O^*$ sogar eine Vollordnung ist.

Damit eine V-Topologie von K ohne analytisch nilpotente Elemente zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent ist, braucht man von ihr also lediglich noch eine Eigenschaft zu fordern, die die Existenz einer invarianten Voll-(fast-)Ordnung sichert. Notwendig ist offenbar, daß es zu der Topologie eine invariante und beschränkte Umgebung gibt. Denn z. B. alle Elemente mit einem Wert $\leqq 1$ bilden eine solche Umgebung. Diese Bedingung wird sich nun auch als hinreichend erweisen. Eine beschränkte Umgebung existiert nach Satz 8 zu jeder V-Topologie. Zusätzlich wird nur gefordert, daß es sogar eine invariante beschränkte Umgebung geben soll.

Satz 13. *Eine V-Topologie des Körpers K, zu der es keine analytisch nilpotenten Elemente gibt, ist dann und nur dann zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent, wenn es zu ihr eine invariante und beschränkte Umgebung gibt.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung wurde schon festgestellt. Es sei also umgekehrt T eine V-Topologie von K, zu der es eine beschränkte und invariante Umgebung gibt. Nach der Anmerkung zu Satz 5 gibt es dann eine invariante Fastordnung O von K, die die Topologie T erzeugt. Nach Satz 12 gibt es weiter mindestens eine Vollordnung O^*, die O und $(\complement O)^{-1}$ umfaßt und die Topologie erzeugt. Es sei nun

$$\hat{O} =_{Df} \bigcap O^*,$$

wobei der Durchschnitt über alle erzeugenden Vollordnungen zu erstrecken ist, die $O \cup (\complement O)^{-1}$ umfassen. $\hat{O}$ ist dann jedenfalls eine die Topologie erzeugende Ordnung von K. Es ist aber $\hat{O}$ auch Vollordnung. Denn wegen $O \leqq \hat{O}$ gilt $(\complement \hat{O})^{-1} \leqq (\complement O)^{-1} \leqq \hat{O}$. Schließlich ist $\hat{O}$ sogar invariante Vollordnung, weil wegen der Invarianz von O und damit der Invarianz von $(\complement O)^{-1}$ mit O^* auch xO^*x^{-1} eine erzeugende Vollordnung ist, die $O \cup (\complement O)^{-1}$ umfaßt. Die V-Topologie T kann somit durch eine invariante Vollordnung von K erzeugt werden, ist also zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent.

Der Beweis von Satz 13 zeigt sogleich noch, daß die zu der Topologie äquivalente allgemeine Bewertung eine Krullsche bzw. Schillingsche Bewertung ist, weil die erzeugende Vollfastordnung sogar eine Vollordnung ist. Außerdem sieht man sofort, daß diese Bewertungen unendliche Bewertungen sein müssen. Denn wären sie zu einer speziellen Bewertung äquivalent, so müßte es in K analytisch nilpotente Elemente geben. Ob die Topologie zu einer kommutativen Bewertung äquivalent ist oder nicht, hängt davon ab, ob die Kommutatorgruppe der multiplikativen Gruppe $K^\times$ bei der Topologie beschränkt ist. Es gilt nämlich

Satz 14. *Eine V-Topologie von K, die zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent ist, ist dann und nur dann zu einer kommutativen Bewertung äquivalent, wenn die Kommutatorgruppe G der multiplikativen Gruppe $K^\times$ beschränkt ist.*

Beweis. Ist die Topologie zu einer kommutativen Bewertung äquivalent, so ist die Kommutatorgruppe G beschränkt, weil alle ihre Elemente den Wert 1 besitzen. Ist umgekehrt G beschränkt, so erzeugen die Werte der Elemente von G in der Wertgruppe Γ einen isolierten echten Normalteiler, der die Kommutatorgruppe von Γ umfaßt. Durch Faktorbildung nach diesem Normalteiler kann man daher zu einer topologisch äquivalenten kommutativen Bewertung übergehen.

Der Fall, daß die Kommutatorgruppe G beschränkt ist, ist jedoch auch noch in anderer Hinsicht von Bedeutung: Bei beschränkter Kommutatorgruppe braucht die Existenz einer invarianten beschränkten Umgebung nicht besonders gefordert zu werden. Ist nämlich U eine beschränkte Umgebung, so ist UG eine invariante und beschränkte

Umgebung. Wegen $1 \in G$ gilt nämlich $U \subseteq UG$. Und wegen der Beschränktheit von U und G ist auch UG beschränkt. Es folgt daher

Satz 15. *Eine V-Topologie von K ohne analytisch nilpotente Elemente, bei der die Kommutatorgruppe G von $K^\times$ beschränkt ist, ist zu einer (kommutativen) unendlichen Krullschen Bewertung äquivalent.*

Ist der Körper K kommutativ, so ist die Voraussetzung über die Kommutatorgruppe trivialerweise erfüllt.

Nachdem nun der Fall der V-Topologien ohne analytisch nilpotente Elemente vollständig erledigt ist, soll jetzt der andere Fall untersucht werden, in dem es mindestens ein analytisch nilpotentes Element gibt. Während im ersten Fall die Existenz einer Voll-(fast-)ordnung ohne zusätzliche Voraussetzungen abgeleitet werden konnte, kann jetzt auf Grund von Satz 11, der besagte, daß im Falle der Existenz eines analytisch nilpotenten Elementes aus dem Bewertungstyp sofort die Existenz einer ganzen Umgebung analytisch nilpotenter Elemente folgt, die Invarianzforderung abgeleitet werden.

Satz 16. *Die Menge M der analytisch nilpotenten und neutralen Elemente bildet eine invariante und beschränkte Umgebung.*

Beweis. Aus $(axa^{-1})^n = ax^n a^{-1}$ folgt sofort, daß mit x auch axa^{-1} neutral bzw. analytisch nilpotent ist. M ist demnach eine invariante Menge. Ist weiter U die in Satz 11 nachgewiesene nilpotente Umgebung, so sind die Elemente von $U^{\times -1}$ weder neutral noch analytisch nilpotent. Es gilt daher $M^\times \subseteq (\mathfrak{C}U)^{-1}$, und M ist nach der Definitionseigenschaft der V-Topologien beschränkt. Da M außerdem jedenfalls die Umgebung U enthält, ist M auch eine Umgebung.

Auf Grund dieses Satzes und nach der Anmerkung zu Satz 5 wird die Topologie dann durch eine invariante Fastordnung von K erzeugt. Andererseits muß jede erzeugende Fastordnung in M enthalten sein. Denn sonst würde eine solche Fastordnung O ein Element x enthalten, das nicht in M liegt, dessen Inverses x^{-1} also analytisch nilpotent wäre. Da O wegen seiner multiplikativen Abgeschlossenheit dann auch alle Elemente x^n $(n = 1, 2, \ldots)$ enthalten müßte, wäre O nicht beschränkt. Man überzeugt sich nun leicht, daß die Vereinigung aller invarianten erzeugenden Fastordnungen von K wieder eine invariante Fastordnung von K ist, die in M enthalten und folglich beschränkt ist. Damit gilt dann

Satz 17. *Eine V-Topologie von K mit mindestens einem analytisch nilpotenten Element wird durch eine (eindeutig bestimmte) maximale invariante Fastordnung von K erzeugt.*

Damit nun eine solche V-Topologie zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent ist, muß man an sie noch eine Forderung stellen, die es gewährleistet, daß die maximale invariante Fastordnung schon eine Vollfastordnung ist. Eine solche Bedingung wurde bereits von *I. Kaplansky* formuliert [5].

Satz 18. *Eine V-Topologie von K mit mindestens einem analytisch nilpotenten Element ist genau dann zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent, wenn das Produkt eines analytisch nilpotenten Elements mit einem analytisch nilpotenten oder neutralen Element selbst analytisch nilpotent ist. Die Topologie ist dann sogar zu einer speziellen Bewertung äquivalent.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt unmittelbar. Umgekehrt besagt die Bedingung, daß die Menge M multiplikativ abgeschlossen ist. Sie ist daher nach Satz 16 eine erzeugende invariante Fastordnung von K und stimmt mit der in Satz 17 genannten maximalen invarianten Fastordnung überein. Daß M Vollfastordnung ist, folgt sofort aus der Definition des neutralen bzw. analytisch nilpotenten Elements. Die V-Topologie

wird also durch eine invariante Vollfastordnung von K erzeugt und ist daher zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent. Aus der Definition folgt weiter sofort, daß die Wertgruppe der zu dieser invarianten Vollfastordnung von K gehörenden Bewertung archimedisch geordnet, die Bewertung also eine spezielle Bewertung ist.

Auch hier vereinfachen sich die Verhältnisse, wenn man die Kommutatorgruppe G des Körpers als beschränkt voraussetzt. Die Bedingung von Satz 18 ist dann automatisch erfüllt, und es folgt

Satz 19. *Eine V-Topologie, die mindestens ein analytisch nilpotentes Element besitzt und bei der die Kommutatorgruppe G von $K^\times$ beschränkt ist, ist zu einer speziellen Bewertung äquivalent.*

Bei kommutativen Körpern ist diese Voraussetzung natürlich trivialerweise erfüllt.

Auf Grund dieser Ergebnisse überblickt man jetzt vollständig den Zusammenhang der V-Topologien mit den allgemeinen Bewertungen. Die gewonnenen Kriterien sollen abschließend noch einmal zusammengestellt werden.

Zusammenfassung.

1. *Eine V-Topologie des Körpers K, die keine analytisch nilpotenten Elemente besitzt, ist dann und nur dann zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent, wenn sie eine invariante beschränkte Umgebung besitzt. Die Bewertung ist dann eine unendliche Krullsche bzw. Schillingsche Bewertung.*

2. *Eine V-Topologie des Körpers K, die mindestens ein analytisch nilpotentes Element besitzt, ist genau dann zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent, wenn das Produkt eines analytisch nilpotenten Elements mit einem neutralen oder analytisch nilpotenten Element selbst analytisch nilpotent ist. Die Bewertung ist dann topologisch mit einer speziellen Bewertung äquivalent.*

Die Verhältnisse vereinfachen sich im Falle eines kommutativen Körpers bzw. im Falle beschränkter Kommutatorgruppe:

3. *Jede V-Topologie eines kommutativen Körpers und jede V-Topologie, bei der die Kommutatorgruppe der multiplikativen Gruppe des Körpers beschränkt ist, ist zu einer allgemeinen kommutativen Bewertung äquivalent.*

Sie ist genau dann zu einer speziellen Bewertung äquivalent, wenn es zu ihr mindestens ein analytisch nilpotentes Element gibt.

V. Beispiele.

Satz 13 besagt, daß eine Topologie vom Bewertungstyp ohne analytisch nilpotente Elemente nur dann zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent ist, wenn sie eine beschränkte und invariante Umgebung besitzt. Nun könnte es natürlich noch so sein, daß sich die Existenz einer invarianten beschränkten Umgebung aus den Eigenschaften der Topologien vom Bewertungstyp ableiten ließe. Daß dies nicht der Fall ist, läßt sich mit Hilfe eines von F. K. Schmidt angegebenen Gegenbeispiels zeigen, dessen Konstruktion hier jedoch nur angedeutet werden soll.

Ausgehend von einem kommutativen Körper K_0 konstruiert man eine aufsteigende Körperkette $K_0 \leqq K_1 \leqq K_2 \leqq \cdots$ auf folgende Weise: Ist der Körper K_{n-1} schon bestimmt,

so bildet man über K_{n-1} zunächst mit Hilfe einer Unbestimmten t_n und eines Automorphismus A_{n-1} des Körpers K_{n-1} den Ring $K_{n-1}[t_n]_{A_{n-1}}$ der Oreschen nichtkommutativen Polynome

$$g(t_n) = a_0 + \cdots + a_m t_n^m \qquad (a_\mu \in K_{n-1})$$

mit der Vertauschungsvorschrift $t_n a = a^{A_{n-1}} t_n$ $(a \in K_{n-1})$. Der Ring $K_{n-1}[t_n]_{A_{n-1}}$ läßt sich in einen eindeutig bestimmten Quotientenkörper einbetten, der das nächste Glied K_n der Kette sein soll. Die Elemente von K_n besitzen die Form $g(t_n)\,(h(t_n))^{-1}$ mit $g, h \in K_{n-1}[t_n]_{A_{n-1}}$. Der dem Beispiel zugrunde liegende Körper K ist dann die Vereinigung aller Körper der angegebenen Kette. In K läßt sich mit Hilfe des Gradbegriffes eine Vollordnung O konstruieren, die dann nach Satz 9 eine V-Topologie in K definiert. Man setzt hierzu $O_0 =_{Df} K_0$ und für $n \geqq 1$

$$O_n =_{Df} \mathop{\mathsf{E}}_{x \in K_n} [\mathrm{Grad}_{t_n}(x) < 0],$$

schließlich

$$O =_{Df} \bigcup_{n=0}^{\infty} O_n.$$

Die Automorphismen A_ν werden bei der Konstruktion von O nicht herangezogen. Man kann daher über sie noch in geeigneter Weise verfügen. Dies geschieht durch die Festsetzung

$$(g(t_n))^{A_n} = (a_0 + a_1 t_n + \cdots + a_m t_n^m)^{A_n} =_{Df} a_0 + a_1 t_n^{-1} + \cdots + a_m t_n^{-m}.$$

Es zeigt sich dann, daß in K jede invariante Umgebung unbeschränkt ist. Damit ist ein Beispiel für einen Körper angegeben, der eine V-Topologie besitzt, zu der es keine beschränkte invariante Umgebung gibt.

Die Beziehungen der V-Topologien zu den allgemeinen Bewertungen wurden besonders einfach, wenn man die Kommutatorgruppe des Körpers als beschränkt voraussetzte. Daß man hiermit tatsächlich etwas Zusätzliches fordert, daß also die Beschränktheit der Kommutatorgruppe nicht etwa aus der Existenz einer beschränkten invarianten Umgebung abgeleitet werden kann, läßt sich ebenfalls an einem Beispiel zeigen. B. H. Neumann [7] hat nämlich eine angeordnete Gruppe konstruiert, bei der die Kommutatorgruppe mit der ganzen Gruppe übereinstimmt. Da sich nach einem Satz von Schilling [9, 10] zu jeder angeordneten Gruppe ein bewerteter Schiefkörper angeben läßt, dessen Wertegruppe die gegebene Gruppe ist, läßt sich auf diese Weise ein Beispiel dafür gewinnen, daß auch bei einer V-Topologie, die zu einer allgemeinen Bewertung äquivalent ist, die Kommutatorgruppe des Körpers nicht beschränkt zu sein braucht.

Auf die Folgerungen, die man aus der Theorie für den rationalen Zahlkörper gewinnt, wurde bereits in der Einleitung hingewiesen.

Literaturverzeichnis.

1. *N. Bourbaki*, Eléments de la mathématique, vol. 3, Topologie générale, Actualités scientifiques et industrielles, No. 916, Paris 1942.
2. *D. van Dantzig*, Zur topologischen Algebra I, Math. Ann. **107** (1933), S. 587—626.
3. *D. van Dantzig*, Zur topologischen Algebra II, Compositio math. **2** (1935), S. 201—223.
4. *I. Kaplansky*, Topological rings, Amer. J. Math. **69** (1947), S. 153—183.
5. *I. Kaplansky*, Topological methods in valuation theory, Duke Math. J. **14** (1947), S. 527—541.
6. *W. Krull*, Allgemeine Bewertungstheorie, Journ. f. r. u. angew. Math. **167** (1932), S. 160—196.
7. *B. H. Neumann*, On ordered groups, Amer. J. Math. **71** (1949), S. 1—18.

8. *A. Ostrowski*, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Mathem. Zeitschr. **39** (1934), S. 269—404.
9. *O. F. G. Schilling*, The theory of valuations, New York, Amer. Math. Soc. Publications (1950).
10. *O. F. G. Schilling*, Noncommutative valuations, Bull. of the Amer. Math. Soc. **51** (1945), S. 297—304.
11. *I. Šafarevič*, On the normalizability of topological fields, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) **40** (1943).
12. *B. L. v. d. Waerden*, Ein logarithmenfreier Beweis zum Dirichletschen Einheitensatz, Hamb. Math. Abh. **6** (1928), S. 259—262.
13. *D. Zelinsky*, Topological characterization of fields with valuation, Bull. of the Amer. Math. Soc. **54** (1948), S. 1145—1150.

Eingegangen 15. April 1952.

Zur topologischen Differentialgeometrie.

Freund Otto Haupt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von *W. Blaschke* in Hamburg.

Nehmen wir in einem Gebiet G der x, y-Ebene drei Kurvenscharen an:

$$u_j = u_j(x, y) = \text{fest}; \; j = 1, 2, 3 \tag{1}$$

und machen wir die folgenden Einschränkungen: Die $u_j(x, y)$ seien in G reelle analytische Funktionen der beiden reellen Veränderlichen x, y und ihre Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(u_j, u_k)}{\partial(x, y)}; \; j, k = 2, 3; 3, 1; 1, 2 \tag{2}$$

sollen in G nicht verschwinden. Ferner gehe durch jeden Punkt von G genau eine Kurve jeder der drei Scharen; zwei Kurven verschiedner Scharen sollen in G höchstens einen Punkt gemein haben. Schließlich sei G in bezug auf die Kurven unsrer Scharen (1) *konvex* in dem Sinne, daß jede Scharkurve, die G trifft, mit G nur einen einzigen Bogen gemein hat. Dann sprechen wir von einer *Wabe* W in G.

Aus den Gleichungen (1) folgt durch Entfernung von x, y eine Beziehung

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0 \tag{3}$$

als Bedingung von 3 Scharkurven durch einen Punkt. Wir nennen F die *Wabenfunktion* von W.

Von der Darstellung (1) von W gehen wir über zu der durch Pfaffsche Formen

$$\sigma_j = f_j(x, y)\, du_j = p_j dx + q\, dy. \tag{4}$$

Die Skalare f_j können wir so einrichten, daß

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \tag{5}$$

wird für alle Punkte x, y in G und alle Richtungen $dx : dy$. Dann sind die σ_j bis auf eine *Umnormung* durch einen gemeinsamen Faktor $g(x, y) \neq 0$

$$\sigma_j^* = \frac{\sigma_j}{g} \tag{6}$$

erklärt. Wir bilden nach H. Graßmann die alternierenden Produkte der σ und finden wegen (5)

$$[\sigma_2 \sigma_3] = [\sigma_3 \sigma_1] = [\sigma_1 \sigma_2] = \Omega. \tag{7}$$

Dieses „Flächenelement" benimmt sich bei der Umnormung (6) so:

$$\Omega^* = \frac{\Omega}{g^2}. \tag{8}$$

Nach E. Cartan bilden wir die *äußeren Differentiale* $d\sigma_j$ der Pfaffschen Formen σ_j, nämlich

$$d\sigma_j = \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} - \frac{\partial p_j}{\partial y}\right)[dx, dy] \tag{9}$$

und setzen

$$d\sigma_j = h_j \Omega. \tag{10}$$

Wegen (5) ist dann

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0. \tag{11}$$

Mittels dieser Skalare h_j setzen wir eine neue Pfaffsche Form γ zusammen, die man den *Zusammenhang* von W nennt:

$$\gamma = h_3\sigma_2 - h_2\sigma_3 = h_1\sigma_3 - h_3\sigma_1 = h_2\sigma_1 - h_1\sigma_2. \tag{12}$$

γ verhält sich bei der Umnormung (6) so:

$$\gamma^* = \gamma - d \lg g, \tag{13}$$

ändert sich somit um ein vollständiges Differential. Deshalb ist sein äußeres Differential invariant:

$$d\gamma = d\gamma^*. \tag{14}$$

Erklären wir die *Krümmung* k von W durch

$$d\gamma = k\Omega, \tag{15}$$

so wird

$$k^* = g^2 k; \tag{16}$$

also, wie man sagt: Die Wabenkrümmung k ist eine Invariante vom *Gewicht* 2.

Das identische Verschwinden von k

$$k = 0 \tag{17}$$

kennzeichnet die *Bienenwaben*, deren Wabenfunktion F auf die Gestalt

$$F = u_1 + u_2 + u_3 \tag{18}$$

gebracht werden kann, wie leicht erkennbar.

Wir führen jetzt *Wabenableitungen* t'_j eines Skalars t ein durch die Identitäten

$$dt = t'_3\sigma_2 - t'_2\sigma_3 = t'_1\sigma_3 - t'_3\sigma_1 = t'_2\sigma_1 - t'_1\sigma_2 \tag{19}$$

mit

$$t'_1 + t'_2 + t'_3 = 0. \tag{20}$$

Gleichwertig damit sind die Bedingungen

$$[dt, \sigma_j] = t'_j \Omega. \tag{21}$$

Aus der Erklärung (9) des äußeren Differentials folgt die Rechenvorschrift

$$d(f\sigma) = [df, \sigma] + f d\sigma. \tag{22}$$

Mit Hilfe von (22) ergibt sich aus (19)

$$t''_{jk} - t''_{kj} = h_j t'_k - h_k t'_j. \tag{23}$$

Erklärt man den Differentiator ∂'_j durch

$$\partial'_j t = t'_j, \tag{24}$$

so wird aus (23)

$$\partial'_k \partial'_j - \partial'_j \partial'_k = h_j \partial'_k - h_k \partial'_j. \tag{25}$$

Wir finden weiter für die „Krümmung“:

$$k = h'_{32} - h'_{23} = h'_{13} - h'_{31} = h'_{21} - h'_{12} \tag{26}$$

mit

$$h'_{jk} = \partial'_k h_j. \tag{27}$$

Nur im Fall einer Bienenwabe ist

$$h_j = \partial'_j h. \tag{28}$$

Die h_j kann man als Zeiger eines *Christoffelvektors* deuten.

Es ist nun zweckmäßig, *invariante Wabenableitungen einzuführen.* Sei $t(x, y)$ eine *Invariante vom Gewicht* p:

$$t^* = g^p t, \tag{29}$$

so wird

$$dt^* = g^p \left\{ dt + pt \frac{dg}{g} \right\}. \tag{30}$$

Setzen wir also

$$D = d + p\gamma, \tag{31}$$

so wird

$$Dt^* = g^p Dt.$$

Führen wir also ein

$$\begin{gathered} Dt = t_3\sigma_2 - t_2\sigma_3 = t_1\sigma_3 - t_1\sigma_3 = t_2\sigma_1 - t_1\sigma_2, \\ t_1 + t_2 + t_3 = 0, \\ t_j = \partial_j t, \end{gathered} \tag{32}$$

so wird

$$t_j^* = (p + 1)\, t_j, \tag{33}$$

das heißt: Die invariante Ableitung ∂_j läßt aus jeder Invariante vom Gewicht p eine vom Gewicht $p + 1$ entstehen. Nach E. Cartan zeigt man: Die Operatoren ∂_j lassen aus k ein *vollständiges Invariantensystem von* W entstehen: k_j; k_{rs}; k_{rst}; .... Darauf soll hier nicht eingegangen werden.

Wir wollen für den Augenblick die gewöhnlichen Teilableitungen

$$\frac{\partial}{\partial u_j} F = F_j \tag{34}$$

mit F_j bezeichnen; dann ist

$$F_1 du_1 + F_2 du_2 + F_3 du_3 = 0, \tag{35}$$

und wir können in Übereinstimmung mit (5)

$$\sigma_1 = F_1 du_1, \quad \sigma_2 = F_2 du_2, \quad \sigma_3 = F_3 du_3 \tag{36}$$

setzen. Für einen Skalar $f(u_1, u_2, u_3)$ wird dann

$$(37)\quad df = f_1 du_1 + f_2 du_2 - \frac{f_3}{F_3}(F_1 du_1 + F_2 du_2) = \left(\frac{f_1}{F_1} - \frac{f_3}{F_3}\right)\sigma_1 - \left(\frac{f_3}{F_3} - \frac{f_2}{F_2}\right)\sigma_2.$$

Nach (19) finden wir für die Wabenableitungen

$$(38)\qquad \partial_i' = \frac{1}{F_k}\frac{\partial}{\partial u_k} - \frac{1}{F_j}\frac{\partial}{\partial u_j};\quad i, j, k = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2$$

und für unser Flächenelement (7)

$$(39)\qquad \Omega = F_2 F_3 [du_2, du_3] = F_3 F_1 [du_3, du_1] = F_1 F_2 [du_1, du_2].$$

Deshalb folgern wir für den Christoffelvektor h_j von W

$$(40)\qquad h_1 = \frac{F_{31}}{F_3 F_1} - \frac{F_{12}}{F_1 F_2}$$

und reihum in 1, 2, 3 oder auch

$$(41)\qquad h_1 = \partial_1' \lg F_1.$$

Für den Zusammenhang γ von W folgt daraus

$$(42)\qquad \gamma = -\frac{F_{23}}{F_2 F_3} F_1 du_1 - \frac{F_{31}}{F_3 F_1} F_2 du_2 - \frac{F_{12}}{F_1 F_2} F_3 du_3$$

oder

$$(43)\qquad \gamma = \partial_2' \lg F_2 \cdot F_1 du_1 - \partial_1' \lg F_1 \cdot F_2 du_2$$

und reihum. Weiter ergibt sich die Wabenkrümmung

$$(44)\qquad k = \partial_1' \partial_2' \lg F_2 - \partial_2' \partial_1' \lg F_1$$

und reihum. Ausführlich wird

$$(45)\qquad k = A_{23} + A_{31} + A_{12},$$

wenn A_{jk} folgende Bedeutung hat:

$$(46)\qquad A_{jk} = \frac{F_{jjk}}{F_j^2 F_k} - \frac{F_{jkk}}{F_j F_k^2} + \frac{F_{jk}}{F_j F_k}\left(\frac{F_{kk}}{F_k^2} - \frac{F_{jj}}{F_j^2}\right)$$

mit

$$(47)\qquad A_{jk} + A_{kj} = 0.$$

Mit (46) läßt sich leicht ein Ergebnis von J. Dubourdieu von 1929 bestätigen. Sind nämlich in einem Gebiet G des x, y, z-Raumes drei Flächenscharen gegeben:

$$(48)\qquad u_j(x, y, z) = \text{fest};\ j = 0, 1, 2, 3,$$

so sprechen wir unter geeigneten Einschränkungen für die Funktionen u_j von einer *Flächenwabe*. Insbesondere werden wir die Funktionaldeterminanten dieser analytischen Funktionen als $\neq 0$ annehmen:

$$(49)\qquad \frac{\partial(u_i, \partial u_j, \partial u_k)}{\partial(x, y, z)} \neq 0;\quad (j-k)(k-i)(i-j) \neq 0.$$

Für die Krümmung der Waben W_j, die in den Flächen $u_j = \text{fest}$ von den 3 übrigen Flächenscharen ausgeschnitten werden, finden wir nach (45)

$$
(50)\qquad
\begin{aligned}
k_0 &= \ast + A_{23} + A_{31} + A_{12},\\
k_1 &= A_{32} \ast + A_{03} + A_{20},\\
k_2 &= A_{13} + A_{30} \ast + A_{01},\\
k_3 &= A_{21} + A_{02} + A_{10} \ast .
\end{aligned}
$$

Wegen (47) folgt somit

$$
(51)\qquad k_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 0.
$$

Darin ist das Ergebnis von Dubourdieu enthalten: Sind die Waben W_1, W_2, W_3 sämtlich Bienenwaben, so auch W_0.

Wegen der Schriften über Waben sei verwiesen auf das Buch: W. Blaschke und G. Bol, Geometrie der Gewebe, Berlin 1938.

Messina, im Frühling 1952.

Eingegangen 17. April 1952.

Eine Kennzeichnung lokal konvexer Kurven.

Herrn Otto Haupt zum 65. Geburtstage gewidmet.

Von *Hermann Künneth* in Erlangen.

---

1. Unter einer *Kurve* sei hier eine *stetige* Kurve, also das eindeutige, stetige Bild der Kreislinie K in der euklidischen Ebene E verstanden, unter einem *Bogen* bzw. einem *einfachen Bogen* das eindeutige bzw. eineindeutige, stetige Bild der abgeschlossenen Strecke s. Durch die Abbildung wird auf der Kurve oder dem Bogen eine bestimmte Orientierung hervorgerufen; die *Stellen* der Kurve (oder des Bogens) C sind zyklisch (bzw. linear) geordnet. Ist P eine Stelle von C, x das Urbild der Stelle P in K (bzw. s) und $U(x)$ eine Umgebung von x in K (bzw. s), so ist das Bild von $U(x)$ eine *Umgebung der Stelle P auf C*. Die im Sinne der Orientierung von C vor bzw. nach der Stelle P liegenden Punkte einer Umgebung der Stelle P auf C bilden eine *vordere* bzw. *hintere* Umgebung der Stelle P auf C. Fällt eine vordere mit einer hinteren Umgebung der Stelle P auf C zusammen, so werde P als *Nadelspitze* bezeichnet.

Ist $V(P)$ eine Umgebung des Punktes P in E, so ist die zusammenhängende, P enthaltende Komponente von $V(P) \frown C$ eine *Umgebung des Punktes P auf C*.

2. Die Kurve oder der Bogen C heißt *konvex*, wenn jede Gerade höchstens zwei Punkte mit C gemeinsam hat.

C heißt *in einer Stelle* bzw. *in einem Punkte P lokal konvex* bzw. *punktal konvex*, wenn es eine Umgebung der Stelle bzw. des Punktes P auf C gibt, die konvex ist.

C heißt *lokal konvex* bzw. *punktal konvex*, wenn C in jeder Stelle lokal konvex bzw. in jedem Punkte punktal konvex ist.

Eine Gerade g heißt *lokale Stützgerade* in einer Stelle P von C an C, wenn es eine Umgebung der Stelle P auf C gibt, die abgesehen von P ganz auf einer Seite von g liegt; enthält jede Umgebung der Stelle P auf C Punkte auf beiden Seiten von g, so ist g *lokale Schnittgerade* von C in P. Ersetzt man „Stelle" durch „Punkt", so erhält man *punktale Stützgerade* bzw. *Schnittgerade*.

3. *Folgerungen.* Unter C sei jetzt eine Kurve oder ein Bogen verstanden. Dann gilt:

1. Ist C punktal oder lokal konvex, so enthält C keinen in E offenen Kern und keine Strecke.

2. Ist C in einem Punkt P punktal konvex, so ist es in jeder mit P zusammenfallenden Stelle auch lokal konvex, ausgenommen, wenn P Nadelspitze ist.

3. Ist C punktal konvex, so ist es auch lokal konvex, ausgenommen, wenn C ein mehrfach durchlaufener einfacher Bogen ist. In letzterem Falle werde C als *Pseudokurve* bezeichnet.

4. Ist C lokal konvex, so hat C mit jeder Geraden g nur endlich viele Stellen gemeinsam; andernfalls gäbe es (mindestens) eine Stelle P auf C, die Häufungspunkt gemeinsamer Stellen von C und g wäre; C wäre in P nicht lokal konvex.

5. Ist C lokal konvex und ohne Verzweigungspunkt, so ist C auch punktal konvex.

6. Ist C lokal konvex, so ist es stückweise konvex, d. h. C ist Summe endlich vieler konvexer Bogen; andernfalls gäbe es eine Stelle P auf C mit nicht konvexer Umgebung wegen der Abgeschlossenheit von C. Eine lokal konvexe Kurve kann aber unendlich viele Verzweigungspunkte enthalten.

7. In jedem Punkt bzw. in jeder Stelle P, in dem C punktal bzw. lokal konvex ist, ist jede Paratingente in P bezüglich einer Umgebung des Punktes bzw. der Stelle P auf C punktale bzw. lokale Stützgerade in P an C. Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel: Schnabelspitze).

Beweis. Falls C in P punktal konvex ist, kann P nicht Verzweigungspunkt sein (s. Folgerung 8); man kann sich daher auf den Fall beschränken, daß C in P lokal konvex ist. t sei Paratingente in P bezüglich der Umgebung $U(P)$ und Schnittgerade von $U(P)$ in P. Ferner seien Q_1 und Q_2 zwei Punkte von $U(P)$, die durch t getrennt werden. Dann gibt es in genügender Nähe von t[1]) eine Gerade t', die mit $U(P)$ mindestens zwei Punkte gemein hat und die Q_1 und Q_2 trennt. t' muß daher mit $U(P)$ eine ungerade Anzahl, also mindestens drei Punkte gemein haben.

8. C sei stückweise konvex und P sei Stelle von C und gemeinsamer Endpunkt der konvexen Bogen C_1 und C_2. Das Kontingent in P an C_1 bzw. C_2 ist eine Halbgerade h_1 bzw. h_2 (die Halbtangente an C_1 bzw. C_2 in P). Die Trägergeraden von b_1 und b_2 seien g_1 und g_2.

1. Fall. g_1 oder g_2 ist lokale Schnittgerade von $C_1 + C_2$ in P. Dann ist C nach Folgerung 7 nicht lokal konvex in P, da P nicht Verzweigungspunkt von $C_1 + C_2$ ist.

2. Fall. g_1 und g_2 sind lokale Stützgerade an $C_1 + C_2$ in P.

α) h_1 fällt mit h_2 zusammen (P ist Schnabel- oder Nadelspitze). Dann gibt es in genügender Nähe von g_1[1]) eine von P ausgehende Halbgerade, die außer P bei gegebenem $U(P)$ mit $C_1 \cap U(P)$ und $C_2 \cap U(P)$ einen Punkt gemein, mit $U(P)$ also drei Punkte (bzw. Stellen) gemein hat. C ist nicht lokal konvex in P.

β) h_1 fällt nicht mit h_2 zusammen. Es gibt eine Umgebung $V(P)$ von P auf $C_1 + C_2$, so daß $V(P)$ abgesehen von P ganz auf einer Seite von g_1 und ganz auf einer Seite von g_2 liegt. $V(P)$ liegt also abgesehen von P ganz in dem offenen von h_1 und h_2 gebildeten Winkelraum ($\leqq \pi$).

Dann gibt es Punkte Q_1 und Q_2 auf C_1 bzw. C_2, so daß die von der Halbgeraden PQ_1 und h_1 und von der Halbgeraden PQ_2 und h_2 gebildeten offenen Winkelräume, welche die offenen Bogen PQ_1 bzw. PQ_2 enthalten, zueinander fremd sind, und jede den offenen Bogen PQ_1 in zwei Punkten treffende Gerade keinen gemeinsamen Punkt mit dem offenen Bogen PQ_2 besitzt und umgekehrt. C ist daher an der Stelle P lokal konvex.

Der offene durch P ergänzte von h_1 und h_2 gebildete Winkelraum, der $V(P)$ enthält, und sein Scheitelwinkelraum enthält die lokalen Schnittgeraden von $C_1 + C_2$ in P, das abgeschlossene Komplement zu diesen Winkelräumen enthält das Paratingent in P an die Umgebung der Stelle P auf C.

Es sei nun P ein Verzweigungspunkt von C, ferner seien C_1, C_2, C_3 drei in P endende Konvexbogen, h_i das Kontingent an C_i in P ($i = 1, 2, 3$), g_i die Trägergerade von h_i. Ist $h_i = h_k$ ($i \neq k$; $i, k = 1, 2, 3$), so liegt der Fall 1 oder 2,α) vor für den Bogen $C_i + C_k$. Sind alle drei Kontingente paarweise verschieden und liegt für keinen Bogen $C_i + C_k$ Fall 1 vor, so gibt es zwei z. B. von g_1 und g_2 gebildete offene Scheitelwinkelräume, die

[1]) D. h. t' liegt in einer genügend kleinen Umgebung von t im Raume der Geraden von E.

$C_1 + C_2$ in P schneidende Gerade enthalten, welche dem Paratingent in P an $C_1 + C_3$ oder $C_2 + C_3$ angehören, also schneidende Paratingenten im Punkt P an C sind. In jedem Falle ist daher ein Verzweigungspunkt nicht punktal konvex.

9. Ist C lokal konvex, so gehen aus einem Punkt S, der C nicht angehört, nur endlich viele lokale Stützgerade an C; das gilt auch für den Endpunkt S eines lokal konvexen Bogens C und die lokalen Stützgeraden aus S an den halboffenen Bogen $C - S$.

Beweis. Angenommen, der Satz wäre nicht richtig; dann hätten die auf den Stützgeraden durch S liegenden Stützstellen einen Häufungspunkt P auf C. Auch die Urbilder dieser Stützstellen auf K bzw. s hätten einen Häufungspunkt, dessen Bild eine (mit P inzidierende) Stelle P' wäre. In jeder Umgebung $U(P')$ der Stelle P' und zu jedem Winkel $\varepsilon > 0$ gäbe es drei Stützstellen auf lokalen Stützhalbgeraden g_1, g_2, g_3 aus S an $U(P')$, so daß die drei Stützhalbgeraden miteinander Winkel $< \varepsilon$ bildeten. Sind die drei Stützhalbgeraden voneinander verschieden und liegt z. B. g_2 in dem von g_1 und g_3 gebildeten Winkelraum $< \varepsilon$, so muß g_2 mit $U(P')$ außer der Stützstelle noch eine Stelle gemeinsam haben. Fallen zwei oder drei Stützhalbgerade zusammen, so muß eine, z. B. g_2, zwei Stützstellen enthalten. In allen Fällen gibt es in genügender Nähe von g_2 Gerade, die $U(P')$ in mindestens drei Stellen schneiden. C wäre in P' nicht lokal konvex. Eine lokal konvexe Kurve kann aber unendlich viele Verzweigungspunkte haben.

10. Enthält C mehrfache Punkte, so kann es nur dann punktal konvex sein, wenn jeder Punkt die gleiche endliche Vielfachheit hat (z. B. die n-fach durchlaufene Kreislinie) oder C Pseudokurve ist.

4. Die Zahl der aus einem Punkt S außerhalb C an C gehenden lokalen Stützgeraden heiße der *Index* $J(S)$ des Punktes S bezüglich C [2]).

$\Psi(S)$ sei die *Charakteristik* [3]) des Punktes S bezüglich der Kurve C.

5. Folgende Eigenschaften sind für punktal und lokal konvexe Kurven kennzeichnend.

Satz I. *Hat eine Kurve C, die nicht Pseudokurve ist, mit einer Geraden drei Punkte gemeinsam oder zwei und darunter einen Stützpunkt, so ist sie nicht punktal konvex.*

Die Umkehrung des Satzes folgt aus der Definition der punktal konvexen Kurve.

Satz II. *Ist C eine lokal konvexe Kurve, so ist für jeden zu C fremden Punkt S der Ebene die Zahl $J(S) + \frac{|\psi(S)|}{\pi}$ endlich und konstant (und gleich der Klasse der Kurve).*

6. *Vorbemerkungen* 1. C sei ein einfacher Bogen mit den Endpunkten P und Q. Die Gerade PQ habe mit C keine inneren Punkte gemeinsam. Dann bildet die Strecke PQ zusammen mit C eine Jordankurve J. Der Rest $E - J$ zerfällt in zwei Gebiete, von denen das beschränkte G als das *innere zu C gehörende Gebiet* bezeichnet werde.

2. Hat eine Gerade g mit einem Bogen C drei Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, die auf C und g in der gleichen Reihenfolge liegen, und ist der Bogen $P_1 P_3$ abgesehen von P_1, P_2, P_3 fremd zu g, so ist C nicht punktal konvex.

Enthält C einen Verzweigungspunkt, so ist C in diesem Punkt nach 3, Folgerung 8 nicht punktal konvex. Enthält C keinen Verzweigungspunkt, ist also C ein einfacher Bogen, so enthält nach dem Kontraktionssatz [4]) C einen lokal, also auch einen punktal nicht konvexen Punkt.

---

[2]) Liegen auf einer Geraden mehrere Stützstellen, so zählt die Gerade mit der entsprechenden Vielfachheit als lokale Stützgerade.

[3]) Ist P eine Stelle der Kurve C, so ist der Winkel, den die Halbgerade SP beschreibt, wenn P die Kurve C durchläuft, gleich der Charakteristik des Punktes P bezüglich C (s. z. B. *E. Schmidt*, Über den Jordanschen Kurvensatz, Sitzb. d. pr. Ak. d. W. 1925, S. 319).

[4]) *Haupt*, Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen. Monatsh. f. Math. u. Ph. **40** (1933), S. 29. Ordnungscharakteristiken sind hier die Geraden.

Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel: Teilbogen der Kurve, die aus zwei Kreisen mit innerer Berührung besteht).

7. *Beweis von Satz* I. C sei eine Kurve, die nicht Pseudokurve ist, und habe mit einer Geraden g' entweder $n \geqq 3$ Punkte gemein oder zwei Punkte, wovon einer Stützpunkt ist. Wir wollen beweisen, daß C nicht punktal konvex ist. Enthält C Verzweigungspunkte, so ist es nicht punktal konvex. C enthalte also keine Verzweigungspunkte. Da es keine Pseudokurve ist, kann es dann auch keine Nadelspitze enthalten. Ist C eine mehrfach durchlaufene Kurve C', so ersetzen wir C durch C'. Auch C' hat dann n Punkte mit g gemein. Wir können also annehmen, C habe keine mehrfachen Punkte. Wenn C punktal konvex ist, ist es infolgedessen auch lokal konvex und umgekehrt.

8. Hat g' mit C entweder n Punkte gemein ($n \geqq 3$) oder zwei und darunter einen Stützpunkt, so gibt es auch eine Gerade g, die mit C nur Schnittpunkte und zwar mindestens n bzw. 3 gemein hat. Ihre Zahl m kann als endlich angenommen werden (**3**, Folgerung 4). Die Schnittstellen nach ihrer Reihenfolge auf C seien $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_m$. Sind darunter drei aufeinanderfolgende P_{i-1}, P_i, P_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $m + 1 = 1$), so daß P_i auf der Geraden g zwischen P_{i-1} und P_{i+1} liegt, so enthält der einfache Teilbogen $P_{i-1}P_{i+1}$ nach dem Kontraktionssatz einen punktal nicht konvexen Punkt.

9. Es liege also kein Punkt P_i auf g zwischen P_{i-1} und P_{i+1} (Annahme A). Die Orientierung von C und die Numerierung der Schnittpunkte sei so gewählt, daß P_3 zwischen P_1 und P_2 liegt. Die offenen Teilbogen $C_1 = P_1P_2$ und $C_2 = P_2P_3$ ebenso wie die zu C_1 und C_2 gehörenden inneren Gebiete G_1 und G_2 liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden g. Der Bogen $C - (C_1 + C_2)$ enthält Punkte innerhalb und außerhalb G_1; er muß daher, da C ohne Verzweigungspunkte ist, Schnittpunkte mit der Strecke P_1P_2 enthalten. P_4 sei der nächste Schnittpunkt nach P_3 auf C. Dann muß P_4 wegen der Annahme A zwischen P_2 und P_3 liegen. Der Teilbogen $C - (C_1 + C_2 + C_3)$ enthält daher Punkte innerhalb und außerhalb des zu C_2 gehörenden inneren Gebietes, also Schnittpunkte mit der Strecke P_2P_3, und zwar liegt P_5 zwischen P_3 und P_4 wegen Annahme A. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise erhielte man eine unendliche Folge von Schnittpunkten mit g, wobei immer P_{i+1} zwischen P_{i-1} und P_i liegt. Da die Anzahl der Schnittpunkte nur endlich ist, kann die Annahme A nicht zutreffen. C kann nicht punktal konvex sein.

10. *Beweis von Satz* II. S sei ein beliebiger zu C fremder Punkt. Den Punkten und Stellen von C sind eindeutig von S ausgehende Halbgeraden zugeordnet. Diese Zuordnung ist stetig. Die lokalen Stützhalbgeraden $s_1, s_2, \ldots, s_m$ von S an C seien zyklisch geordnet entsprechend der Orientierung von C; dabei kann $s_i = s_k$ sein auch für $i \neq k$. Ihre Zahl ist endlich (**3**, Folgerung 9).

Durchläuft der Punkt P die Kurve C, so dreht sich die zugeordnete Halbgerade stetig und zwar von s_i bis s_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $m + 1 = 1$) im gleichen Drehungssinn und von s_{i+1} bis s_{i+2} im entgegengesetzten Sinn wie von s_i bis s_{i+1}.

C ist durch die Stützstellen B_i der lokalen Stützhalbgeraden s_i in m Teilbogen $C_i = B_iB_{i+1}$ geteilt. je nach dem Drehungssinn der zugeordneten Halbstrahlen lassen sie sich in rechtsdrehende und linksdrehende Teilbogen einteilen, z. B. $C_1, C_3, \ldots, C_{m-1}$ rechtsdrehend und $C_2, C_4, \ldots, C_m$ linksdrehend. Daraus folgt, daß m geradzahlig ist.

11. Wenn die Drehung von s_i bis s_{i+1} kleiner oder gleich π ist, heißt C_i *Bogen erster Art.* Dann sind die Punkte von C_i umkehrbar eindeutig den Halbgeraden des von s_i und s_{i+1} gebildeten Winkelfeldes ($\leqq \pi$) zugeordnet. C_i enthält also keinen Verzweigungspunkt.

In Punkten, in denen C_i punktal konxex ist, ist C_i auch lokal konvex. Hätte C_i Schnittpunkte mit der Geraden B_iB_{i+1}, so wäre die Reihenfolge dieser Schnittpunkte einschließlich B_i und B_{i+1} die gleiche auf C_i wie auf der Geraden B_iB_{i+1}. Also enthielte C_i nach **6**, Vorbemerkung 2 einen punktal und daher auch lokal nicht konvexen Punkt. Der Bogen C_i liegt daher ganz auf einer Seite der Strecke B_iB_{i+1} und hat mit jeder Geraden, auch wegen **6**, Vorbemerkung 2, höchstens zwei gemeinsame Punkte, ist also konvex. Liegt C_i ganz im Dreieck SB_iB_{i+1}, so heißt C_i *konvex bezüglich* S, sonst *konkav bezüglich* S, auch dann, wenn S auf der Geraden B_iB_{i+1} und dann zwischen B_i und B_{i+1} liegt.

12. Ist die Drehung von s_i bis s_{i+1} größer als π, so heiße C_i *Bogen zweiter Art.* Ist s_i' die rückwärtige Verlängerung von s_i und $s_i + s_i' = t_i$, so wird C_i durch die Schnittpunkte mit t_i ebenfalls in konvexe Teilbogen zerlegt. Alle Bogen zweiter Art sind konkav bezüglich S.

13. Es seien jetzt C_{i-1} und C_i Bogen erster Art. Das Kontingent an C_{i-1} bzw. C_i in B_i ist eine Halbgerade h_{i-1}^i bzw. h_i^i; diese können nicht zusammenfallen und schließen einen Winkelraum $\leqq \pi$ ein, in dem eine genügend kleine Umgebung der Stelle B_i liegt (**3**, Folgerung 8). h_{i-1}^i hat mit C_{i-1}, h_i^i mit C_i keinen weiteren Punkt gemein. C_{i-1} bzw. C_i liegt also ganz in dem von h_{i-1}^i und der Halbgeraden B_iB_{i-1} bzw. von h_i^i und der Halbgeraden B_iB_{i+1} gebildeten Winkelraum W_{i-1}^i bzw. W_i^i ($\leqq \pi$). Diese offenen Winkelräume gehören ganz der einen durch t_i erzeugten Halbebene an. Der Drehungssinn bei der Überführung von h_{i-1}^i in B_iB_{i-1} im W_{i-1}^i ist entgegengesetzt zu dem bei der Überführung von h_i^i in B_iB_{i+1} in W_i^i. Daraus folgt: S kann nicht auf der Strecke $B_{i-1}B_i$ und auf der Strecke B_iB_{i+1} zugleich liegen, und zweitens: S und C_{i-1} (bzw. C_i) liegen auf derselben Seite der Geraden B_iB_{i-1} (bzw. B_iB_{i+1}), S und C_i (bzw. C_{i-1}) auf verschiedenen Seiten der Geraden B_iB_{i+1} (bzw. B_iB_{i-1}) oder S auf $B_{i+1}B_i$ (bzw. $B_{i-1}B_i$). Der eine Bogen ist konvex bezüglich S, der andere konkav bezüglich S.

14. Entsprechend der Orientierung von C unterscheiden wir weiterhin zwischen dem Anfangs- und Endpunkt des Bogens C_i oder eines sonstigen Teilbogens von C. Ist C_{i-1} ein Bogen zweiter Art, so enthält er einen konvexen in B endenden Teilbogen C_{i-1}'', dessen Anfangspunkt B_i'' auf s_i' liegt. Wäre C_i auch ein Bogen zweiter Art, so enthielte auch er einen konvexen Teilbogen C_i' mit dem Anfangspunkt B_i und dem Endpunkt B_i' auf s_i'. Dann läge s auf der Strecke B_iB_i'' und auf der Strecke B_iB_i'. Da für die Bogen C_{i-1}'' und C_i' dasselbe gilt wie für Bogen erster Art, können zwei aufeinanderfolgende Bogen C_{i-1} nicht beide zweiter Art sein.

Die Teilbogen C_i sind daher abwechselnd konvex bezüglich S und konkav bezüglich S. Alle rechtsdrehenden C_i sind daher konkav bezüglich S und alle linksdrehenden konvex bezüglich S oder umgekehrt.

15. Wir zeigen nun: *Auf einem C nicht treffenden Weg ändert sich $J(S)$ nicht.* Es genügt zu zeigen, daß $J(S) = J(S')$, wenn die Strecke SS' zu C fremd ist. Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte.

1. Hat die Gerade $SS' = g$ mit dem Bogen C_i einen oder mehrere Schnittpunkte, so sei der erste im Sinne der Orientierung von C mit D_i', der letzte mit D_i'' bezeichnet. Bei Bogen erster Art ist immer, wenn C_i von g geschnitten wird, $D_i' = D_i''$. Der Teilbogen $D_i''B_{i+1}$ sei mit C_i'', der Teilbogen B_iB_i' mit C_i' bezeichnet.

2. Wir behaupten: Jeder lokalen Stützhalbgeraden aus S' läßt sich eindeutig eine aus S' zuordnen. Ebenso läßt sich dann zeigen, von S' zu S übergehend, daß diese Zuordnung umkehrbar eindeutig ist. Die Gerade g teilt die Ebene in zwei Halbebenen, eine linke und eine rechte, wobei links und rechts von g bezogen sei auf die Richtung von S nach S'. Ebenso bezieht sich bei allen von S oder S' ausgehenden Halbgeraden *rechts*

und *links* von der Trägergeraden der Halbgeraden auf die von S bzw. S' ausgehende Richtung der Halbgeraden. Wir nehmen ferner an, daß alle rechtsdrehenden Teilbogen konkav bezüglich S, alle linksdrehenden konvex bezüglich S sind.

3. Wir zeigen: Der in der linken bzw. rechten Halbebene (bezügl. g) liegenden lokalen Stützhalbgeraden s_i aus S entspricht eine lokale Stützhalbgerade aus S', deren Stützstelle C_{i-1} (oder C''_{i-1}) bzw. C_i (oder C'_i) angehört. Jede in g liegende lokale Stützgerade aus S entspricht sich selbst.

4. s_i gehöre der linken Halbebene an. C_{i-1} (oder C''_{i-1}) sei konvex bezüglich S. Dann liegt C_{i-1} (oder C''_{i-1}) rechts von s_i. Liegen S und S' auf derselben Seite der Geraden B_iB_{i-1} (bzw. $B_iD''_{i-1}$), auf der dann auch C_{i-1} bzw. C''_{i-1} liegt, so hat die Halbgerade $S'B_i$ entweder mit C_{i-1} bzw. C''_{i-1} außer B_i keinen Punkt gemein; dann ist $S'B_i$ die s_i zugeordnete lokale Stützhalbgerade. Oder sie hat noch einen (und nur einen) weiteren Schnittpunkt F; dann gibt es aus S' an den (konvexen) Teilbogen FB_i von C_{i-1} bzw. C''_{i-1} eine lokale Stützhalbgerade, die s_i zugeordnet wird.

Liegen S und S' auf verschiedenen Seiten der Geraden $B_{i-1}B_i$ oder s' auf dieser Geraden — C_{i-1} muß ganz in der linken Halbebene liegen, da C die Strecke SS' nicht trifft — so hat die Halbgerade $S'B_{i-1}$ entweder noch einen Schnittpunkt F' mit C_i ($F' = B_i$, wenn S auf der Geraden B_iB_{i-1}); dann gibt es eine lokale Stützhalbgerade aus S' an den Teilbogen $B_{i-1}F'$, die s_i zugeordnet wird. Oder $S'B_{i-1}$ hat mit C_{i-1} außer B_{i-1} keinen Punkt gemein; dann ist $S'B_{i-1}$ lokale Stützhalbgerade, die s_i zugeordnet wird.

5. C_{i-1} sei nun konkav bezüglich S. Dann liegt C_{i-1} bzw. C''_{i-1} links von s_i und es wiederholen sich die Schlüsse; nur liegen jetzt C_{i-1} bzw. C''_{i-1} und S auf verschiedenen Seiten der Geraden B_iB_{i-1} bzw. $B_iD''_{i-1}$.

Es wäre jetzt nur noch zu untersuchen, ob es bei dieser Zuordnung möglich ist, daß die Halbgerade $S'B_i$ lokale Stützhalbgerade ist und sowohl s_{i+1} wie s_i zugeordnet wird. Das wäre dann der Fall, wenn S und S' auf verschiedenen Seiten der Geraden B_iB_{i+1} und auf derselben Seite der Geraden B_iB_{i-1} liegen würden (B_i kann nicht auf g liegen). $S'B_i$ wäre dann ebenso wie s_i lokale Stützgerade in B_i an C. Die Bogen C_{i-1} bzw. C''_{i-1} und C_i bzw. C'_i liegen dann ganz in einem der vier von den Geraden t_i und $S'B_i$ gebildeten Winkelräume; denn die von g verschiedene Trägergerade t_i von s_i kann ebenso wie die Gerade $S'B_i$ außer B_i keinen weiteren gemeinsamen Punkt haben mit diesen Bogen. Die Geraden $B_{i-1}B_i$ und B_iB_{i+1} bzw. $B_iD''_{i-1}$ bzw. $B_iD'_i$ trennen dann beide oder trennen beide nicht die Punkte S und S', womit man einen Widerspruch zu der Ausgangsannahme erhält.

6. In der rechten Halbebene bezüglich g läßt sich in entsprechender Weise der lokalen Stützhalbgeraden s_i aus S eine aus S' zuordnen, deren Stützstelle dem Bogen C_i bzw. C'_i angehört.

16. *Folgerungen.* g_1 sei die von S ausgehende Halbgerade von g, welche S' enthält, g_2 die, welche S' nicht enthält. Ist C_i bezüglich S konkav und wird C_i von g so geschnitten, daß D'_i oder D''_i auf g_1 liegt, so ist kein innerer Punkt von C'_i bzw. C''_i Stützstelle einer lokalen Stützgeraden aus S'; dasselbe ist der Fall, wenn C_i konvex bezüglich S ist und D'_i oder D'' auf g_2 liegen.

Ist C_i konvex bezüglich S und liegt D'_i auf g_1, so enthält der Bogen C'_i und C''_i eine Stützstelle einer lokalen Stützhalbgeraden aus S', der Bogen C_i also zwei Stützstellen, die gegeneinander konvergieren, wenn S' auf g gegen C rückt, und die zusammenfallen, wenn S' auf C_i zu liegen kommt; andernfalls gäbe es aus S' auf C_i lokale Stützgerade an C_i mit einer von S' verschiedenen Stützstelle, was nicht möglich ist, da C_i konvex ist.

Nach dem Überschreiten von C hat sich dann $J(S')$ um 2 vermindert, dafür $\frac{|\psi(S')|}{\pi}$ um 2 erhöht. Denn ist a die Anzahl der Schnittpunkte von g_1 mit C, die auf bezüglich S konkaven, e die Anzahl der Schnittpunkte von g_1 mit C, die auf bezüglich S konvexen Teilbogen von C liegen, so ist $\frac{|\psi(S)|}{\pi} = a - e$; beim Überschreiten von dem bezüglich S konvexen C_i wird C_i konkav bezüglich S. Umgekehrt treten nach Überschreiten eines bezüglich S konkaven Teilbogens von C zwei neue Stützstellen auf.

17. *Beweis der Umkehrung von Satz* II. Ist C nicht lokal konvex, aber stückweise konvex, so gibt es nach **3**, Folgerung 8 auf C Punkte mit einer C schneidenden Tangente oder Schnabel- oder Nadelspitzen. Beim Überschreiten einer dieser C schneidenden Tangenten oder einer Tangente an eine Schnabel- oder Nadelspitze außerhalb des Berührungspunktes ändert sich der Index bezüglich C, aber nicht die Charakteristik bezüglich C.

Enthält C eine Strecke a, so ist der Index bezüglich C eines Punktes der Trägergeraden von a (die nicht lokale Stützgerade ist) verschieden von dem Index in benachbarten Punkten.

Ist C nicht stückweise konvex, streckenfrei, ohne Spitzen und ohne Punkte mit C schneidenden Tangenten, und ist S ein Punkt mit der Charakteristik 0 bezüglich C — das ist möglich, da C beschränkt ist — so liegen zwischen zwei auf C aufeinander folgenden Stützstellen von Stützhalbgeraden aus S wie beim Beweise von Satz II konvexe Bogen. Ihre Zahl $J(S)$ muß unendlich sein, da C nicht stückweise konvex ist.

Ist also C nicht lokal konvex, so ist $J(S) + \frac{|\psi(S)|}{\pi}$ nicht endlich oder nicht konstant.

Eingegangen 19. April 1952.

Eine Kennzeichnung des Systems aller nichtzerfallenden Kegelschnitte der projektiven Ebene.

Von *Walter Buckel* in Nördlingen.

Wir betrachten das System S aller nichtzerfallenden Kegelschnitte der projektiven Ebene. S ist ein System von Punktmengen des Π_2, das folgende Eigenschaften hat:

1) S enthält mindestens zwei verschiedene Elemente.
2) Jedes Element von S enthält mindestens drei verschiedene Punkte, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, und irgend zwei Punkte ein und desselben Elements lassen sich stets durch ein Kurvenstück (topologisches Bild einer Strecke) verbinden, das ganz in diesem Element verläuft.
3) Zu fünf verschiedenen Punkten des Π_2, von denen keine drei auf ein und derselben Geraden liegen, gibt es stets mindestens ein, und zu fünf verschiedenen beliebigen Punkten des Π_2 stets nicht mehr als ein Element von S, das diese fünf Punkte enthält.
4) S geht durch jede projektive Transformation des Π_2 in sich selbst über.

Wir behaupten: *Die Eigenschaften* 1) *bis* 4) *sind für das System aller nichtzerfallenden Kegelschnitte unter allen Punktmengensystemen des* Π_2 *kennzeichnend.*

Beim Beweis dieser Behauptung werden wir uns in sehr weitem Umfang auf Ergebnisse einer vorangegangenen Arbeit[1]) berufen. Diese Arbeit soll im folgenden kurz mit K zitiert werden.

Zum Beweise denken wir uns den Π_2 realisiert durch die in bekannter Weise durch eine unendlich ferne Gerade ergänzte euklidische Ebene. Wir führen den Beweis in drei Schritten:

1. Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) bis 4) enthält jeden Kreis mit nichtverschwindendem endlichen Radius als Element.

2. Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) bis 4) enthält jeden nichtzerfallenden Kegelschnitt als Element.

3. Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) bis 4) enthält darüber hinaus keine weiteren Elemente.

1. Den Beweis für die Behauptung des ersten Schrittes führen wir in zwei Teilen:

1. 1. Jeder Kreis mit nichtverschwindendem endlichen Radius ist eine Teilmenge von genau einem Element A von S.

1. 2. Außer den Punkten dieses Kreises enthält das Element A von S keine weiteren Punkte.

1. 1. Es sei K ein beliebiger Kreis des E_2 mit nichtverschwindendem endlichen Radius. Wir zeigen: K ist Teilmenge von genau einem Element A von S. Der Mittelpunkt

[1]) *W. Buckel*, Eine Kennzeichnung des Systems aller Kreise mit nichtverschwindendem Radius der euklidischen Ebene, dies. Journal **191** (1953).

von K heiße M, der Radius r. Die fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 seien die Ecken eines dem Kreise K einbeschriebenen regulären Fünfecks. Es gibt also unter diesen fünf Punkten keine drei, die auf ein und derselben Geraden liegen. Nach Eigenschaft 3) gibt es daher genau ein Element aus S, das diese fünf Punkte enthält. Dieses heiße A.

1. 1. 1. Wir benötigen im folgenden einige Eigenschaften von A.

1. 1. 1. 1. Eine Drehung des E_2 um einen festen Punkt läßt sich in eindeutiger Weise zu einer projektiven Transformation des ganzen Π_2 auf sich selbst erweitern. Wir wollen auch für diese Transformation das Wort *Drehung* gebrauchen. Eine Drehung um den Punkt M bezeichnen wir mit dem Buchstaben D. Nun setzen wir im E_2 einen positiven Drehsinn fest und bezeichnen speziell die Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{5}$ um den Punkt M mit D'. Die Bezeichnung der fünf Punkte P_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4, 5$) sei so gewählt, daß $D'(P_\mu) = P_{\mu+1}$ für $\mu = 1, 2, 3, 4$ und $D'(P_5) = P_1$ ist. Übt man die Drehung D' auf die Punktmenge A aus, so bekommt man die Punktmenge $D'(A)$. Da D' eine projektive Transformation ist, ist $D'(A)$ nach Eigenschaft 4) ebenfalls ein Element von S. Und $D'(A)$ enthält die fünf Punkte $D'(P_\mu)$. Nun ist aber die Menge der Punkte $D'(P_\mu)$ mit der Menge der Punkte P_μ identisch. Letztere bestimmt das Element A von S. Daraus folgt: $D'(A) = A$.

1. 1. 1. 2. Wir benutzen die Gleichung $D'(A) = A$, um zu beweisen, daß A keinen unendlich fernen Punkt enthalten kann. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, A enthielte einen unendlich fernen Punkt U_1. Wegen $D'(A) = A$ liegen auch die unendlich fernen Punkte $D'^{\mu-1}(U_1) = U_\mu$ ($\mu = 2, 3, 4, 5$) in A. Eine Parallelverschiebung des E_2 läßt sich in eindeutiger Weise zu einer projektiven Transformation des ganzen Π_2 auf sich selbst erweitern. Wir wollen auch für diese Tranformation das Wort *Parallelverschiebung* gebrauchen. Bei einer Parallelverschiebung bleibt jeder Punkt der unendlich fernen Geraden invariant. Insbesondere gilt also für eine Parallelverschiebung V stets $V(U_\mu) = U_\mu$; $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$. Übt man V auf die Punktmenge A aus, so bekommt man die Punktmenge $V(A)$. Da V eine projektive Transformation ist, ist $V(A)$ nach Eigenschaft 4) ebenfalls ein Element von S. Aber $V(A)$ und A haben die fünf verschiedenen Punkte U_μ gemeinsam. Daraus folgt nach Eigenschaft 3): $V(A) = A$.

Nun können wir zeigen: *A enthält jeden Punkt des E_2.* Es sei Q ein beliebiger Punkt des E_2. Dann gibt es eine Parallelverschiebung V, für die $V(P_1) = Q$ gilt. Da P_1 ein Punkt von A ist, folgt aus $V(A) = A$, daß auch Q ein Punkt von A ist.

Weiter können wir zeigen: *A enthält jeden Punkt der unendlich fernen Geraden.* Daraus, daß A den ganzen E_2 enthält, folgt mittels der Eigenschaften 3) und 4) leicht, daß A bei jeder Drehung um den Punkt M in sich selbst übergeht. Nun sei U ein beliebiger Punkt der unendlich fernen Geraden. Dann gibt es mindestens eine Drehung D um den Punkt M, für die $D(U_1) = U$ gilt. Da U_1 ein Punkt von A ist, folgt aus $D(A) = A$, daß auch U ein Punkt von A ist. Damit ist gezeigt, daß A alle Punkte des Π_2 enthält.

Schließlich zeigen wir: *A ist das einzige Element von S.* Wir nehmen an, es gebe in S wenigstens noch ein weiteres von A verschiedenes Element A'. Nach Eigenschaft 2) enthält A' mindestens zwei verschiedene Punkte und ein Kurvenstück, das diese beiden Punkte verbindet, also sicher fünf verschiedene Punkte. Da A alle Punkte des Π_2 enthält, sind diese fünf Punkte fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A' und A. Daraus folgt $A' = A$ nach Eigenschaft 3), womit ein Widerspruch aufgezeigt ist. Also ist A das einzige Element von S.

Dieses Ergebnis steht aber im Widerspruch zu Eigenschaft 1). Also kann das Element A keinen unendlich fernen Punkt enthalten.

1. 1. 2. Nach Eigenschaft 2) gibt es ein ganz in A und damit ganz im E_2 verlaufendes Kurvenstück, das die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindet. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Es gibt ein die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindendes, ganz in A und damit ganz im E_2 verlaufendes Kurvenstück, das den Mittelpunkt M von K nicht enthält.

II. Jedes die beiden Punkte P_1 und P_2 verbindende, ganz in A und damit ganz im E_2 verlaufende Kurvenstück enthält den Mittelpunkt M von K.

1. 1. 3. Man kann im Fall I den Beweis dafür, daß K ganz in A enthalten ist, in vollkommener Analogie zu der Durchführung des entsprechenden Beweises in K **1. 1.** 3 erbringen. Es ist daher unnötig, diesen Beweis hier durchzuführen.

1. 1. 4. Wir kommen zu Fall II. Wir werden zeigen, daß dieser Fall gar nicht eintreten kann. Dazu benötigen wir unter anderem den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 2. *Sind P_1 und P_2 zwei Punkte von A, die auf einem beliebigen Kreise k' mit dem Mittelpunkt M liegen, und gilt der Fall* II, *so enthält jedes die beiden Punkte P_1' und P_2' verbindende, ganz in A verlaufende Kurvenstück den Punkt M.*

Der Beweis dieses Hilfssatzes verläuft in vollkommener Analogie zum Beweis des entsprechenden Hilfssatzes in K **1. 1.** 4. Es ist daher unnötig, diesen Beweis hier durchzuführen.

1. 1. 4. 1. Nun führen wir den Beweis dafür, daß der Fall II gar nicht eintreten kann, indirekt und nehmen an, der Tatbestand des Falles II sei gegeben. Dann enthält ein ganz in A verlaufendes, die Punkte P_1 und P_2 verbindendes Kurvenstück, das wir betrachten wollen, den Punkt M. Das abgeschlossene Teilkurvenstück davon, das P_1 und M verbindet, bezeichnen wir mit C_1. Wir setzen $D'^{\mu-1}(C_1) = C_\mu$, für $\mu = 2, 3, 4, 5$. Die Kurve C_μ verbindet M und P_μ. Da C_1 ganz in A verläuft, verlaufen wegen $D'(A) = A$ auch C_2, C_3, C_4, C_5 ganz in A. Mittels Hilfssatz 2 ergibt sich analog zu K **1. 1.** 4. 1 leicht, daß jede der fünf Kurven C_μ einen jeden Kreis mit dem Mittelpunkt M in höchstens einem Punkt treffen kann und daraus dann, daß irgend zwei der fünf Kurvenstücke C_μ außer M keinen gemeinsamen Punkt haben.

Nun betrachten wir den Kreis um M mit dem Radius $\varrho = \frac{r}{5}$. Er heiße k. Mit k hat C_1 genau einen Punkt gemein. Dieser heiße Q_1. Ebenso hat C_3 mit k genau einen Punkt gemein. Dieser heiße Q_3. Da nun $D'^2(Q_1)$ sowohl auf k als auch auf $D'^2(C_1) = C_3$ liegt, so ist $D'^2(Q_1) = Q_3$. Die drei Punkte Q_1, M, Q_3 bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze M und einem Winkel von 144^0 an der Spitze. Die Vereinigungsmenge aus dem abgeschlossenen Teilkurvenstück von C_1, das Q_1 und M verbindet, und dem abgeschlossenen Teilkurvenstück von C_3, das Q_3 und M verbindet, ist ebenfalls ein Kurvenstück, da C_1 und C_3 außer M keinen gemeinsamen Punkt haben. Dieses Kurvenstück heiße C. Für alle Punkte P von C gilt $E(P, M) \leqq \varrho$, für alle inneren Punkte $E(P, M) < \varrho$. Dies folgt leicht daraus, daß sowohl C_1 als auch C_3 mit dem Kreis K nicht mehr als einen Punkt gemein haben kann.

1. 1. 4. 2. Nun sei S_3 ein beliebiger Punkt des zwischen Q_3 und M gelegenen bei M offenen, bei Q_3 abgeschlossenen Teilkurvenstücks C^* von C. Wir zeigen:

Der Kreis K *um S_3 mit dem Radius $E(Q_1, Q_3) = \frac{\varrho}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$* (Fig. 1) *hat mit C_1 wenigstens einen Punkt S_1 gemein.*

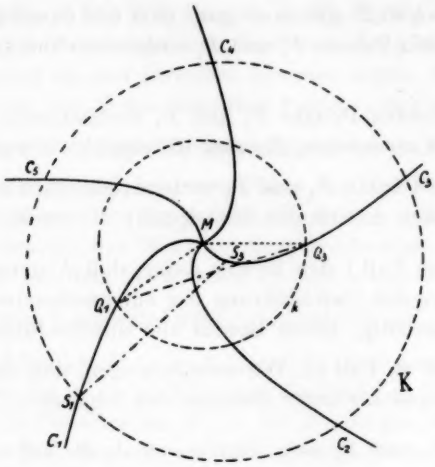


Fig. 1.

Beweis. Es sei P ein Punkt von K. Dann gilt

$$E(P, M) \leqq E(P, S_3) + E(S_3, M).$$

Es ist aber $E(P, S_3) = \frac{\varrho}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ und $E(M, S_3) \leqq \varrho$. Daraus folgt

$$E(P, M) < \varrho + 2\varrho = 3\varrho < r.$$

Also verläuft K ganz im Äußern von K und insbesondere liegt P_1 im Äußern von K. Andererseits gilt

$$E(M, S_3) \leqq \varrho < \frac{\varrho}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

also liegt M im Innern von K. Deshalb hat das Kurvenstück C_1, das M und P_1 verbindet, mit K wenigstens einen Punkt gemein. Ein solcher heiße S_1.

Es gibt genau zwei verschiedene Bewegungstransformationen (orthogonale Transformationen mit positiver Determinante) des E_2, durch die die Strecke Q_1Q_3 mit der Strecke S_1S_3 zur Deckung gebracht werden kann. Diese sollen B' und B'' heißen. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $B'(Q_1) = S_1$, $B'(Q_3) = S_3$ und $B''(Q_1) = S_3$, $B''(Q_3) = S_1$ gilt. Dann ist $B''B'^{-1}(S_1) = S_3$ und $B''B'^{-1}(S_3) = S_1$. Also ist $B''B'^{-1}$ eine Drehung um 180° um den Mittelpunkt der Strecke S_1S_3. Daraus folgt $B''B'^{-1} = B'B''^{-1}$.

1. 1. 4. 3. Wir zeigen:

Unter den beiden Bewegungen B' und B'' ist wenigstens eine, durch die das Element A von S in sich selbst übergeht.

Beweis. Wir überzeugen uns zunächst von der Richtigkeit der Behauptung für den Fall $S_3 = Q_3$. In diesem Falle ist sofort zu sehen, daß $B' = E$ und damit $B'(A) = E(A) = A$ ist.

Nun beschränken wir uns auf den Fall $S_3 \neq Q_3$. Wir betrachten die beiden Punktmengen $B'(A)$ und $B''(A)$. Da B' bzw. B'' eine Drehung um einen festen Punkt oder eine Parallelverschiebung ist, kann man B' bzw. B'' in eindeutiger Weise zu einer projektiven Transformation des Π_2 auf sich selbst ergänzen. Wir wollen unter B' bzw. B'' im folgenden diese ergänzten Transformationen verstehen. Man sieht nun, daß nach Eigenschaft 4) jede der beiden Punktmengen $B'(A)$ und $B''(A)$ ein Element von S ist. Jede der beiden hat mit A die beiden Punkte S_1 und S_3 gemein. Wir wollen zeigen, daß wenigstens eine der beiden mit A noch drei weitere unter sich und von S_1 und S_3 verschiedene Punkte,

insgesamt also mit A wenigstens fünf verschiedene Punkte gemein hat, und damit nach Eigenschaft 3) mit A identisch ist.

Dazu betrachten wir die Kurvenstücke $B'(C)$ und $B''(C)$. Wegen $C < A$ gilt $B'(C) < B'(A)$ und $B''(C) < B''(A)$. Wir bilden die Vereinigungsmenge $V = B'(C) \dotplus B''(C)$. Es gilt

$$B''B'^{-1}(V) = B''B'^{-1}B'(C) \dotplus B''B'^{-1}B''(C) = B''(C) \dotplus B'B''^{-1}B''(C) = B''(C) \dotplus B'(C) = V.$$

Außerdem ist V ein stetiges Bild eines Kreises.

Wir betrachten die gegenseitige Lage von V und K. Für alle Punkte P von C ist $E(P, M) \leqq \varrho$. Also gilt für alle Punkte P' von $B'(C)$

$$E(P', B'(M)) \leqq \varrho.$$

Weiter gilt

$$E(B'(M), S_3) \leqq \varrho \text{ und } E(M, S_3) < \varrho.$$

Daraus folgt

$$E(P', M) \leqq E(P', B'(M)) + E(B'(M), S_3) + E(S_3, M) < \varrho + \varrho + \varrho = 3\varrho < r.$$

Entsprechend gilt für alle Punkte P'' von $B''(C)$

$$E(P'', M) < 3\varrho < r.$$

Das stetige Kreisbild V verläuft ganz im Innern des Kreises um M mit dem Radius 3ϱ, also auch ganz im Innern von K.

Wir betrachten die gegenseitige Lage von V und $B'(K) = K'$. Ist P ein Punkt von V, der zu $B'(C)$ gehört, so gilt $E(P, B'(M)) \leqq \varrho$. Ist P ein Punkt von V, der zu $B''(C)$ gehört, so gilt

$$E(P, B'(M)) \leqq E(P, B''(M)) + E(B''(M), S_3) + E(S_3, B'(M)) \leqq \varrho + \varrho + \varrho = 3\varrho.$$

Also gilt für alle Punkte P von V

$$E(P, B'(M)) \leqq 3\varrho < r.$$

V verläuft also ganz im Innern von K'.

Wir betrachten die gegenseitige Lage von V und $B''(K) = K''$. Da V ganz im Innern von $B'(K)$ liegt, so liegt $B''B'^{-1}(V)$ ganz im Innern von $B''B'^{-1}B'(K) = B''(K)$. Wegen $B''B'^{-1}(V) = V$ folgt daraus, daß V ganz im Innern von $B''(K)$ verläuft.

Nun betrachten wir das abgeschlossene Teilkurvenstück von C_1, das S_1 und M verbindet, und das abgeschlossene Teilkurvenstück von C_3, das S_3 und M verbindet. Die Vereinigungsmenge dieser beiden Teilkurvenstücke ist ebenfalls ein Kurvenstück, da C_1 und C_3 außer M keinen gemeinsamen Punkt haben, und heiße v.

Wir betrachten die gegenseitige Lage von v und K. Für den einen Endpunkt S_1 von v gilt, da S_1 ein Punkt des Kreises K ist, $E(M, S_1) < 3\varrho$. Da C_1 jeden Kreis um M höchstens einmal schneidet, so gilt für alle Punkte P von v, die zu C_1 gehören, $E(P, M) < 3\varrho$. Für den anderen Endpunkt S_3 gilt $E(M, S_3) < \varrho$, und damit, da auch C_3 jeden Kreis um M höchstens einmal schneidet, für alle Punkte P von v, die zu C_3 gehören: $E(P, M) < \varrho$. Für alle Punkte P von v ist daher $E(P, M) < 3\varrho$. Also verläuft v ganz im Innern von K.

Wir betrachten die gegenseitige Lage von v und $B'(K)$. Ist P ein Punkt von v, so gilt

$$E(P, B'(M)) \leqq E(P, M) + E(M, S_3) + E(S_3, B'(M)) < 3\varrho + \varrho + \varrho = 5\varrho = r.$$

Also verläuft v ganz im Innern von $B'(K)$.

Wir betrachten die gegenseitige Lage von v und $B''(K)$. Ist P ein Punkt von v, so gilt

$$E(P, B''(M)) \leqq E(P, M) + E(M, S_3) + E(S_3, B''(M)) < 3\varrho + \varrho + \varrho = 5\varrho.$$

Also verläuft v ganz im Innern von $B''(K)$.

Hinsichtlich des gegenseitigen Verhaltens von V und v unterscheiden wir zwei Möglichkeiten:

a) V und v haben außer S_1 und S_3 noch mindestens einen weiteren Punkt gemein.

b) V und v haben außer S_1 und S_3 keinen weiteren Punkt gemein.

Zu a): Ein dritter gemeinsamer Punkt von V und v heiße T_1. Zunächst sei $T_1 \in B'(C)$. Wir nehmen an, es sei $T_1 \neq M$. Derjenige der beiden Punkte S_1, S_3, der auf v auf derselben Seite von T_1 liegt wie M, heiße S' (Fig. 2). Dann liegt M zwischen T_1 und S', also T_1 auf

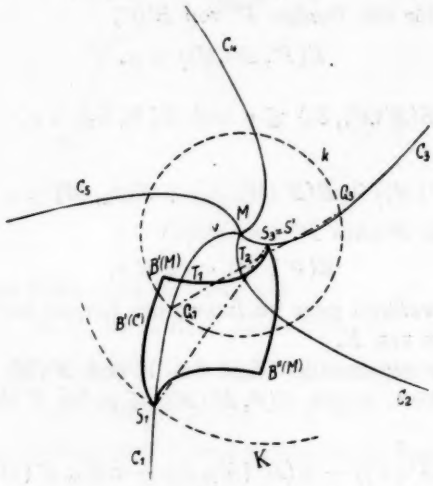


Fig. 2.

dem einen, S' auf dem anderen der beiden Kurvenstücke C_1, C_3. Das Teilkurvenstück von $B'(C)$, das T_1 und S' verbindet, verläuft als Teilmenge von V ganz im Innern von K und hat daher mit $C_2 \dotplus C_4$ wenigstens einen Punkt T_2 gemein. Als Punkt von $C_2 \dotplus C_4$ ist T_2 von S_1, S_3, T_1 verschieden, da diese drei Punkte auf $C_1 \dotplus C_3$ liegen und von M verschieden sind.

Nun nehmen wir an, es sei $T_1 \neq B'(M)$. Derjenige der beiden Punkte S_1, S_3, der auf $B'(C)$ auf derselben Seite von T_1 liegt wie $B'(M)$, heiße S''. Dann liegt $B'(M)$ zwischen T_1 und S'', also T_1 auf dem einen, S'' auf dem anderen der beiden Kurvenstücke $B'(C_1)$, $B'(C_3)$. Das Teilkurvenstück von v, das T_1 und S'' verbindet, verläuft ganz im Innern von $B'(K)$ und hat daher mit $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$ wenigstens einen Punkt T_3 gemein. Als Punkt von $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$ ist T_3 von S_1, S_3, T_1 verschieden, da diese Punkte auf $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$ liegen und von $B'(M)$ verschieden sind.

Nun ist $B'(M)$ von M verschieden. Wäre nämlich $B'(M) = M$, so wäre

$$E(M, S_3) = E(B'(M), S_3) = E(M, Q_3).$$

Also wäre S_3 neben Q_3 ein weiterer Punkt von C_3, der auf dem Kreis k um M liegt im Widerspruch zu Hilfssatz 2.

Demnach haben wir hinsichtlich der Lage des Punktes T_1 mit drei Möglichkeiten zu rechnen:

aa) T_1 ist von M und von $B'(M)$ verschieden.

ab) T_1 ist gleich M und damit von $B'(M)$ verschieden.

ac) T_1 ist gleich $B'(M)$ und damit von M verschieden.

Zu aa): Wegen $T_1 \neq M$ haben A und $B'(A)$ neben S_1, S_3, T_1 noch einen vierten, von diesen drei Punkten verschiedenen Punkt T_2 gemein. T_2 ist ein gemeinsamer Punkt von $B'(C)$ und $C_2 \dotplus C_4$. Wegen $T_1 \neq B'(M)$ haben aber A und $B'(A)$ noch einen von S_1, S_3, T_1 verschiedenen Punkt T_3 gemein. T_3 ist ein gemeinsamer Punkt von v und $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$. Es sind aber auch die beiden Punkte T_2 und T_3 verschieden. Wir nehmen an, es wäre $T_2 = T_3$. Da T_2 ein gemeinsamer Punkt von $B'(C)$ und $C_2 \dotplus C_4$, dagegen T_3 ein gemeinsamer Punkt von v und $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$ ist, so ist $T_2 = T_3$ ein gemeinsamer Punkt von $B'(C)$ und $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$ und damit gleich $B(M)$, und andererseits ein gemeinsamer Punkt von v und $C_2 \dotplus C_4$ und damit gleich M. Es wäre also $B'(M) = M$, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist. Also sind T_2 und T_3 von einander verschieden. Damit sind aber S_1, S_3, T_1, T_2, T_3 fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$. Daraus folgt aber $B'(A) = A$.

Zu ab): Wegen $T_1 \neq B'(M)$ haben A und $B'(A)$ neben S_1, S_3, T_1 noch einen vierten, von diesen drei Punkten verschiedenen Punkt T_3 gemein. T_3 ist ein gemeinsamer Punkt von v und $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$. Nun nehmen wir an, A und $B'(A)$ hätten außer S_1, S_3, T_1, T_3 keinen weiteren gemeinsamen Punkt. Dann gibt es eine Umgebung U des Punktes M im E_2 derart, daß alle Punkte des Durchschnittes $UC_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4, 5)$, die von M verschieden sind, auf ein und derselben Seite von $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$ liegen. Ist $\mu_1 \neq \mu_2$, so teilt das Kurvenstück $C_{\mu_1} \dotplus C_{\mu_2}$ die nicht auf ihm liegenden Punkte der abgeschlossenen Kreisscheibe K in zwei Klassen derart, daß jedes ganz auf dieser Kreisscheibe verlaufende stetige Bild einer Strecke, das zwei Punkte aus verschiedenen Klassen verbindet, mit $C_{\mu_1} \dotplus C_{\mu_2}$ wenigstens einen Punkt gemein hat. Diese beiden Klassen von Punkten nennen wir hier kurz die beiden *Seiten* von $C_{\mu_1} \dotplus C_{\mu_2}$. Entsprechendes gilt für $B'(C_{\mu_1}) \dotplus B'(C_{\mu_2})$ und $B'(K)$.) Gäbe es nämlich keine derartige Umgebung, so gäbe es in beliebiger Nähe von M stets mindestens einen von M verschiedenen Punkt T', der auf $B'(C_1) \dotplus B'(C_2)$ und zugleich auf einer der Kurven C_μ liegt. T' wäre also ein von M verschiedener gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$ und, wenn hinreichend nahe bei M gelegen, auch von S_1, S_3 und T_3 verschieden. Damit hätten aber A und $B'(A)$ fünf verschiedene gemeinsame Punkte, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist. Also gibt es eine Umgebung U von M im E_2 derart, daß jeder der fünf Durchschnitte UC_μ abgesehen vom Punkte $B'(M)$ ganz auf einer Seite von $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$ liegt.

Nun zeigen wir, daß nicht alle fünf Durchschnitte UC_μ auf ein und derselben Seite von $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$ liegen. Wir nehmen an, dies wäre der Fall. Wir betrachten die beiden abgeschlossenen Teilkurvenstücke zwischen M und S_1 auf C_1 bzw. $B'(C)$. Sie haben außer M und S_1 keinen weiteren gemeinsamen Punkt. Ein solcher wäre nämlich als Punkt von C_1 von S_3 und als Punkt von $B'(C)$ von T_3 verschieden, da T_3 ein Punkt von $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$ und von $B(M)$ verschieden ist. Er wäre damit ein fünfter gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist. Deshalb ist die Vereinigungsmenge dieser beiden abgeschlossenen Teilkurvenstücke eine Jordankurve I_1. Weiter betrachten wir die beiden abgeschlossenen Teilkurvenstücke zwischen M und S_3 auf C_3 bzw. $B'(C)$. Sie haben außer M und S_3 keinen weiteren gemeinsamen Punkt. Ein solcher wäre nämlich als Punkt von C_3 von S_1, und als Punkt von $B'(C)$ von T_3 verschieden. Er wäre damit ein fünfter gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist. Deshalb ist die Vereinigungsmenge dieser beiden Kurvenstücke ebenfalls eine Jordankurve, die I_2 heißen möge. Lägen nun alle fünf Durchschnitte UC_μ auf ein und derselben Seite von $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$, so läge wenigstens ein Punkt von C_4 im Innern von I_1 oder I_2. Da v und $B'(C)$ ganz im Innern von K verlaufen, so liegt P_4 im Äußern von I_1 und im Äußern von I_2. Deshalb hat C_4 mit I_1 oder I_2 wenigstens einen (von M verschiedenen) Punkt T gemein (Fig. 3). Da der einzige gemeinsame Punkt von

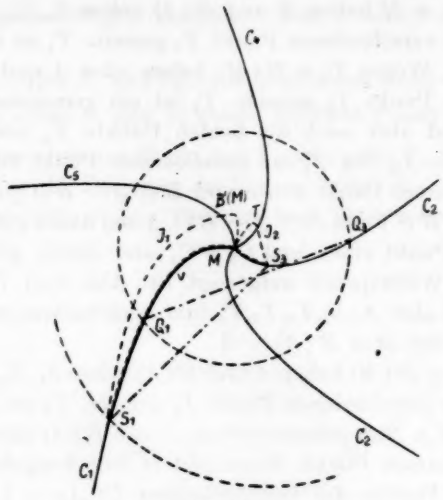


Fig. 3.

C_4 und $C_1 \dotplus C_3$ der Punkt M ist, so muß T ein Punkt von $B'(C)$ sein. T ist von M und als Punkt von C_4 auch von S_1, S_3 und T_3 verschieden. Damit wäre T ein fünfter gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist.

Es gibt aber eine Seite von $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$, auf der mindestens drei der Durchschnitte UC_μ liegen. Nun seien UC_{μ_1}, UC_{μ_2}, UC_{μ_3} drei Durchschnitte, die auf ein und derselben Seite von $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$ liegen, UC_{μ_4} einer, der auf der anderen Seite liegt. Wir betrachten einen beliebigen von M verschiedenen Punkt $\overline{M}$ von UC_{μ_4}. Wegen $E(M, S_3) < \varrho$ kann man $\overline{M}$ so nahe bei M wählen, daß auch $E(\overline{M}, S_3) < \varrho$ gilt. Auf C_3 gibt es genau einen Punkt S^*, für den $E(M, S^*) = E(\overline{M}, S_3)$ gilt.

Von den beiden Bewegungen, die die Strecke MS^* mit der Strecke $\overline{M}S_3$ zur Deckung bringen, sei $\bar{B}$ diejenige, für die $\bar{B}(S^*) = S_3$ und $\bar{B}(M) = \overline{M}$ ist. Man kann den Betrag von $\bar{B}$ beliebig klein machen, wenn man nur $\overline{M}$ hinreichend nahe bei M annimmt. (Der Betrag einer Bewegung des E_2 wird dabei definiert als der Abstand dieser Bewegung von der Einheitsbewegung E. Hinsichtlich der Definition des Abstands zweier Bewegungen des E_2 siehe K **1.** 1. 4. 6.). Wir betrachten die Punktmenge $\bar{B}(A)$. Ergänzt man die Bewegung $\bar{B}$ zu einer projektiven Abbildung des Π_2 auf sich selbst, so sieht man, daß $\bar{B}(A)$ nach Eigenschaft 4) ebenfalls ein Element von S ist. S_3 ist ein gemeinsamer Punkt von $B'(A)$ und $\bar{B}(A)$. Nun seien R_1 bzw. R_2 bzw. R_3 drei Punkte von UC_{μ_1} bzw. UC_{μ_2} bzw. UC_{μ_3}, die sämtlich im Innern von k liegen. Durch Wahl von $\overline{M}$ hinreichend nahe bei M kann erreicht werden, daß $\bar{B}(R_1)$, $\bar{B}(R_2)$, $\bar{B}(R_3)$ auf derselben Seite von $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$ bleiben, auf der R_1, R_2, R_3 liegen und daß außerdem $\bar{B}(k)$ ganz im Innern von K' bleibt. Dann liegen $\overline{M} = \bar{B}(M)$ einerseits und $\bar{B}(R_1)$, $\bar{B}(R_2)$, $\bar{B}(R_3)$ andererseits auf verschiedenen Seiten von $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$. Deshalb hat das $\overline{M}$ und $\bar{B}(R_1)$ verbindende Teilkurvenstück von $\bar{B}(C_{\mu_1})$, das ganz im Innern von $\bar{B}(k)$ und damit im Innern von K' verläuft, mit $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$ wenigstens einen gemeinsamen Punkt W_1. Entsprechend bekommt man die Punkte W_2 bzw. W_3 als gemeinsame Punkte von $\bar{B}(C_{\mu_2})$ bzw. $\bar{B}(C_{\mu_3})$ und $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$. Diese W_1, W_2, W_3 sind drei verschiedene gemeinsame Punkte von $B'(A)$ und $\bar{B}(A)$. Sie sind auch sämtlich von S_3 verschieden, wenn man nur R_1, R_2, R_3

hinreichend nahe bei M annimmt. Weiter liegt, wenn $\bar{B}$ hinreichend klein ist, $\bar{B}(S_1)$ auf derselben Seite von $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$ wie S_1 und es bleibt $\bar{B}(v)$ im Innern von K'. Also hat $\bar{B}(v)$ mit $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$ wenigstens einen Punkt $\bar{T}$ gemein. Als Punkt von $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$ ist $\bar{T}$ von den Punkten W_1, W_2, W_3 und S_3 verschieden, die sämtlich auf $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$ liegen und, wenn R_1, R_2, R_3 hinreichend nahe bei M gewählt werden, sämtlich von $B'(M)$ verschieden sind. Also sind die Punkte $S_3, W_1, W_2, W_3, \bar{T}$ fünf verschiedene gemeinsame Punkte von $B'(A)$ und $\bar{B}(A)$. Also gilt $B'(A) = \bar{B}(A)$.

Als Punkt von $\bar{B}(A)$ ist damit $\bar{M}$ auch ein Punkt von $B'(A)$. Doch ist $\bar{M}$ außerdem auch ein Punkt von A. Er ist also ein gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$. Zudem ist er von M und, wenn hinreichend nahe bei M gewählt, auch von S_1, S_3 und T_3 verschieden. Damit sind die Punkte $S_1, S_3, T_1 = M, T_3$ und $\bar{M}$ fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$. Also führt die Annahme A und $B'(A)$ hätten keine fünf verschiedenen gemeinsame Punkte auf einen Widerspruch.

Auch im Falle ab) gibt es daher stets mindestens fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$ und daraus folgt: $B'(A) = A$.

Zu ac): Wegen $T_1 \neq M$ haben A und $B'(A)$ neben S_1, S_3, T_1 noch einen vierten, von diesen drei Punkten verschiedenen Punkt T_2 gemein. T_2 ist ein gemeinsamer Punkt von $B'(C)$ und $C_2 \dotplus C_4$. Nun nehmen wir an, A und $B'(A)$ hätten außer S_1, S_3, T_1, T_2 keinen weiteren gemeinsamen Punkt. Dann gibt es eine Umgebung U des Punkts $B'(M)$ im E_2 derart, daß alle Punkte des Durchschnittes $UB'(C_\mu)$ ($\mu = 1, 2, 3, 4, 5$), die von M verschieden sind, auf ein und derselben Seite von $C_1 \dotplus C_3$ liegen. Gäbe es nämlich keine derartige Umgebung, so gäbe es in beliebiger Nähe von $B'(M)$ einen von $B'(M)$ verschiedenen Punkt T', der auf $C_1 \dotplus C_3$ und zugleich auf einer der Kurven $B'(C_\mu)$ liegt. T' wäre also ein von $B'(M)$ verschiedener gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$ und, wenn hinreichend nahe bei $B'(M)$ gelegen, auch von S_1, S_3 und T_2 verschieden. Damit hätten aber A und $B'(A)$ fünf verschiedene gemeinsame Punkte, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist. Also gibt es eine Umgebung U von $B'(M)$ im E_2 derart, daß jeder der fünf Durchschnitte $UB'(C_\mu)$ abgesehen vom Punkte $B'(M)$ ganz auf einer Seite von $C_1 \dotplus C_3$ liegt.

Nun zeigen wir, daß nicht alle fünf Durchschnitte $UB'(C_\mu)$ auf ein und derselben Seite von $C_1 \dotplus C_3$ liegen. Wir nehmen an, dies wäre der Fall. Wir betrachten die beiden abgeschlossenen Teilkurvenstücke zwischen $B'(M)$ und S_1 auf $B'(C_1)$ bzw. v. Sie haben außer $B'(M)$ und S_1 keinen weiteren gemeinsamen Punkt. Ein solcher wäre nämlich als Punkt von $B'(C_1)$ von S_3, und als Punkt von v von T_2 verschieden, da T_2 ein Punkt von $C_2 \dotplus C_4$ und von M verschieden ist. Er wäre damit ein fünfter gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist. Deshalb ist die Vereinigungsmenge dieser beiden abgeschlossenen Teilkurvenstücke eine Jordankurve I_1. Weiter betrachten wir die beiden abgeschlossenen Teilkurvenstücke zwischen $B'(M)$ und S_3 auf $B'(C_3)$ bzw. v. Sie haben außer $B'(M)$ und S_3 keinen weiteren gemeinsamen Punkt. Ein solcher wäre nämlich als Punkt von $B'(C_3)$ von S_1, und als Punkt von v von T_2 verschieden. Er wäre damit ein fünfter gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist. Deshalb ist die Vereinigungsmenge dieser beiden Kurvenstücke ebenfalls eine Jordankurve, die I_2 heißen möge. Lägen nun alle fünf Durchschnitte $UB'(C_\mu)$ auf ein und derselben Seite von $C_1 \dotplus C_3$, so läge wenigstens ein Punkt von $B'(C_4)$ im Innern von I_1 oder I_2. Da $B'(C)$ und v ganz im Innern von $B'(K)$ verlaufen, so liegt $B'(P_4)$ im Äußern von I_1 und im Äußern von I_2. Deshalb hat $B'(C_4)$ mit I_1 oder I_2 wenigstens einen (von $B'(M)$ verschiedenen) Punkt T gemein. Da der einzige gemeinsame Punkt von $B'(C_4)$ und $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$ der Punkt $B'(M)$ ist, so muß T ein Punkt von v sein. T ist von

$B'(M)$ und als Punkt von $B'(C_4)$ auch von S_1, S_3 und T_2 verschieden. Damit wäre T ein fünfter gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist.

Es gibt aber eine Seite von $C_1 \dotplus C_3$, auf der mindestens drei der Durchschnitte $UB'(C_\mu)$ liegen. Nun seien $UB'(C_{\mu_1})$, $UB'(C_{\mu_2})$, $UB'(C_{\mu_3})$ drei Durchschnitte, die auf ein und derselben Seite von $C_1 \dotplus C_3$ liegen, $UB'(C_{\mu_4})$ einer, der auf der anderen Seite liegt. Wir betrachten einen beliebigen, von $B'(M)$ verschiedenen Punkt $\overline{M}$ von $UB'(C_{\mu_4})$. Wegen $E(B'(M), S_3) = \varrho$ kann man $\overline{M}$ so nahe bei $B'(M)$ wählen, daß $E(\overline{M}, S_3) < r$ gilt. Auf $B'(C_3)$ gibt es genau einen Punkt S^*, für den $E(B'(M), S^*) = E(\overline{M}, S_3)$ gilt. Nunmehr sei von den beiden Bewegungen, die die Strecke $B'(M)\,S^*$ mit der Strecke $\overline{M}S_3$ zur Deckung bringen, $\overline{B}$ diejenige, für die $\overline{B}(S^*) = S_3$ und $\overline{B}(B'(M)) = M$ gilt. Man kann den Betrag von $\overline{B}$ beliebig klein machen, wenn man nur $\overline{M}$ hinreichend nahe bei $B'(M)$ annimmt. Wir betrachten die Punktmenge $\overline{B}(A)$. Ergänzt man die Bewegung $\overline{B}$ zu einer projektiven Abbildung des Π_2 auf sich selbst, so sieht man, daß $\overline{B}(A)$ nach Eigenschaft 4) ebenfalls ein Element von S ist. S_3 ist ein gemeinsamer Punkt von A und $\overline{B}(A)$. Nun seien R_1 bzw. R_2 bzw. R_3 drei Punkte von $UB'(C_{\mu_1})$ bzw. $UB'(C_{\mu_2})$ bzw. $UB'(C_{\mu_3})$, die sämtlich im Innern von $B'(k)$ liegen. Durch Wahl von $\overline{M}$ hinreichend nahe bei $B'(M)$ kann erreicht werden, daß $\overline{B}(R_1)$, $\overline{B}(R_2)$, $\overline{B}(R_3)$ auf derselben Seite von $C_1 \dotplus C_3$ bleiben, auf der R_1, R_2, R_3 liegen und daß außerdem $\overline{B}B'(k)$ ganz im Innern von K bleibt. Dann liegen $\overline{M} = \overline{B}(B'(M))$ einerseits und $\overline{B}(R_1)$, $\overline{B}(R_2)$, $\overline{B}(R_3)$ andererseits auf verschiedenen Seiten von $C_1 \dotplus C_3$. Deshalb hat das $\overline{M}$ und $\overline{B}(R_1)$ verbindende Teilkurvenstück von $\overline{B}B'(C_{\mu_1})$, das ganz im Innern von $\overline{B}B'(k)$ und damit im Innern von K verläuft, mit $C_1 \dotplus C_3$ wenigstens einen gemeinsamen Punkt W_1. Entsprechend bekommt man die Punkte W_2 bzw. W_3 als gemeinsame Punkte von $\overline{B}B'(C_{\mu_2})$ bzw. $\overline{B}B'(C_{\mu_3})$ und $C_1 \dotplus C_3$. Diese W_1, W_2, W_3 sind drei verschiedene gemeinsame Punkte von A und $\overline{B}(A)$. Sie sind auch sämtlich von S_3 verschieden, wenn man nur R_1, R_2, R_3 hinreichend nahe bei $B'(M)$ annimmt. Weiter liegt, wenn $\overline{B}$ hinreichend klein ist, $\overline{B}(S_1)$ auf derselben Seite von $C_2 \dotplus C_4$ wie S_1, und es bleibt $\overline{B}(B'(C))$ im Innern von K. Also hat $\overline{B}(B'(C))$ mit $C_2 \dotplus C_4$ wenigstens einen Punkt $\overline{T}$ gemein. Als Punkt von $C_2 \dotplus C_4$ ist $\overline{T}$ von den Punkten W_1, W_2, W_3 und S_3 verschieden, die sämtlich auf $C_1 \dotplus C_3$ liegen und, wenn R_1, R_2, R_3 hinreichend nahe bei $B'(M)$ gewählt werden, sämtlich von M verschieden sind. Also sind die Punkte S_3, W_1, W_2, W_3, $\overline{T}$ fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A und $\overline{B}(A)$. Also gilt: $A = \overline{B}(A)$.

Als Punkt von $\overline{B}(A)$ ist damit $\overline{M}$ auch ein Punkt von A. Doch ist M außerdem auch ein Punkt von $B'(A)$. Er ist also ein gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$. Zudem ist er von $B'(M)$ und, wenn hinreichend nahe bei $B'(M)$ gewählt, auch von S_1, S_3 und T_2 verschieden. Damit sind die Punkte S_1, S_3, $T_1 = B'(M)$, T_2 und $\overline{M}$ fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$. Also führt die Annahme, A und $B'(A)$ hätten keine fünf verschiedenen gemeinsamen Punkte, auf einen Widerspruch.

Auch im Falle ac) gibt es daher stets mindestens fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$ und daraus folgt: $B'(A) = A$.

Wir haben also folgendes Ergebnis: Ist der dritte gemeinsame Punkt, den V und v im Falle a) neben S_1 und S_3 noch haben, ein Punkt von $B'(C)$, so gilt: $B'(A) = A$.

Entsprechend beweist man: Ist der dritte gemeinsame Punkt, den V und v im Falle a) neben S_1 und S_3 noch haben, ein Punkt von $B''(C)$, so gilt: $B''(A) = A$.

Damit ist der Fall a) erledigt.

Zu b): Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

ba) Alle von S_1 und S_3 verschiedenen Punkte von v liegen im Innern von V.

bb) Alle von S_1 und S_3 verschiedenen Punkte von v liegen im Äußern von V.

(Zum Begriff des Innern bzw. Äußern eines stetigen Bildes eines Kreises siehe K 1.1.1.)

Zu ba): Ein von S_1 und S_2 verschiedener Punkt von v ist auch der Punkt M. Dies M liegt daher im Innern von V (Fig. 4). V verläuft im Innern von K, also liegt K im Äußern von V. Als Punkte von K liegen daher insbesondere die Punkte P_2, P_4, P_5 im Äußern von V. Das Kurvenstück C_2, das die beiden Punkte M und P_2 verbindet, hat daher mit V

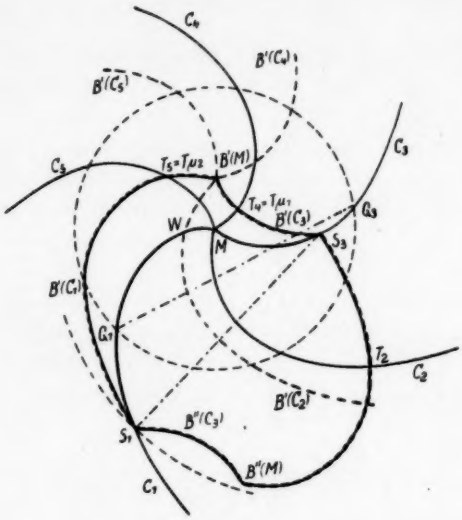


Fig. 4.

mindestens einen Punkt T_2 gemein. T_2 ist von M verschieden und damit als Punkt von C_2 kein Punkt von $C_1 \dotplus C_3$, also auch von S_1 und von S_3 verschieden. Auf entsprechende Weise bekommt man einen gemeinsamen Punkt T_4 von C_4 und V und einen gemeinsamen Punkt T_5 von C_5 und V, für die Entsprechendes gilt. Die drei Punkte T_2, T_4, T_5 sind drei verschiedene Punkte, da sie sämtlich von M verschieden sind und auf C_2 bzw. C_4 bzw. C_5 liegen.

Nun gibt es unter den Summanden $B'(C)$ und $B''(C)$ von V mindestens einen, auf dem mindestens zwei Punkte T_{μ_1} und T_{μ_2} der drei Punkte T_2, T_4, T_5 liegen. Wir nehmen zunächst an, dies sei bei $B'(C)$ der Fall. Dann sind S_1, S_3, T_{μ_1}, T_{μ_2} vier verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$.

Nun betrachten wir die beiden Punkte S_1 und S_3. Als von $B'(M)$ verschiedene Punkte von $B'(C_1)$ bzw. $B'(C_3)$ liegen sie auf verschiedenen Seiten von $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$. Das sie verbindende Kurvenstück v verläuft ganz im Innern von K' und hat daher mit $B'(C_2) \dotplus B'(C_4)$ mindestens einen Punkt W gemein. W ist ein gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$. Als Punkt von v ist W von $B'(M)$ verschieden, da v und $B'(C)$ außer S_1 und S_3 keinen gemeinsamen Punkt haben. Als von $B'(M)$ verschiedener Punkt von $B'(C_2) \dotplus B'(C_{\mu_4})$ ist W von S_1 und von S_3 verschieden und ebenso von T_{μ_1} und T_{μ_2}, da diese vier Punkte sämtlich auf $B'(C)$ und damit auf $C_1 \dotplus C_3$ liegen. Also sind S_1, S_3, T_{μ_1}, T_{μ_2}, W fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$. Daraus folgt: $B'(A) = A$.

Liegen mindestens zwei der drei Punkte T_2, T_4, T_5 auf dem Summanden $B''(C)$ von V, so kann man entsprechend zeigen, daß A und $B''(A)$ mindestens fünf verschiedene gemeinsame Punkte haben, woraus dann folgt: $B''(A) = A$. Es gilt also wieder stets mindestens eine der beiden Gleichungen $B'(A) = A$, $B''(A) = A$.

Zu bb): Wir betrachten das Kurvenstück v. Es verläuft vollständig im Innern des Kreises $B'(K)$. Wir betrachten weiter das Kurvenstück $B''B'^{-1}(v)$, das durch eine Drehung um 180° um den Mittelpunkt der Strecke S_1S_3 aus v hervorgeht, und die Vereinigungsmenge $v \dotplus B''B'^{-1}(v) = v'$. Das Kurvenstück v verläuft auch ganz im Innern des Kreises $B''(K)$. Deshalb verläuft $B''B'^{-1}(v)$ ganz im Innern des Kreises

$$B''B'^{-1}(B''(K)) = B'B''^{-1}(B''(K)) = B'(K).$$

Also verlaufen sowohl v als auch $B''B'^{-1}(v)$ ganz im Innern von $B'(K)$ und damit liegt auch ihre Vereinigungsmenge v' ganz im Innern von $B'(K)$. Außerdem ist v' ein stetiges Bild eines Kreises.

Wir betrachten noch die gegenseitige Lage von v' und V. Keiner der Punkte von v liegt im Innern von V. Also liegt auch keiner der Punkte von $B''B'^{-1}(v)$ im Innern von $B''B'^{-1}(V)$. Da aber $B''B'^{-1}(V) = V$ gilt, so liegt keiner der Punkte von $B''B'^{-1}(v)$ im Innern von V. Nun ist aber $v' = v + B''B'^{-1}(v)$. Also liegt keiner der Punkte von v' im Innern von V.

$B'(K)$ bzw. V in der Rolle von c_1 bzw. c_3 und v' in der Rolle von c_2 erfüllen die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 aus K **1.** 1. 1. Nun spiele die Rolle von c das abgeschlossene Kurvenstück $B'(C_2)$, das den Punkt $B'(M)$ von V mit dem Punkt $B'(P_2)$ von $B'(K)$ verbindet. Nach Hilfssatz 1 hat $B'(C_2)$ mit v' wenigstens einen Punkt T_2 gemein (Fig. 5).

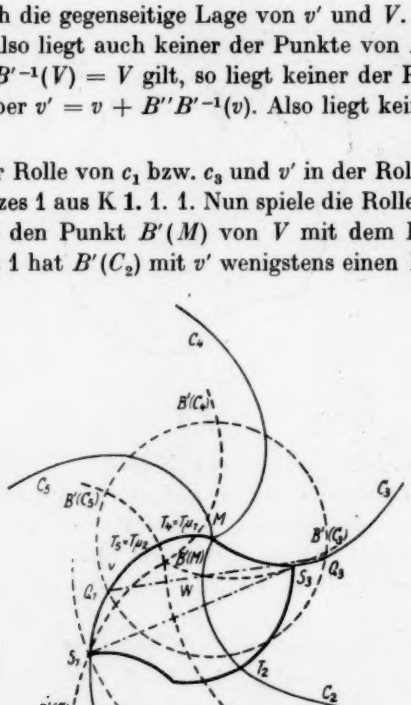


Fig. 5.

T_2 ist von $B'(M)$ verschieden und damit als Punkt von $B'(C_2)$ kein Punkt von $B'(C_1) \dotplus B'(C_3)$, also auch von S_1 und S_3 verschieden. Auf entsprechende Weise bekommt man einen gemeinsamen Punkt T_4 von $B'(C_4)$ und v' und einen gemeinsamen Punkt T_5 von $B'(C_5)$ und v', für die Entsprechendes gilt. Die drei Punkte T_2, T_4, T_5 sind drei verschiedene Punkte, da sie sämtlich von $B'(M)$ verschieden sind und auf $B'(C_2)$ bzw. $B'(C_4)$ bzw. $B'(C_5)$ liegen.

Nun gibt es unter den Summanden v und $B''B'^{-1}(v)$ von v' mindestens einen, auf dem mindestens zwei Punkte T_{μ_1} und T_{μ_2} der drei Punkte T_2, T_4, T_5 liegen. Wir nehmen

zunächst an, dies sei bei v der Fall. Dann sind $S_1, S_3, T_{\mu_1}, T_{\mu_2}$ vier verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$.

Nun betrachten wir die beiden Punkte S_1 und S_3. Als von M verschiedene Punkte von C_1 bzw. C_3 liegen sie auf verschiedenen Seiten von $C_2 \dotplus C_4$. Das sie verbindende Kurvenstück $B'(C)$ verläuft ganz im Innern von K und hat daher mit $C_2 \dotplus C_4$ mindestens einen Punkt W gemein. W ist ein gemeinsamer Punkt von A und $B'(A)$. Als Punkt von $B'(C)$ ist W von M verschieden, da $B'(C)$ und v außer S_1 und S_3 keinen gemeinsamen Punkt haben. Als von M verschiedener Punkt von $C_2 \dotplus C_4$ ist W von S_1 und von S_3 verschieden und ebenso von T_{μ_1} und T_{μ_2}, da diese vier Punkte sämtlich auf v und damit auf $C_1 \dotplus C_3$ liegen. Also sind $S_1, S_3, T_{\mu_1}, T_{\mu_2}, W$ fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A und $B'(A)$. Daraus folgt: $B'(A) = A$.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, daß mindestens zwei Punkte T_{μ_1} und T_{μ_2} der drei Punkte T_2, T_4, T_5 auf dem Summanden $B''B'^{-1}(v)$ von v' liegen. Dazu betrachten wir wieder die beiden Punkte S_1 und S_3, die auf verschiedenen Seiten von $B''B'^{-1}(C_2 \dotplus C_4)$ liegen. Das sie verbindende Kurvenstück $B'(C)$ verläuft ganz im Innern von $B''B'^{-1}(K)$ und hat daher mit $B''B'^{-1}(C_2 \dotplus C_4)$ mindestens einen Punkt W' gemein. W' ist ein gemeinsamer Punkt von $B'(A)$ und $B''B'^{-1}(A)$. Die vier Punkte $S_1, S_3, T_{\mu_1}, T_{\mu_2}$ sind vier verschiedene gemeinsame Punkte von $B''B'^{-1}(A)$ und $B'(A)$. Als Punkt von $B'(C)$ ist W' von $B''B'^{-1}(M)$ verschieden, da $B'(C)$ und v' außer S_1 und S_3 keinen gemeinsamen Punkt haben. Als von $B''B'^{-1}(M)$ verschiedener Punkt von $B''B'^{-1}(C_2 \dotplus C_4)$ ist W' von S_1 und S_3 verschieden und ebenso von T_{μ_1} und T_{μ_2}, da diese vier Punkte sämtlich auf $B''B'^{-1}(v)$ und damit auf $B''B'^{-1}(C_1 \dotplus C_3)$ liegen. Also sind $S_1, S_3, T_{\mu_1}, T_{\mu_2}, W'$ fünf verschiedene gemeinsame Punkte von $B'(A)$ und $B''B'^{-1}(A)$. Daraus folgt wegen $B''B'^{-1} = B'B''^{-1}$, daß $B''B'^{-1}(S_1)$, $B''B'^{-1}(S_3)$, $B''B'^{-1}(T_{\mu_1})$, $B''B'^{-1}(T_{\mu_2})$, $B''B'^{-1}(W')$ fünf verschiedene gemeinsame Punkte von $B''(A)$ und A sind. Daraus folgt aber: $B''(A) = A$.

Es gilt also auch im Falle bb) stets mindestens eine der beiden Gleichungen $B'(A) = A$, $B''(A) = A$.

1. 1. 4. 4. Wie in K **1. 1. 4. 4** kann man nun zeigen: Aus $B'(A) = A$ folgt $B'(C) = v$ und aus $B''(A) = A$ folgt $B''(C) = v$. Daraus ergibt sich dann wie in K **1. 1. 4. 5** bis **1. 1. 4. 7**, daß das offene Teilkurvenstück zwischen M und Q_3 auf C_3 in sich lokal kongruent und damit ein Kreisbogen ist, und daraus dann ein Widerspruch. Diese Überlegungen verlaufen in vollkommener Analogie zu den entsprechenden Überlegungen in K **1. 1. 4. 4** bis **1. 1. 4. 7**, so daß es nicht nötig ist, sie hier durchzuführen. Also kann der Fall II nicht eintreten. Damit ist der erste Teil des ersten Beweisschrittes erledigt.

1. 2. Wir kommen zum zweiten Teil des ersten Beweisschrittes und zeigen: *Außer den Punkten des Kreises K enthält das Element A von S keine weiteren Punkte.*

Beweis. Wie in K **1. 2** zeigt man zunächst, daß das Element A alle Punkte des E_2 enthält, wenn es einen nicht auf K liegenden Punkt P des E_2 enthält. Auf Grund der Eigenschaft 2) sieht man sofort, daß man dasselbe Ergebnis bekommt, wenn P ein Punkt der unendlich fernen Geraden ist.

Wir zeigen nun: *Enthält A irgendeinen nicht auf K liegenden Punkt des Π_2, so enthält A alle Punkte des Π_2.*

Wir nehmen an, P sei ein Punkt von A, der nicht auf K liegt. Dann enthält A alle Punkte des E_2. Nun sei U ein Punkt der unendlich fernen Geraden, der nicht auf A liegt. Dann gibt es zu U vier Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 des E_2 derart, daß von den fünf Punkten U, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 keine drei auf ein und derselben Geraden liegen. Diese fünf Punkte bestimmen dann nach Eigenschaft 3) in eindeutiger Weise ein Element A' aus S. Nach

Eigenschaft 2) enthält A' ein Kurvenstück, das die beiden Punkte U und Q_1 verbindet und damit sicher noch einen von Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 verschiedenen Punkt R des E_2. Dann sind aber R, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 fünf verschiedene gemeinsame Punkte von A und A', woraus $A' = A$ folgt. Also ist U ein Punkt von A, womit ein Widerspruch aufgezeigt ist.

Damit ist gezeigt, daß A auch die ganze unendlich ferne Gerade und somit den ganzen Π_2 enthält.

Daraus folgt aber, daß A das einzige Element von S ist; denn jedes Element von S enthält nach Eigenschaft 2) ein ganzes Kurvenstück des Π_2, also sicher fünf verschiedene Punkte des Π_2. Dies sind aber dann fünf gemeinsame Punkte von diesem Element und A, woraus folgt, daß dieses Element mit A identisch ist. Damit ist ein Widerspruch zu Eigenschaft 1) aufgezeigt. Also kann A keinen Punkt enthalten, der nicht auf K liegt. Damit ist der Beweis des ersten Schrittes abgeschlossen.

2. Wir kommen zum zweiten Beweisschritt und haben zu zeigen:

Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) *bis* 4) *enthält jeden nicht zerfallenden Kegelschnitt als Element.*

Beweis. Es sei K^* ein beliebiger nichtzerfallender Kegelschnitt des Π_2. Dann gibt es eine projektive Tranformation T des Π_2, durch die bei der von uns zugrunde gelegten Realisierung des Π_2 der Kegelschnitt K^* in einen Kreis K des E_2 übergeht: $T(K^*) = K$. Daraus folgt $K^* = T^{-1}(K)$. Nun ist aber der Kreis K ein Element von S. Nach Eigenschaft 4) ist daher auch K^* ein Element von S, w. z. b. w.

3. Wir kommen zum dritten Beweisschritt und haben zu zeigen:

Ein Punktmengensystem mit den Eigenschaften 1) *bis* 4) *enthält außer den nichtzerfallenden Kegelschnitten keine weiteren Elemente.*

Beweis. Es sei A ein beliebiges Element von S. Nach Eigenschaft 2) enthält A wenigstens fünf Punkte, von denen keine drei auf ein und derselben Geraden liegen. Dann gibt es aber einen nichtzerfallenden Kegelschnitt K, der diese fünf Punkte enthält. Also sind diese fünf Punkte fünf gemeinsame Punkte von A und K. Daraus folgt aber $A = K$ nach Eigenschaft 3).

Damit ist auch der dritte Beweisschritt erledigt und die angegebene Kennzeichnung des Systems aller nichtzerfallenden Kegelschnitte des Π_2 vollständig bewiesen.

Eingegangen 7. Mai 1951.

Aus der additiven Primzahltheorie*).

Von *Hans-Egon Richert* in Göttingen.

Einleitung.

1. In der nachfolgenden Arbeit soll die Vinogradowsche Kreismethode auf einige Probleme der additiven Primzahltheorie angewandt werden.

Im ersten Teil (Sätze 1 bis 4) wird die Frage nach der Darstellbarkeit ganzer Zahlen durch lineare Primzahlformen

$$(1)\quad m = a_1 p_1 + \cdots + a_s p_s,\ 3 \leqq p_i \leqq n,\ p_i \text{ prim};\ s \geqq 3;\ a_i \text{ ganz},\ \neq 0;\ i = 1, \ldots, s;$$
$$(a_i, a_k) = 1 \text{ für } i \neq k,$$

sowie nach der zugehörigen Lösungsanzahl aufgeworfen. Eine Antwort wird dadurch herbeigeführt, daß die Lösungsanzahl $\lambda_n^{(s)}(m)$ von (1) asymptotisch in einen einfachen linearen Zusammenhang mit der Lösungsanzahl $l_n^{(s)}(m)$ von

$$m = a_1 \nu_1 + \cdots + a_s \nu_s,\ 1 \leqq \nu_i \leqq n;\ i = 1, \ldots, s;\ s, a_i \text{ wie oben},$$

in natürlichen Zahlen ν_i gebracht werden wird (Satz 1).

Im Falle positiver a_i wird überdies die Möglichkeit der Darstellbarkeit jedes hinreichend großen $n \equiv \sum_{1 \leqq i \leqq s} a_i \pmod 2$ in der Form (1) direkt nachgewiesen und die zugehörige asymptotische Lösungsanzahl berechnet werden, während durch einfache Betrachtung modulo 2 folgt, daß (1) für $n = m \not\equiv \sum_{1 \leqq i \leqq s} a_i \pmod 2$ keine Lösung besitzt. In diesem Falle ist das Problem für $s \geqq 3$ damit vollständig gelöst (Satz 2).

Besitzen nicht alle a_i das gleiche Zeichen, so werden wir zeigen, daß dann jedes ganze (also nicht nur jedes hinreichend große positive) m, das nur der trivialen notwendigen Bedingung $m \equiv \sum_{1 \leqq i \leqq s} a_i \pmod 2$ für die Lösbarkeit von (1) genügt, unendlich viele Darstellungen der Gestalt (1) zuläßt (Satz 4).

Durch Spezialisierung der auftretenden Parameter s, a_i ($s = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$) folgt aus Satz 2 der Goldbach-Vinogradowsche Satz mit der zugehörigen Lösungsformel, in der jedoch das Fehlerglied in etwas schärferer Form als bei Vinogradow auftritt (Satz 3); denn es werden hier gewisse Integrale auf ganz andere Weise ausgewertet als dort.

Für den Fall $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 1$ geht der Satz 2 in ein Ergebnis von Walfisz[1]) über, wenngleich dieser auch keine Untersuchungen über das Fehlerglied angestellt hat.

Endlich sei noch erwähnt, daß für den Fall $s = 3$ van der Corput[2]) bereits die Möglichkeit der Darstellung ganzer Zahlen in der Gestalt (1) untersucht hat. Dabei schränkte

*) Umgearbeitete und erweiterte Fassung einer bei der Universität Hamburg eingereichten Dissertation. Referent: Prof. Dr. *M. Deuring*.

[1]) *A. Walfisz*, Zur additiven Zahlentheorie VII, 2. Mitt., Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR **2** (1941), 221—226.

[2]) *J. G. van der Corput*, Sur le théorème de Goldbach-Vinogradov, C. R. Acad. Sci. Paris **205** (1937), 479—481; Über Summen von Primzahlen und Primzahlquadraten, Math. Ann. **116** (1939), 1—50; Sur l'hypothèse de Goldbach, Proc. Akad. Wet. Amsterdam **41** (1938), 76—80.

er die p_i sogar noch auf gewisse Intervalle ein und unterwarf sie bestimmten Restklassenbedingungen. Allerdings werden in diesen Arbeiten keine asymptotischen Ausdrücke für die Lösungsanzahlen gewonnen.

Im zweiten Teil wird die Funktion $G_n(m)$, die Lösungsanzahl von

$$m = p_1 + p_2, 3 \leqq p_i \leqq n, \; p_i \text{ prim}; \; i = 1, 2,$$

studiert.

Man wird durch ähnliche Rechnungen wie in Teil I rasch auf die Vermutung von Hardy und Littlewood (Formel (81)) geführt, doch wird gezeigt werden, daß hier das übliche Verfahren bei der Behandlung eines gewissen Integrales in der Vinogradowschen Methode nicht zum Erfolge und damit zum Beweise der Goldbachschen Vermutung führen kann. Die kritischen Integrale, die für ein einzelnes m nicht geeignet abgeschätzt werden können, erweisen sich jedoch im Mittel als hinreichend klein, so daß ein Mittelwertsatz über ein relativ kleines Intervall ausgesprochen werden kann (Satz 5).

Wäre nun die erwähnte Vermutung über $G_n(m)$ richtig, so würde $G_n(m)$ eine starke Abhängigkeit von den Primteilern von m zeigen, oder anders gewendet, nach einem bestimmten Modul $k > 2$ würde $G_n(m)$ eine Abhängigkeit von der Restklasse von m modulo k zeigen. Soweit numerische Resultate über $G_n(m)$ durch Nils Pipping vorliegen, scheint dies auch richtig zu sein. Wir werden hier zeigen, daß bei einer Summierung über verhältnismäßig wenige Zahlen einer festen Restklasse eines Moduls diese Restklassenabhängigkeit tatsächlich zutrifft (Satz 6).

Erster Teil.

2. Mit p, p_i sollen im folgenden ausnahmslos Primzahlen bezeichnet werden. Es seien

$$s \geqq 3 \text{ natürlich},$$
$$a_1, \ldots, a_s \text{ ganz}$$

mit

$$a_i \neq 0 \text{ für } 1 \leqq i \leqq s$$

und

$$(a_i, a_k) = 1 \text{ für } i \neq k \tag{2}$$

fest vorgegeben. Ferner seien

$$n \text{ eine hinreichend große natürliche Zahl,} \tag{3}$$

$$A_s = \prod_{i=1}^{s} a_i,$$

$$\omega = \log^\alpha n, \; \alpha \geqq 25, \tag{4}$$

$$\varrho(x, n) = \sum_{3 \leqq p \leqq n} e^{2\pi i x p}, \tag{5}$$

$$r(x, n) = \sum_{2 \leqq \nu \leqq n} \frac{1}{\log \nu} e^{2\pi i x \nu}, \tag{6}$$

$$R(x, n) = \sum_{1 \leqq \nu \leqq n} e^{2\pi i x \nu}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{K}_m(l, q) &= \int_{\frac{l}{q} - \omega n^{-1}}^{\frac{l}{q} + \omega n^{-1}} \prod_{k=1}^{s} \varrho(a_k x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx \\ &= \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} \prod_{k=1}^{s} \varrho\left(\frac{a_k l}{q} + a_k x, n\right) e^{-\frac{2\pi i l m}{q} - 2\pi i x m} dx, \end{aligned} \tag{8}$$

$$k_n(m) = \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} \prod_{k=1}^{s} r(a_k x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx, \tag{9}$$

$$k_n'(m) = \log^{-s} n \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} \prod_{k=1}^{s} R(a_k x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx, \tag{10}$$

$$k_n''(m) = \log^{-s} n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{s} R(a_k x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx, \tag{11}$$

$$D_q(l) = \sum_{\substack{1 \leq h \leq q \\ (h,q)=1}} e^{\frac{2\pi i l h}{q}}, \tag{12}$$

$$\Delta_q(m) = D_q(m) \prod_{k=1}^{s} D_q(a_k), \tag{13}$$

$$S_\omega(m) = \sum_{1 \leq q \leq \omega} \frac{\Delta_q(m)}{\varphi^s(q)}, \tag{14}$$

$$S(m) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\Delta_q(m)}{\varphi^s(q)},$$

$$\mathfrak{J} = [\omega n^{-1},\ 1 + \omega n^{-1}].$$

$\mathfrak{M}$ (major arcs) sei die Menge aller $x \in \mathfrak{J}$, für die zwei Zahlen l und q existieren, so daß

$$\left| x - \frac{l}{q} \right| \leq \omega n^{-1}, \tag{15}$$

$$1 \leq q \leq \omega, \tag{16}$$

$$1 \leq l \leq q, \tag{17}$$

$$(l, q) = 1 \tag{18}$$

erfüllt sind.

$\mathfrak{m}$ (minor arcs) sei erklärt durch

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{J} - \mathfrak{M} \tag{19}$$

Ferner seien

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n^{(s)}(m) \text{ die Lösungsanzahl der Gleichung} \\ \quad m = a_1 p_1 + \cdots + a_s p_s,\ 3 \leq p_i \leq n,\ p_i \text{ prim};\ 1 \leq i \leq s, \end{array} \right. \tag{20}$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} l_n^{(s)}(m) \text{ die Lösungsanzahl der Gleichung} \\ \quad m = a_1 \nu_1 + \cdots + a_s \nu_s,\ 1 \leq \nu_i \leq n,\ \nu_i \text{ natürlich},\ 1 \leq i \leq s. \end{array} \right. \tag{21}$$

Schließlich sei noch bemerkt, daß lg ebenso wie log stets den natürlichen Logarithmus bezeichnet.

3. Lemma 1. *Für* $x \in \mathfrak{m}$, $x = \frac{l}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $|\theta| \leq 1$, $(l, q) = 1$, *gilt*

$$\min\left(q, \frac{n}{q}\right) \geq \omega.$$

Beweis. Da (15) bis (18) für $x \in [1 - \omega n^{-1}, 1 + \omega n^{-1}]$ mit $l = q = 1$ erfüllt sind, gilt ersichtlich

$$\mathfrak{m} \leq [\omega n^{-1},\ 1 - \omega n^{-1}]. \tag{22}$$

Nun gibt es bekanntlich auch zu jedem $x \in \mathfrak{m}$ zwei Zahlen l und q, so daß

$$\left| x - \frac{l}{q} \right| \leq \frac{1}{q n \omega^{-1}} \leq \omega n^{-1}, \tag{23}$$

$$1 \leq q \leq n \omega^{-1}, \tag{24}$$

$$1 \leq l \leq q, \tag{25}$$

$$(l, q) = 1, \tag{26}$$

also auch

$$\left| x - \frac{l}{q} \right| \leqq \frac{1}{q^2}$$

gelten[3]).

Da nun nach (23), (25) und (26) auf $\mathfrak{m}$ stets (15), (17) und (18) erfüllbar sind, haben wir nach (24)

$$\omega < q \leqq n\omega^{-1} \text{ für } x \in \mathfrak{m}.$$

Hieraus folgt

$$\min\left(q, \frac{n}{q}\right) \geqq \begin{cases} \min\limits_q q = \omega & \text{für } \omega < q \leqq \sqrt{n}, \\ \min\limits_q \dfrac{n}{q} = \omega & \text{für } \sqrt{n} \leqq q \leqq n\omega^{-1}, \end{cases}$$

also

$$\min\left(q, \frac{n}{q}\right) \geqq \omega \quad \text{für } x \in \mathfrak{m}, \text{ q. e. d.}$$

Lemma 2. *Es sei* $x = \frac{l}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(l, q) = 1$, $1 \leqq q \leqq n$, $|\theta| \leqq 1$, $\varepsilon > 0$, *a eine natürliche Zahl mit* $1 \leqq a \leqq \left(\min\left(q, \frac{n}{q}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$. *Dann ist*[4])

$$\varrho(ax, n) = O\left(n \log n \left(\min\left(q, \frac{n}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}\right).$$

Lemma 3. $\varrho(a_k x, n) = O\left(n \log^{1-\frac{4\alpha}{25}} n\right) = O(n \log^{-3} n)$ *für* $x \in \mathfrak{m}$, $1 \leqq k \leqq s$.

Beweis. Die Voraussetzung $1 \leqq a \leqq \left(\min\left(q, \frac{n}{q}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ in Lemma 2 kann wegen $\overline{\varrho(-ax, n)} = \varrho(ax, n)$ ersichtlich durch $1 \leqq |a| \leqq \left(\min\left(q, \frac{n}{q}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ ersetzt werden. Wegen Lemma 1 und (3) ist sie dann durch jedes unserer a_k erfüllt, und es folgt nach Lemma 1, Lemma 2 und (4) mit $\varepsilon = \frac{1}{150}$ die Behauptung.

Lemma 4. *Es sei* $(h, q) = 1$, $1 \leqq q \leqq \omega$, $1 \leqq j \leqq n$. *Setzt man*

$$\pi(j; q, h) = \sum_{\substack{3 \leqq p \leqq j \\ p \equiv h(q)}} 1 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{2 \leqq \nu \leqq j} \frac{1}{\log \nu} + \theta(j),$$

so ist[5])

$$\theta(j) = O(n\omega^{-6}).$$

Lemma 5. *Für die durch* (12) *erklärte Funktion* $D_q(l)$ *gelten*[6])

$$D_q(l) = \sum_{d \mid (l, q)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right) = D_q(-l), \tag{27}$$

$$D_q(l) = \mu(q) \quad \text{für } (l, q) = 1, \tag{28}$$

$$D_q(a_k l) = D_q(a_k) \quad \text{für } (l, q) = 1, \tag{29}$$

$$D_{q_1}(l)\, D_{q_2}(l) = D_{q_1 q_2}(l) \quad \text{für } (q_1, q_2) = 1, \tag{30}$$

$$|D_q(l)| \leqq \varphi(q) \leqq q. \tag{31}$$

Lemma 6. *Es ist*[7])

$$\frac{1}{\varphi(q)} = O\left(\frac{1 + \log q}{q}\right).$$

---

[3]) Vgl. *E. Landau*, Vorlesungen **1** (1927), 100.

[4]) *I. M. Vinogradov*, New estimations of trigonometrical sums containing primes, C. R. Acad. Sci. USSR, N. S. **17** (1937), 165—166.

[5]) *A. Walfisz*, Zur additiven Zahlentheorie II, Math. Z. **40** (1936), 598.

[6]) Vgl. *E. Landau*, Vorlesungen **1** (1927), 188.

[7]) Vgl. *E. Landau*, Handbuch **1** (1909), 218—219.

Lemma 7. *Es ist*[8])

$$\sum_{p \mid q} 1 = O(\log q).$$

Lemma 8. *Es ist*

$$\Delta_q(m) = O(\varphi(q)).$$

Beweis. Zunächst ist nach (13) und (30)

$$\Delta_{q_1}(m)\, \Delta_{q_2}(m) = \Delta_{q_1 q_2}(m) \quad \text{für} \quad (q_1, q_2) = 1. \tag{32}$$

Weiter ist nach (28)

$$\Delta_q(m) = 0 \qquad \text{für} \quad \mu(q) = 0, \tag{33}$$

da es wegen (2) stets ein a_i mit $(a_i, q) = 1$, also $D_q(a_i) = \mu(q)$ gibt. Daher gilt nach (32), (31) und (27)

$$\begin{aligned} |\Delta_q(m)| &\leqq \left| \prod_{p \mid q} \Delta_p(m) \right| \leqq \varphi(q) \left| \prod_{i=1}^{s} \prod_{p \mid q} D_q(a_i) \right| \\ &= \varphi(q) \left| \prod_{i=1}^{s} \prod_{p \mid (a_i, q)} (p-1) \right| \leqq \varphi(q) \prod_{i=1}^{s} |a_i| = O(\varphi(q)). \end{aligned}$$

Lemma 9. *Für die durch* (6) *erklärte Funktion* $r(x, n)$ *gilt*

$$r(x, n) = O\left(\min\left(\frac{1}{|x| \log n}, \frac{n}{\log n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\log n} \frac{1}{n^{-1} + |x|}\right) \quad \textit{für} \quad |x| \leqq \omega n^{-1}, \tag{34}$$

falls unter $\min\left(\frac{1}{|x| \log n}, \frac{n}{\log n}\right)_{x=0}$ *der Wert* $\frac{n}{\log n}$ *verstanden wird.*

Beweis. Trivialerweise ist nach (6) stets $r(x, n) = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$. Es bleibt also für den ersten Teil der Abschätzung nur

$$r(x, n) = O\left(\frac{1}{|x| \lg n}\right) \quad \text{für} \quad n^{-1} \leqq |x| \leqq \omega n^{-1}$$

zu zeigen. Nach der Eulerschen Summenformel ist für diese x

$$\begin{aligned} r(x, n) &= \int_2^n \frac{e^{2\pi i x u}}{\log u}\, du + O(1) + O\left(|x| \int_2^n \frac{du}{\lg u}\right) \\ &= O(\sqrt{n}) + O\left(\frac{1}{|x| \lg n}\right) + O\left(\frac{1}{|x|} \int_{\sqrt{n}}^{n} \frac{du}{u \lg^2 n}\right) = O\left(\frac{1}{|x| \lg n}\right). \end{aligned}$$

Der zweite Teil unserer Abschätzung ist aber ebenfalls richtig; denn für zwei beliebige positive Zahlen a, b ist

$$\min(a, b) \leqq \frac{2}{a^{-1} + b^{-1}}.$$

Lemma 10. *Es ist*

$$S_\omega(m) = O(1).$$

Beweis. Nach Lemma 8 und Lemma 6 gilt bei Beachtung von $s \geqq 3$

$$S_\omega(m) = O\left(\sum_{1 \leqq q \leqq \omega} \frac{1}{\varphi^{s-1}(q)}\right) = O\left(\sum_{1 \leqq q \leqq \omega} \frac{1 + \lg^{s-1} q}{q^{s-1}}\right) = O(1).$$

Lemma 11. *Für die durch* (7) *erklärte Funktion* $R(x, n)$ *gilt für jedes* a_k, $1 \leqq k \leqq s$,

$$R(a_k x, n) = O\left(\min\left(\frac{1}{\{a_k x\}}, n\right)\right), \quad \textit{wo} \quad \{\xi\} = \min(\xi - [\xi], [\xi] + 1 - \xi),$$

insbesondere also

$$R(a_k x, n) = O\left(\min\left(\frac{1}{|x|}, n\right)\right), \quad \textit{für} \quad |x| \leqq \frac{1}{2|A_s|}.$$

---

[8]) A. a. O. [6]).

Beweis. Stets gilt die triviale Abschätzung

$$R(a_k x, n) = O(n). \tag{35}$$

Ferner ist aber

$$R(a_k x, n) = \sum_{1 \leq \nu \leq n} e^{2\pi i a_k x \nu} = e^{2\pi i a_k x} \frac{1 - e^{2\pi i a_k x n}}{1 - e^{2\pi i a_k x}},$$

also für nichtganze $a_k x$

$$R(a_k x, n) = O\left(\frac{1}{|\sin \pi a_k x|}\right) = O\left(\frac{1}{\{a_k x\}}\right), \tag{36}$$

letzteres wegen

$$|\sin \pi \xi| \geqq 2\{\xi\}\,^{9)}. \tag{37}$$

Aus (35) und (36) folgt die Behauptung.

Lemma 12. *Für* $|x| \in \mathfrak{J}_1 = \left[\frac{1}{2|A_s|}, \frac{1}{2}\right]$ *ist*

$$\prod_{k=1}^{s} R(a_k x, n) = O(n \log^{s-1} n).$$

Beweis. Wir greifen zu der Fareyreihe der Ordnung $[\log n]$. Dann gibt es bekanntlich zu jedem x mit $|x| \in \mathfrak{J}_1$ zwei Zahlen l und q mit

$$2 \leqq q \leqq \log n, \tag{38}$$

$$1 \leqq |l| \leqq q, \tag{39}$$

$$(l, q) = 1, \tag{40}$$

so daß

$$\left| x - \frac{l}{q} \right| \leqq \frac{1}{q \lg n} \tag{41}$$

ist[10].

Es seien jetzt x, l und q gemäß (38) bis (41) beliebig aber fest ausgewählt. Wir setzen $x = \frac{l}{q} + \vartheta$, wo also wegen (41)

$$|\vartheta| \leqq \frac{1}{q \lg n} \tag{42}$$

ist. Daher ist

$$\{a_k x\} = \left\{\frac{a_k l}{q} + a_k \vartheta\right\}.$$

Wegen $\{\xi\} = \{\xi + 1\}$ gilt

$$\{a_k x\} = \left\{\frac{j}{q} + a_k \vartheta\right\} \tag{43}$$

für

$$a_k l \equiv j (\mathrm{mod}\, q), \quad 0 \leqq j \leqq q - 1. \tag{44}$$

Nach (42) ist nun mit (3) und (38)

$$|a_k \vartheta| \leqq \frac{|a_k|}{q \lg n} \leqq \frac{1}{4} \tag{45}$$

und daher $\{a_k \vartheta\} = |a_k \vartheta|$.

Jetzt erhalten wir aus (45) für $1 \leqq j \leqq q - 1$

$$0 < \frac{j}{2q} \leqq \frac{j}{q} + a_k \vartheta \leqq \frac{1}{2} + \frac{j}{2q} < 1.$$

---

[9]) Vgl. *E. Landau*, Vorlesungen **1** (1927), 252.

[10]) A. a. O. [3]).

Folglich ist für $1 \leqq j \leqq q-1$ nach (38)

$$\left\{\frac{j}{q}+a_k\vartheta\right\} \geqq \min\left(\left\{\frac{j}{2q}\right\}, \left\{\frac{1}{2}+\frac{j}{2q}\right\}\right) \geqq \min\left(\frac{j}{2q}, \frac{1}{2}-\frac{j}{2q}\right) \geqq \frac{1}{2q}$$

und daher

$$\frac{1}{\left\{\frac{j}{q}+a_k\vartheta\right\}} = O(\lg n). \tag{46}$$

Je nachdem welches q sich ergibt, haben wir also $j=0$, dann schätzen wir $R(a_k x, n)$ trivial ab, oder $1 \leqq j \leqq q-1$, dann schätzen wir $R(a_k x, n)$ nach Lemma 11 mittels (43) und (46) ab.

Nach (40) und (44) ist $j=0$ gleichbedeutend mit $q \mid a_k$, dagegen entspricht $1 \leqq j \leqq q-1$ dem Fall $q \nmid a_k$; daher haben wir endlich für $|x| \in \mathfrak{J}_1$

$$R(a_k x, n) = \begin{cases} O(n) & \text{falls } q \mid a_k, \\ O(\lg n) & \text{falls } q \nmid a_k. \end{cases} \tag{47}$$

Wegen $(a_i, a_k) = 1$ für $i \neq k$ gibt es nach (47) und (38) ($q \geqq 2$) an jeder festen Stelle x mit $|x| \in \mathfrak{J}_1$ in dem Produkt $\prod_{k=1}^{s} R(a_k x, n)$ höchstens einen Faktor, der nicht durch $O(\log n)$ abgeschätzt werden kann, und damit ist Lemma 12 bewiesen.

Lemma 13. *Es ist*

$$S(m) = \prod_{p \nmid A_s m}\left(1+\frac{(-1)^{s+1}}{(p-1)^s}\right) \prod_{\substack{p \mid A_s m \\ p \nmid (A_s, m)}}\left(1+\frac{(-1)^{s+1}}{(p-1)^{s-2}}\right) \prod_{\substack{p \mid A_s m \\ p \nmid (A_s, m)}}\left(1+\frac{(-1)^{s}}{(p-1)^{s-1}}\right).$$

Beweis. Wegen (33), (32), Lemma 8 und $\Delta_1(m) = 1$ haben wir

$$S(m) = \prod_p \left(1+\frac{\Delta_p(m)}{(p-1)^s}\right).$$

Hieraus erhalten wir nach (13) unter ständiger Benutzung von (26) sowie bei Beachtung dessen, daß wegen (2)

$$\prod_{p \mid a_1} \cdots \prod_{p \mid a_s} = \prod_{p \mid A_s}$$

gilt, die Behauptung.

Lemma 14. *Für*

$$m \equiv \sum_{1 \leqq i \leqq s} a_i \pmod 2 \tag{48}$$

ist gleichmäßig in m

$$S(m) \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Beweis. Für $s \equiv 1 \pmod 2$ sind in $S(m) = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$ die Teilprodukte $\Pi_1 \geqq 1$, $\Pi_2 \geqq 1$, und wenn $p(k)$ die k-te Primzahl bezeichnet, $p(k) - 1 \geqq p(k-1)$. Daher ist, da $p=2$ nach (48) in Π_3 nicht vorkommt,

$$\Pi_3 = \prod_{\substack{p \mid A_s m \\ p \nmid (A_s, m)}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^{s-1}}\right) \geqq \prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^{s-1}}\right) \geqq \prod_p \left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)$$

$$\geqq \frac{1}{\zeta(s-1)} \geqq \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \geqq \frac{1}{2},$$

also hier $S(m) \geqq \frac{1}{2}$.

Für $s \equiv 0 \pmod 2$ schließt man ähnlich. Hier ist $\Pi_3 \geqq 1$, und, da $p=2$ nach (48) in Π_1 und Π_2 nicht auftritt,

$$\Pi_1 = \prod_{p \nmid A_s m} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^s}\right) \geqq \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^s}\right) \geqq \frac{1}{\zeta(s)} \geqq \frac{1}{\zeta(4)},$$

$$\Pi_2 = \prod_{\substack{p \mid A_s m \\ p \mid (A_s, m)}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^{s-2}}\right) \geqq \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^{s-2}}\right) \geqq \frac{1}{\zeta(s-2)} \geqq \frac{1}{\zeta(2)},$$

also auch in diesem Falle $S(m) \geqq \dfrac{1}{\zeta(2)\,\zeta(4)} = \dfrac{540}{\pi^6} \geqq \dfrac{1}{2}$.

Lemma 15. *Für die durch* (21) *erklärte Funktion* $l_n^{(s)}(m)$ *gilt für* $s \geqq 2$, *falls alle* a_i, $1 \leqq i \leqq s$, *positiv sind,*

$$l_n^{(s)}(n) = \frac{1}{(s-1)!\,A_s}\, n^{s-1} + O(n^{s-2}). \tag{49}$$

Beweis. Für $s = 2$ ist (49) bekanntlich richtig[11]). Angenommen, Lemma 15 wäre für $s = k$ bereits bewiesen. Dann ist, wenn man

$$l_n^{(k)}(m) = l_\infty^{(k)}(m) \quad \text{für} \quad m \leqq n$$

bemerkt,

$$l_n^{(k+1)}(n) = \sum_{1 \leqq r \leqq \frac{n}{a_{k+1}}} l_n^{(k)}(n - a_{k+1} r) = \sum_{1 \leqq r \leqq \frac{n}{a_{k+1}}} \frac{1}{(k-1)!\,A_k} (n - a_{k+1} r)^{k-1} + O(n^{k-1})$$

$$= \frac{1}{(k-1)!\,A_k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} n^{k-1-\nu} (-1)^\nu a_{k+1}^\nu \sum_{1 \leqq r \leqq \frac{n}{a_{k+1}}} r^\nu + O(n^{k-1}),$$

und wegen

$$\sum_{1 \leqq r \leqq \frac{n}{a_{k+1}}} r^\nu = \frac{1}{\nu+1} \left(\frac{n}{a_{k+1}}\right)^{\nu+1} + O(n^\nu)$$

folgt

$$l_n^{(k+1)}(n) = \frac{n^k}{(k-1)!\,A_k a_{k+1}} \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} (-1)^\nu \frac{1}{\nu+1} + O(n^{k-1}),$$

also mit

$$A_k a_{k+1} = A_{k+1} \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} (-1)^\nu \frac{1}{\nu+1} = \frac{1}{k}$$

schließlich

$$l_n^{(k+1)}(n) = \frac{n^k}{k!\,A_{k+1}} + O(n^{k-1}).$$

Damit ist jetzt auch das Lemma 15 bewiesen.

Lemma 16. *Falls* $a_1 a_2 < 0$, $|m| \leqq \dfrac{n}{3}$ *ist, gilt*

$$l_n^{(2)}(m) \geqq \frac{n}{6\,|a_1 a_2|}.$$

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ annehmen. Dann ist für jedes ν_2 mit

$$\frac{n}{3\,|a_2|} < \nu_2 \leqq \frac{2n}{3\,|a_2|} \tag{50}$$

wegen $|m| \leqq \dfrac{n}{3}$

$$1 \leqq a_1 \nu_1 = m - a_2 \nu_2 \leqq n,$$

---

[11]) *P. Bachmann*, Niedere Zahlentheorie 2 (1910), 129.

d. h. sicher $1 \leqq \nu_1 \leqq n$, und wir können immer ein zugelassenes ν_1 finden, falls die rechte Seite durch a_1 teilbar ist. Wegen $(a_1, a_2) = 1$ liefert dies aber nach (50) mehr als $\frac{n}{6\,|\,a_1 a_2\,|}$ Lösungen von $a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2 = m$.

Lemma 17. *Falls a_1, a_2, a_3 nicht sämtlich gleiches Zeichen besitzen, so ist für $|\,m\,| \leqq \frac{n}{6}$*

$$l_n^{(3)}(m) \geqq \frac{n^2}{36\,|\,a_1 a_2 a_3\,|}.$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 a_2 < 0$ an. Dann ist

$$(51) \qquad l_n^{(3)}(m) = \sum_{1 \leq \nu_3 \leq n} l_n^{(2)}(m - a_3 \nu_3) \geqq \sum_{1 \leq \nu_3 \leq \frac{n}{6\,|\,a_3\,|}} l_n^{(2)}(m - a_3 \nu_3).$$

In der letzten Summe von (51) ist $|\,m - a_3 \nu_3\,| \leqq \frac{n}{3}$ wegen $|\,m\,| \leqq \frac{n}{6}$, und daher haben wir aus (51) mit Lemma 16 die Behauptung.

4. Nach (5) und (20) haben wir zunächst

$$\prod_{k=1}^{s} \varrho(a_k x, n) = \sum_{\substack{3 \leq p_i \leq n \\ 1 \leq i \leq s}} e^{2\pi i x (a_1 p_1 + \cdots + a_s p_s)} = \sum_m \lambda_n^{(s)}(m)\, e^{2\pi i x m}$$

und daher mit (19)

$$(52) \qquad \lambda_n^{(s)}(m) = \int_{\mathfrak{M}} \prod_{k=1}^{s} \varrho(a_k x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx + \int_{\mathfrak{m}} \prod_{k=1}^{s} \varrho(a_k x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx.$$

Hierin ist nun

$$\int_{\mathfrak{m}} |\,\varrho^2(a_k x, n)\,|\, dx \leqq \int_{\mathfrak{J}} |\,\varrho^2(a_k x, n)\,|\, dx = \pi(n) = O(n \lg^{-1} n)$$

und daher unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$(53) \quad \int_{\mathfrak{m}} |\,\varrho(a_1 x, n)\,|\,|\,\varrho(a_2 x, n)\,|\, dx \leqq \sqrt{\int_{\mathfrak{m}} |\,\varrho^2(a_1 x, n)\,|\, dx \int_{\mathfrak{m}} |\,\varrho^2(a_2 x, n)\,|\, dx} = O(n \lg^{-1} n),$$

so daß wir aus (53) und Lemma 3 insgesamt erhalten

$$\left| \int_{\mathfrak{m}} \prod_{k=1}^{s} \varrho(a_k x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx \right| \leqq \max_{x \in \mathfrak{m}} \prod_{k=3}^{s} |\,\varrho(a_k x, n)\,| \int_{\mathfrak{m}} |\,\varrho(a_1 x, n)\,|\,|\,\varrho(a_2 x, n)\,|\, dx$$
$$= O(n^{s-1} \log^{-1-3(s-2)} n) = O(n^{s-1} \log^{5-3s} n)$$

und daher nach (52)

$$(54) \qquad \lambda_n^{(s)}(m) = \int_{\mathfrak{M}} \prod_{k=1}^{s} \varrho(a_k x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx + O(n^{s-1} \log^{5-3s} n).$$

5. Jetzt ist nach (15) bis (18) und (8)

$$(55) \qquad \int_{\mathfrak{M}} \prod_{k=1}^{s} \varrho(a_k x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = \sum_{1 \leq q \leq \omega} \sum_{\substack{1 \leq l \leq q \\ (l, q) = 1}} \mathsf{K}_m(l, q).$$

Denn erstlich werden bei dieser stückweisen Integration die Grenzen ωn^{-1} und $1 + \omega n^{-1}$ von $\mathfrak{J}$ nicht überschritten, da (mit (3)) einerseits $\frac{l}{q} - \omega n^{-1} \geqq \omega^{-1} - \omega n^{-1} \geqq \omega n^{-1}$ und (mit (17)) andererseits $\frac{l}{q} + \omega n^{-1} \leqq 1 + \omega n^{-1}$ gelten. Zweitens überlappen sich auch die

Einzelintegrale $\mathsf{K}_m(l, q)$ nicht. Hierzu haben wir nur, falls $\frac{l}{q}$ und $\frac{l'}{q'}$ zwei Fareynachbarn bedeuten,

$$\left(\frac{l'}{q'} - \omega n^{-1}\right) - \left(\frac{l}{q} + \omega n^{-1}\right) \geqq \omega^{-2} - 2\omega n^{-1} \geqq 0$$

als richtig zu erkennen.

Für die Approximation von $\varrho(a_k x, n)$ durch $r(a_k x, n)$ auf den major arcs führen wir folgende Rechnung durch:

$$(56) \qquad \varrho\left(\frac{a_k l}{q} + a_k x, n\right) = \sum_{3 \leq p \mid q} e^{2\pi i a_k \left(\frac{l}{q} + x\right) p} + \sum_{\substack{1 \leq h \leq q \\ (h, q) = 1}} e^{\frac{2\pi i a_k l h}{q}} \sum_{\substack{3 \leq p \leq n \\ p \equiv h (q)}} e^{2\pi i a_k x p}.$$

Dann haben wir nach (6) und Lemma 4 bei partieller Summation

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{3 \leq p \leq n \\ p \equiv h (q)}} e^{2\pi i a_k x p} &= \sum_{2 \leq j \leq n} (\pi(j; q, h) - \pi(j-1; q, h))\, e^{2\pi i a_k x j} \\
&= \sum_{2 \leq j \leq n} \left(\frac{1}{\varphi(q)} \frac{1}{\lg j} + \theta(j) - \theta(j-1)\right) e^{2\pi i a_k x j} \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} r(a_k x, n) + \theta(n)\, e^{2\pi i a_k x n} + \sum_{2 \leq j \leq n-1} \theta(j)\, e^{2\pi i a_k x j} (1 - e^{2\pi i a_k x}) \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} r(a_k x, n) + O(n\omega^{-5}) \text{ für } |x| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq q \leqq \omega,\ (h, q) = 1,
\end{aligned}$$

also nach Lemma 7, (56) und (12)

$$\varrho\left(\frac{a_k l}{q} + a_k x, n\right) = \frac{D_q(a_k l)}{\varphi(q)} r(a_k x, n) + O(n\omega^{-4}) \text{ für } |x| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq q \leqq \omega.$$

Hieraus folgt nun mit (31) und (34)

$$(57) \quad \prod_{k=1}^{s} \varrho\left(\frac{a_k l}{q} + a_k x, n\right) = \frac{1}{\varphi^s(q)} \prod_{k=1}^{s} D_q(a_k l)\, r(a_k x, n) + O\left(n\omega^{-4} \lg^{1-s} n \frac{1}{(n^{-1} + |x|)^{s-1}}\right)$$
$$+ O(n^s \omega^{-4s}) \text{ für } |x| \leqq \omega n^{-1},\ 1 \leqq q \leqq \omega.$$

Weiter haben wir aus (57), (8) und (9)

$$\mathsf{K}_m(l, q) = \frac{\prod_{k=1}^{s} D_q(a_k l)}{\varphi^s(q)} e^{-\frac{2\pi i l m}{q}} k_n(m) + O(n^{s-1} \omega^{-4} \lg^{1-s} n) \text{ für } 1 \leqq q \leqq \omega,$$

und, wenn wir wie in (55) vorgesehen summieren, nach (54)

$$(58) \qquad \lambda_n^{(s)}(m) = k_n(m) \sum_{1 \leq q \leq \omega} \frac{1}{\varphi^s(q)} \sum_{\substack{1 \leq l \leq q \\ (l, q) = 1}} \prod_{k=1}^{s} D_q(a_k l)\, e^{-\frac{2\pi i l m}{q}}$$
$$+ O(n^{s-1} \omega^{-2} \lg^{1-s} n) + O(n^{s-1} \lg^{5-3s} n).$$

Da in (58) in der Summe über l nur solche l vorkommen, die zu q teilerfremd sind, haben wir wegen (29), (27), (13), (14) und $s \geqq 3$

$$(59) \qquad \lambda_n^{(s)}(m) = k_n(m)\, S_\omega(m) + O(n^{s-1} \lg^{-s-1} n).$$

6. Wir betrachten nun

$$(60) \qquad S(m) - S_\omega(m) = \sum_{q > \omega} \frac{\Delta_q(m)}{\varphi^s(q)}.$$

Nach Lemma 8 haben wir mit Lemma 6

$$(61) \quad \sum_{q > \omega} \frac{\Delta_q(m)}{\varphi^s(q)} = O\left(\sum_{q > \omega} \frac{1}{\varphi^{s-1}(q)}\right) = O\left(\sum_{q > \omega} \frac{1 + \lg^{s-1} q}{q^{s-1}}\right) = O(\lg^{s-1} \omega\, \omega^{2-s}) = O(\omega^{\frac{5}{2} - s}),$$

und da wir nach (9) und (34) noch

$$(62)\qquad k_n(m) = O\left(\log^{-s} n \int_0^{\omega n^{-1}} \frac{dx}{(n^{-1} + |x|)^s}\right) = O(n^{s-1} \log^{-s} n)$$

erhalten, folgt aus (60), (61) und (62)

$$S_\omega(m)\, k_n(m) = S(m)\, k_n(m) + O(n^{s-1} \log^{-s} n\, \omega^{2^{\frac{5}{-s}}}),$$

d. h. mit (59) und (4)

$$(63)\qquad \lambda_n^{(s)}(m) = S(m)\, k_n(m) + O(n^{s-1} \log^{-s-1} n).$$

7. Nach (63), Lemma 13 und Lemma 14 kommt es für die Bestimmung von $\lambda_n^{(s)}(m)$ nur noch auf die Berechnung von $k_n(m)$ an. Zunächst ist nach (6) und (7)

$$r(a_k x, n) - \frac{R(a_k x, n)}{\lg n} = -\frac{e^{2\pi i a_k x}}{\lg n} + \sum_{2 \leq \nu \leq n} e^{2\pi i a_k x \nu}\left(\frac{1}{\lg \nu} - \frac{1}{\lg n}\right)$$
$$= O(\lg^{-1} n) + O\left(\sum_{2 \leq \nu \leq n}\left(\frac{1}{\lg \nu} - \frac{1}{\lg n}\right)\right),$$

also

$$r(a_k x, n) - \frac{R(a_k x, n)}{\lg n} = O(n \lg^{-2} n),$$

denn es ist

$$\sum_{2 \leq \nu \leq n} \frac{1}{\lg \nu} = \int_2^n \frac{dt}{\lg t} + O(1) = \frac{n}{\lg n} + O(n \lg^{-2} n).$$

Für $|x| \leqq \omega n^{-1}$ ist daher nach (34) und Lemma 11

$$(64)\qquad r(a_k x, n) - \frac{R(a_k x, n)}{\lg n} = \frac{1}{\lg n}\, O\left(\min\left(\frac{1}{|x|}, \frac{n}{\lg n}\right)\right),$$

woraus wir wiederum mit Lemma 11

$$\prod_{k=1}^{s} r(a_k x, n) - \lg^{-s} n \prod_{k=1}^{s} R(a_k x, n) = \frac{1}{\lg^s n}\, O\left(\left(\min\left(\frac{1}{|x|}, n\right)\right)^{s-1} \min\left(\frac{1}{|x|}, \frac{n}{\lg n}\right)\right)$$
$$+ \frac{1}{\lg^s n}\, O\left(\left(\min\left(\frac{1}{|x|}, \frac{n}{\lg n}\right)\right)^s\right) = O\left(\lg^{-s} n \left(\min\left(\frac{1}{|x|}, n\right)\right)^{s-1} \min\left(\frac{1}{|x|}, \frac{n}{\lg n}\right)\right)$$
$$\text{für } |x| \leqq \omega n^{-1}$$

erhalten. Hieraus folgt jetzt nach (9) und (10)

$$(65)\quad k_n(m) - k_n'(m) = \lg^{-s} n\, O\left(\int_0^{n^{-1}} \frac{n^s}{\lg n}\, dx + \int_{n^{-1}}^{\lg n\, n^{-1}} \frac{n}{x^{s-1} \lg n}\, dx + \int_{\lg n\, n^{-1}}^{\omega n^{-1}} \frac{dx}{x^s}\right)$$
$$= O(n^{s-1} \lg^{-s-1} n).$$

Weiter ist nach (10) und (11)

$$(66)\quad k_n'(m) - k_n''(m)$$
$$= \lg^{-s} n\, O\left(\int_{\omega n^{-1}}^{\frac{1}{2|A_s|}} \left|\prod_{k=1}^{s} R(a_k x, n)\right| dx\right) + \lg^{-s} n\, O\left(\int_{\frac{1}{2|A_s|}}^{\frac{1}{2}} \left|\prod_{k=1}^{s} R(a_k x, n)\right| dx\right).$$

Das erste Fehlerglied wird nach Lemma 11 abgeschätzt:

$$(67)\qquad \int_{\omega n^{-1}}^{\frac{1}{2|A_s|}} \left|\prod_{k=1}^{s} R(a_k x, n)\right| dx = O\left(\int_{\omega n^{-1}}^{\frac{1}{2|A_s|}} \frac{dx}{x^s}\right) = O(n^{s-1} \omega^{1-s}),$$

während wir für das zweite nach Lemma 12

$$\int_{\frac{1}{2|A_s|}}^{\frac{1}{2}} \left| \prod_{k=1}^{s} R(a_k x, n) \right| dx = O(n \lg^{s-1} n) \tag{68}$$

erhalten. (65) bis (68) ergeben zusammen

$$k_n(m) = k_n''(m) + O(n^{s-1} \lg^{-s-1} n). \tag{69}$$

Setzen wir nun (69) in (63) ein und beachten, daß nach (60), (61) und Lemma 10 sicher $S(m) = O(1)$ gilt, so erhalten wir

$$\lambda_n^{(s)}(m) = S(m)\, k_n''(m) + O(n^{s-1} \lg^{-s-1} n).$$

Nach (7), (11) und (21) ist nun offenbar

$$k_n''(m) = \frac{l_n^{(s)}(m)}{\lg^s n},$$

also

$$\lambda_n^{(s)}(m) = \frac{S(m)}{\lg^s n}\, l_n^{(s)}(m) + O(n^{s-1} \lg^{-s-1} n).$$

8. Insgesamt haben wir jetzt den folgenden

Satz 1. *Sind $s \geqq 3$ natürlich, $a_1, \ldots, a_s$ ganz, $a_i \neq 0$, $1 \leqq i \leqq s$, $(a_i, a_k) = 1$ für $i \neq k$, $A_s = \prod_{i=1}^{s} a_i$, so gibt es ein N derart, daß für alle $n \geqq N$ und jedes ganze m zwischen den Lösungsanzahlen $\lambda_n^{(s)}(m)$, $l_n^{(s)}(m)$ von*

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_s p_s = m, \quad 3 \leqq p_i \leqq n, \quad p_i \text{ prim}, \quad 1 \leqq i \leqq s,$$

und

$$a_1 \nu_1 + a_2 \nu_2 + \cdots + a_s \nu_s = m, \quad 1 \leqq \nu_i \leqq n, \quad \nu_i \text{ natürlich}, \quad 1 \leqq i \leqq s,$$

die Relation

$$\lambda_n^{(s)}(m) = \frac{S(m)}{\log^s n}\, l_n^{(s)}(m) + O\left(\frac{n^{s-1}}{\log^{s+1} n}\right) \tag{70}$$

besteht, wo

$$S(m) = \prod_{p \nmid A_s m} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p-1)^s}\right) \prod_{\substack{p \mid A_s m \\ p \mid (A_s, m)}} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p-1)^{s-2}}\right) \prod_{\substack{p \mid A_s m \\ p \nmid (A_s, m)}} \left(1 + \frac{(-1)^s}{(p-1)^{s-}}\right),$$

$$S(m) \geqq \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad m \equiv \sum_{1 \leqq i \leqq s} a_i \pmod 2,$$

$$\lambda_n^{(s)}(m) = S(m) = 0 \quad \text{für} \quad m \not\equiv \sum_{1 \leqq i \leqq s} a_i \pmod 2$$

ist und die Konstante in (70) nur von s und den a_i abhängt.

Mit Hilfe von Lemma 15 können wir hieraus für positive a_i mit $m = n$ (die Beschränkung $p_i \leqq n$ ist dann überflüssig) noch ein konkreteres Ergebnis erzielen:

Satz 2. *Sind $s \geqq 3$ und $a_1, \ldots, a_s$ natürliche Zahlen mit $(a_i, a_k) = 1$, $A_s = \prod_{i=1}^{s} a_i$, so gibt es ein N derart, daß alle Zahlen $n \geqq N$ mit $n \equiv \sum_{1 \leqq i \leqq s} a_i \pmod 2$ in der Form*

$$n = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_s p_s, \quad 3 \leqq p_i, \quad p_i \text{ prim}, \quad 1 \leqq i \leqq s,$$

darstellbar sind, und für die Lösungsanzahl $\lambda_n^{(s)}(n)$ dieser Gleichung gilt

$$\lambda_n^{(s)}(n) = \frac{S(n)}{(s-1)!\, A_s} \frac{n^{s-1}}{\log^s n} + O\left(\frac{n^{s-1}}{\log^{s+1} n}\right),$$

wo

$$S(n) = \prod_{p \nmid A_s n} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p-1)^s}\right) \prod_{\substack{p \mid A_s n \\ p \mid (A_s, n)}} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p-1)^{s-2}}\right) \prod_{\substack{p \mid A_s n \\ p \nmid (A_s, n)}} \left(1 + \frac{(-1)^s}{(p-1)^{s-1}}\right)$$

gleichmäßig in n positiv ist.

Durch weitere Spezialisierung ($s = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $A_s = 1$) erhält man unmittelbar das bekannte Vinogradovsche Resultat:

Satz 3. *Es gibt ein N derart, daß alle Zahlen $n \geqq N$ mit $n \equiv 1 \pmod 2$ in der Form*

$$n = p_1 + p_2 + p_3, \quad 3 \leqq p_i, \quad p_i \text{ prim}, \quad i = 1, 2, 3,$$

darstellbar sind, und für die Lösungsanzahl $\lambda_n^{(3)}(n)$ dieser Gleichung gilt

$$\lambda_n^{(3)}(n) = \frac{S(n)}{2} \frac{n^2}{\log^3 n} + O\left(\frac{n^2}{\log^4 n}\right), \tag{71}$$

wo

$$S(n) = \prod_{p \nmid n} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

gleichmäßig in n positiv ist.

Bei Vinogradov trägt übrigens das Fehlerglied in (71) noch den Faktor $(\log n)^{\frac{1}{2}} \log\log n$.

Für den noch verbleibenden Fall, daß nicht alle a_i dasselbe Vorzeichen besitzen (falls alle $a_i < 0$ sind, benutze man Satz 2 entsprechend für negatives $n \leqq -N$), beschränken wir uns auf den

Satz 4. *Sind $s \geqq 3$ natürlich, $a_1, \ldots, a_s$ ganze Zahlen mit nicht sämtlich gleichen Vorzeichen, $a_i \neq 0$ für $1 \leqq i \leqq s$, $(a_i, a_k) = 1$ für $i \neq k$, so läßt sich jedes ganze (also nicht nur jedes hinreichend große positive) m mit $m \equiv \sum_{1 \leqq i \leqq s} a_i \pmod 2$ in der Form*

$$m = a_1 p_1 + \cdots + a_s p_s, \quad 3 \leqq p_i, \quad p_i \text{ prim}, \quad 1 \leqq i \leqq s, \tag{72}$$

darstellen. Überdies besitzt (72) für jedes solche m unendlich viele Lösungen in Primzahlen.

Offenbar genügt es, zu zeigen, daß $\lambda_n^{(3)}(m)$ als Funktion von n für

$$m \equiv \sum_{1 \leqq i \leqq s} a_i \pmod 2 \tag{73}$$

im indefiniten Falle nicht beschränkt ist. Um dieses zu beweisen, geben wir ein m nach (73) fest vor und nehmen nun im Gegenteil an, daß für alle n

$$\lambda_n^{(3)}(m) \leqq C \tag{74}$$

gelten möge. Nach den Voraussetzungen des Satzes 4 folgern wir aus Satz 1

$$\lambda_n^{(3)}(m) = \frac{S(m)}{\lg^3 n} l_n^{(3)}(m) + O(n^2 \lg^{-4} n) \qquad \text{für } n \geqq N$$

oder nach (74)

$$\frac{S(m)}{\lg^3 n} l_n^{(3)}(m) \leqq c_1 n^2 \lg^{-4} n \qquad \text{für } n \geqq N,$$

wo c_1 eine gewisse positive Konstante bezeichnet, also nach Lemma 14 und Lemma 17

$$\frac{1}{72 \mid a_1 a_2 a_3 \mid} \frac{n^2}{\lg^3 n} \leqq c_1 n^2 \lg^{-4} n \qquad \text{für } n \geqq \max(N, 6 \mid m \mid),$$

was offenbar für hinreichend großes n nicht richtig bleibt.

Zweiter Teil.

9. In diesem Teil sei

$G_n(m)$ die Anzahl der geordneten Paare p_1, p_2 mit

$$m = p_1 + p_2, \quad 3 \leqq p_i \leqq n, \quad i = 1, 2, \tag{75}$$

insbesondere

$G(m)$ die Anzahl der geordneten Paare p_1, p_2 mit

$$m = p_1 + p_2, \quad 3 \leqq p_i, \quad i = 1, 2, \tag{76}$$

so daß

$$G_n(m) = G(m) \quad \text{für} \quad m \leqq n \tag{77}$$

gilt. Ferner sei

$$J_n(m) = \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} r^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx, \tag{78}$$

$$\tilde{S}_\omega(m) = \sum_{1 \leqq q \leqq \omega} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} D_q(m). \tag{79}$$

10. Nach (5) ist ersichtlich

$$G_n(m) = \int_{\mathfrak{M}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx + \int_{\mathfrak{m}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx, \tag{80}$$

wo wieder wie bei (55) mit (8)

$$\int_{\mathfrak{M}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = \sum_{1 \leqq q \leqq \omega} \sum_{\substack{1 \leqq l \leqq q \\ (l, q) = 1}} e^{-\frac{2\pi i l m}{q}} \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} \varrho^2\left(\frac{l}{q} + x, n\right) e^{-2\pi i x m} dx \tag{81}$$

ist.

Aus (57) schließen wir mit $s = 2$, $a_1 = a_2 = 1$ (zur Herleitung von (57) hatten wir $s \geqq 3$ nicht benutzt)

$$\varrho^2\left(\frac{l}{q} + x, n\right) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} r^2(x, n) + O\left(\frac{n\omega^{-4}}{\lg n} \frac{1}{n^{-1} + |x|}\right) + O(n\omega^{-8})$$

$$\text{für } |x| \leqq \omega n^{-1}, \; 1 \leqq q \leqq \omega.$$

Verwenden wir diese Approximation in (81), so folgt mit (12), (27), (78) und (79)

$$\int_{\mathfrak{M}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = \tilde{S}_\omega(m) J_n(m) + O(n\omega^{-2}). \tag{82}$$

11. Nach (34) und (78) ist dann weiter

$$J_n(m) - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = O\left(\lg^{-2} n \int_{\omega n^{-1}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2}\right) = O(n\omega^{-1} \lg^{-2} n) \tag{83}$$

und nach (31) und Lemma 6

$$\tilde{S}_\omega(m) = \sum_{1 \leqq q \leqq \omega} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} D_q(m) = O\left(\sum_{1 \leqq q \leqq \omega} \frac{1 + \lg q}{q}\right) = O(\lg^2 n), \tag{84}$$

so daß jetzt (82) bis (84)

$$\int_{\mathfrak{M}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = \tilde{S}_\omega(m) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} r^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx + O(n\omega^{-1})$$

ergeben. Hieraus könnte man nun leicht auf

$$G(n) = S(n) \frac{n}{\lg^2 n} + \int_{\mathfrak{m}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x n} dx + O\left(\frac{n}{\lg^2 n} \frac{\lg\lg n}{\sqrt{\lg n}}\right), \tag{85}$$

$$S(n) = 2 \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{2 < p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p-2}\right),$$

schließen, doch folgt damit noch nichts über das Verschwinden oder Nichtverschwinden von $G(n)$. Hierzu bedürfte es noch einer Aussage über das $\mathfrak{m}$-Integral. Für dieses versagt jedoch das übliche Verfahren bei der Vinogradovschen Methode. Wollten wir nämlich wie dort das $\mathfrak{m}$-Integral durch das Hereinziehen der Beträge abschätzen, so entstünde das Integral

$$I_{\mathfrak{m}}(n) = \int_{\mathfrak{m}} |\varrho^2(x, n)|\, dx.$$

Für dieses läßt sich jedoch ohne Mühe mit einer gewissen positiven Konstanten c

$$I_{\mathfrak{m}}(n) > c\frac{n}{\lg n}$$

zeigen, so daß dieses also von höherer Größenordnung als das vermeintliche Hauptglied ist. Aussichtsreicher schiene dieses Verfahren allerdings, wenn man $\mathfrak{m}$ und damit auch $I_{\mathfrak{m}}(n)$ dadurch verkleinerte, daß man $\omega = n^{\delta}$ statt $\omega = \log^{\alpha} n$ wählte. Aber dies führt, wenn man δ mit Rücksicht auf die Anwendung des Primzahlsatzes auf $\mathfrak{M}$ größtmöglich (nämlich unter Voraussetzung der Richtigkeit der erweiterten Riemannschen Vermutung) wählt, doch nur wieder zu

$$I_{\mathfrak{m}}(n) > S(n)\frac{n}{\lg^2 n}.$$

Auf Grund von (85) wurden bereits Hardy und Littlewood[12]) auf die Vermutung

$$G(n) \sim S(n)\frac{n}{\lg^2 n}, \quad n \equiv 0 \pmod 2, \tag{86}$$

geführt. Sie vermuteten also keinen Einfluß des $\mathfrak{m}$-Integrales auf das Hauptglied. Für $29\,982 \leqq n \leqq 30\,080$ und $120\,072 \leqq n \leqq 120\,170$ hat Nils Pipping[13]) Vergleiche zwischen $G(n)$ und der rechten Seite von (86) angestellt und dabei eine recht gute Übereinstimmung gefunden. Wir wollen uns hier die Aufgabe stellen nachzuweisen, daß (86) im Mittel richtig ist, und zwar indem wir zwei Mittelwertsätze für $G(n)$, einmal für ein möglichst kleines Intervall, zum anderen über eine arithmetische Progression mit verhältnismäßig großer Differenz, beweisen werden.

12. Zunächst setzen wir noch

$$u = n\omega^{-\frac{1}{2}}. \tag{87}$$

Nach (80) ist dann

$$\sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} G_n(m) = \sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} \int_{\mathfrak{M}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx + \sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} \int_{\mathfrak{m}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx. \tag{88}$$

Die zweite Summe auf der rechten Seite schätzen wir mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ab:

$$\left| \sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} \int_{\mathfrak{m}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx \right| \leqq \int_{\mathfrak{m}} |\varrho^2(x, n)| \frac{dx}{\sin \pi x} \leqq + \sqrt{\int_{\mathfrak{m}} |\varrho^4(x, n)|\, dx \int_{\mathfrak{m}} \frac{dx}{\sin^2 \pi x}}. \tag{89}$$

---

[12]) *G. H. Hardy* und *J. E. Littlewood*, Some problems of „partitio numerorum", Acta Math. **44** (1922).

[13]) *N. Pipping*, Über Goldbachsche Spaltungen großer Zahlen, Soc. Sc. Fenn. Comm. Phys. Math. **4**, Nr. 10 (1927); Die Goldbachschen Zahlen $G(x)$ für $x = 120\,072 - 120\,170$, ebendort **4**, Nr. 25 (1928).

Nun ist bei Beachtung von (22)

$$(90)\qquad \int\limits_{\mathfrak{m}} \frac{dx}{\sin^2 \pi x} \leqq \int\limits_{\omega n^{-1}}^{1-\omega n^{-1}} \frac{dx}{\sin^2 \pi x} = \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg}(\pi \omega n^{-1}) = O(n\omega^{-1})$$

und nach Lemma 3

$$(91)\qquad \int\limits_{\mathfrak{m}} |\varrho^4(x, n)|\, dx \leqq \max_{x \in \mathfrak{m}} |\varrho^2(x, n)| \int\limits_{\mathfrak{J}} |\varrho^2(x, n)|\, dx = O(n^3 \log^{1-\frac{8\alpha}{25}} n).$$

Daher folgt aus (89) bis (91)

$$(92)\qquad \left| \sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} \int\limits_{\mathfrak{m}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x n} dx \right| = O(n^2 \log^{\frac{1}{2}-\frac{33\alpha}{50}} n).$$

Zur Bestimmung der ersten Summe beachten wir zuerst für $n - u \leqq m \leqq n + u$ wegen (34) nach (78)

$$(93)\qquad J_n(m) - J_n(n) = O\left(\frac{n^2 u}{\lg^2 n} \int\limits_0^{n^{-1}} x dx + \frac{u}{\lg^2 n} \int\limits_{n^{-1}}^{u^{-1}} \frac{dx}{x} + \frac{1}{\lg^2 n} \int\limits_{u^{-1}}^{\omega n^{-1}} \frac{dx}{x^2}\right) = O\left(\frac{u}{\lg n}\right).$$

Dann folgt aus (82), (93), (84) und (87)

$$(94)\qquad \sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} \int\limits_{\mathfrak{M}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = J_n(n) \sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} \widetilde{S}_\omega(m) + O(n^2 \omega^{-\frac{5}{2}}).$$

Weiter ist nach (12), (37) und Lemma 6

$$\sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} \sum_{2 \leqq q \leqq \omega} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} D_q(m) = O\left(\sum_{2 \leqq q \leqq \omega} \frac{1}{\varphi^2(q)} \sum_{1 \leqq l < q} \frac{1}{\left\{\frac{l}{q}\right\}}\right)$$

$$= O\left(\sum_{2 \leqq q \leqq \omega} \frac{1}{\varphi^2(q)} \left(\sum_{1 \leqq l \leqq \frac{q}{2}} \frac{q}{l} + \sum_{\frac{q}{2} < l < q} \frac{q}{q-l}\right)\right) = O\left(\sum_{2 \leqq q \leqq \omega} \frac{\log^3 q}{q}\right) = O(\log^4 n),$$

also wegen $\frac{\mu^2(1)}{\varphi^2(1)} D_1(m) = 1$

$$(95)\qquad \sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} \widetilde{S}_\omega(m) = 2u + O(\log^4 n).$$

Berücksichtigen wir noch mit (34)

$$(96)\qquad J_n(m) = \int\limits_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} r^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = O\left(\frac{n^2}{\lg^2 n} \int\limits_0^{n^{-1}} dx + \frac{1}{\lg^2 n} \int\limits_{n^{-1}}^{\omega n^{-1}} \frac{dx}{x^2}\right) = O\left(\frac{n}{\lg^2 n}\right)$$

für jedes natürliche m, so folgt aus (94) und (95) jetzt

$$\sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} \int\limits_{\mathfrak{M}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = 2u J_n(n) + O(n \lg^2 n) + O(n^2 \omega^{-\frac{5}{2}}),$$

also mit (88) und (92)

$$(97)\qquad \sum_{n-u \leqq m \leqq n+u} G_n(m) = 2u J_n(n) + O(n^2 \log^{\frac{1}{2}-\frac{33\alpha}{50}}).$$

Um noch $J_n(n)$ zu bestimmen, greifen wir auf (64) zurück. Hiermit und nach Lemma 11 ist

$$(98)\qquad J_n(m) - \lg^{-2} n \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} R^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx$$

$$= O\left(\frac{n^2}{\lg^3 n}\int_0^{n^{-1}} dx + \frac{n}{\lg^3 n}\int_{n^{-1}}^{\lg n\, n^{-1}} \frac{dx}{x} + \int_{\lg n\, n^{-1}}^{\omega n^{-1}} \frac{dx}{x^2}\right) = O\left(\frac{n}{\lg^3 n}\lg\lg n\right).$$

Ferner ist nach Lemma 11 (jetzt ist ja $A_s = 1$)

$$(99)\qquad \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} R^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} R^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = O(n\omega^{-1}),$$

und da wegen (7)

$$(100)\qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} R^2(x, n)\, e^{-\pi i x m} dx = m - 1$$

ist, erhalten wir nun aus (97) bis (100)

$$\frac{1}{2u}\sum_{n-u \leq m \leq n+u} G_n(m) = \frac{n}{\lg^2 n} + O\left(\frac{n \lg\lg n}{\lg^3 n}\right).$$

Damit haben wir den

Satz 5. *Es bezeichne $G_n(m)$ die Anzahl der Zerlegungen*

$$m = p_1 + p_2,\ 3 \leq p_i \leq n,\ p_i \text{ prim},\ i = 1, 2.$$

Dann gilt für jedes positive β mit $u = n \log^{-\beta} n$

$$\frac{1}{2u}\sum_{n-u \leq m \leq n+u} G_n(m) = \frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{n \log\log n}{\log^3 n}\right).$$

Natürlich gilt ebenso der Mittelwertsatz

$$\frac{1}{u}\sum_{n-u \leq m \leq n} G(m) = \frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{n \log\log n}{\log^3 n}\right).$$

13. Für den Beweis des nächsten Mittelwertsatzes seien noch

$$(101)\qquad k \leq \omega \quad \text{natürlich},$$

$$(102)\qquad h \leq k \quad \text{natürlich},$$

$$(103)\qquad \nu_0 = \left[\frac{n-h}{k}\right],$$

$$(104)\qquad \gamma(n; k, h) = \sum_{\substack{p_1+p_2 \leq n \\ p_1+p_2 \equiv h(k) \\ 3 \leq p_i,\ i=1,2}} 1 = \sum_{\substack{m \leq n \\ m \equiv h(k)}} G(m),$$

$$(105)\qquad T(m; k, h) = \sum_{0 \leq \nu \leq m} \widetilde{S}_\omega(\nu k + h),$$

$$(106)\qquad B(k, h) = \sum_{d \mid k} \frac{\mu^2(d)}{\varphi^2(d)} D_d(h),$$

$$(107)\qquad U(m; k, h) = T(m; k, h) - mB(k, h),$$

$$(108)\qquad W_n(k) = \sum_{0 \leq \nu \leq \nu_0} J_n(\nu k).$$

14. Weiter benötigen wir folgende Hilfssätze:

Lemma 18. $$B(k, h) = O(\log^2 \log n).$$

Beweis. Nach (31) ist $|D_d(h)| \leqq \varphi(d)$ und daher folgt aus (106) mit Lemma 6, mit (101) und (4)

$$|B(k, h)| \leqq \sum_{d \mid k} \frac{1}{\varphi(d)} = O\left(\sum_{1 \leqq d \leqq k} \frac{1 + \lg d}{d}\right) = O(\lg^2 k) = O(\lg^2 \lg n).$$

Lemma 19. $$U(m; k, h) = O(\omega^3).$$

Beweis. Nach (105), (79) und (12) ist

$$T(m; k, h) = \sum_{0 \leqq v \leqq m} \sum_{1 \leqq q \leqq \omega} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \sum_{\substack{1 \leqq l \leqq q \\ (l, q) = 1}} e^{\frac{2\pi i l(vk+h)}{q}}$$

$$= (m+1) \sum_{q \mid k} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} D_q(h) + \sum_{\substack{1 \leqq q \leqq \omega \\ q \nmid k}} \sum_{\substack{1 \leqq l \leqq q \\ (l, q) = 1}} e^{\frac{2\pi i l k}{q}} \frac{1 - e^{\frac{2\pi i l k(m+1)}{q}}}{1 - e^{\frac{2\pi i l k}{q}}}.$$

Und hieraus folgt mit (106), (107), Lemma 18 und (37)

$$U(m; k, h) = O(\lg^2 \lg n) + O\left(\sum_{\substack{1 \leqq q \leqq \omega \\ q \nmid k}} \sum_{\substack{1 \leqq l \leqq q \\ (l, q) = 1}} \frac{1}{\left\{\frac{lk}{q}\right\}}\right) = O(\omega^3).$$

Lemma 20. *Für jedes l mit $0 \leqq l \leqq 2k$ ist bei beliebigem v*

$$J_n(vk + h) - J_n(vk + l) = O(\omega^2).$$

Beweis. Es ist nach (78), (4) und (34)

$$J_n(vk + h) - J_n(vk + l) = \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} r^2(x, n)\, e^{-2\pi i x v k}(e^{-2\pi i x h} - e^{-2\pi i x l})\, dx$$

$$= O\left(\frac{\omega^2}{n} \int_{-\omega n^{-1}}^{\omega n^{-1}} |r^2(x, n)|\, dx\right) = O(\omega^2).$$

Lemma 21. $$B(k, h) = \prod_{p \mid (k, h)} \left(1 + \frac{1}{p - 1}\right) \prod_{\substack{p \mid k \\ p \nmid h}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Beweis. In $B(k, h)$ sind die drei Funktionen $\mu(d)$, $\varphi(d)$ und $D_d(h)$ (vgl. (30)) multiplikativ und $\mu(1) = \varphi(1) = D_1(h) = 1$, also

$$B(k, h) = \prod_{p \mid k} \left(1 + \frac{D_p(h)}{(p-1)^2}\right).$$

Da nach Lemma 5

$$D_p(h) = \begin{cases} p - 1 & \text{für } p \mid h \\ -1 & \text{für } p \nmid h \end{cases},$$

gilt, folgt hieraus die Behauptung.

15. Nun ist nach (104), (75), (76), (77) und (5)

$$(109) \quad \gamma(n; k, h) = \sum_{\substack{1 \leqq m \leqq n \\ m \equiv h(k)}} \int_{\mathfrak{M}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx + \sum_{\substack{1 \leqq m \leqq n \\ m \equiv h(k)}} \int_{\mathfrak{m}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx,$$

worin nach (82)

$$(110) \quad \sum_{\substack{1 \leqq m \leqq n \\ m \equiv h(k)}} \int_{\mathfrak{M}} \varrho^2(x, n)\, e^{-2\pi i x m} dx = \sum_{\substack{1 \leqq m \leqq n \\ m \equiv h(k)}} \widetilde{S}_\omega(m)\, J_n(m) + O\left(\frac{n^2}{k\omega^2}\right).$$

gilt.

Die Summe über die Supplemente $\mathfrak{m}$ schätzen wir folgendermaßen ab. Es ist wegen (103), (102) und (37)

$$(111)\qquad \sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ m\equiv h(k)}} \int_{\mathfrak{m}} \varrho^2(x,n)\, e^{-2\pi i x m}\, dx = \int_{\mathfrak{m}} \varrho^2(x,n) \sum_{0\leq \nu\leq \nu_0} e^{-2\pi i x(\nu k+h)}\, dx$$

$$= \int_{\mathfrak{m}} \varrho^2(x,n)\, e^{-2\pi i x h} \frac{1-e^{-2\pi i x k(\nu_0+1)}}{1-e^{-2\pi i x k}}\, dx = O\left(\int_{\mathfrak{m}} |\varrho^2(x,n)| \frac{dx}{|\sin \pi k x|}\right)$$

$$= O\left(\max_{x\in\mathfrak{m}} \frac{1}{\{kx\}} \int_{\mathfrak{m}} |\varrho^2(x,n)|\, dx\right) = O\left(n \max_{x\in\mathfrak{m}} \frac{1}{\{kx\}}\right),$$

letzteres wegen

$$\int_{\mathfrak{m}} |\varrho^2(x,n)|\, dx \leqq \int_{\mathfrak{J}} |\varrho^2(x,n)|\, dx = \pi(n) = O(n).$$

Nun ist für alle $x \in \mathfrak{m}$

$$(112)\qquad \{kx\} \geqq k\omega n^{-1},$$

d. h. für alle natürlichen m

$$|kx - m| \geqq k\omega n^{-1}.$$

Denn wäre $|kx - m| < k\omega n^{-1}$ für ein m, so würden nach (101) die Zahlen $\frac{m}{(k,m)}$ und $\frac{k}{(k,m)}$ die Bedingungen (15) bis (18) erfüllen, also $x \in \mathfrak{M}$ sein.

16. Die Abschätzungen (111), (112) und (110) ergeben nun nach (109) und (4) insgesamt

$$(113)\qquad \gamma(n;k,h) = \sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ m\equiv h(k)}} \widetilde{S}_\omega(m)\, J_n(m) + O\left(\frac{n^2}{k\omega}\right).$$

Für das Hauptglied erhalten wir bei partieller Summation wegen (103), (102), (105) und (107)

$$\sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ m\equiv h(k)}} \widetilde{S}_\omega(m)\, J_n(m) = \sum_{0\leq \nu\leq \nu_0} \big(T(\nu;k,h) - T(\nu-1;k,h)\big)\, J_n(\nu k+h)$$

$$= B(k,h) \sum_{0\leq \nu\leq \nu_0} J_n(\nu k+h) + U(\nu_0;k,h)\, J_n(\nu_0 k+h)$$

$$+ \sum_{0\leq \nu\leq \nu_0} U(\nu;k,h)\big(J_n(\nu k+h) - J_n((\nu+1)k+h)\big),$$

und wenn wir hierin Lemma 19 und Lemma 20 mit $l = k + h$ verwenden, mit (96) und (103)

$$\sum_{\substack{1\leq m\leq n\\ m\equiv h(k)}} \widetilde{S}_\omega(m)\, J_n(m) = B(k,h) \sum_{0\leq \nu\leq \nu_0} J_n(\nu k+h) + O(n\omega^3) + O\left(\frac{n}{k}\omega^5\right),$$

also mit (113)

$$(114)\qquad \gamma(n;k,h) = B(k,h) \sum_{0\leq \nu\leq \nu_0} J_n(\nu k+h) + O\left(\frac{n^2}{k\omega}\right).$$

Weiter ist nach (108) und Lemma 20, wenn wir dort $l = 0$ setzen,

$$\sum_{0\leq \nu\leq \nu_0} J_n(\nu k+h) - W_n(k) = O\left(\frac{n\omega^2}{k}\right),$$

so daß wir wegen (114) und Lemma 18 jetzt

$$(115)\qquad \gamma(n;k,h) = B(k,h)\, W_n(k) + O\left(\frac{n^2}{k\omega}\right)$$

erhalten.

Nun ist nach (98) bis (100)

$$J_n(m) = \frac{m}{\lg^2 n} + O\left(\frac{n}{\lg^3 n} \lg\lg n\right) \quad \text{für } 0 \leqq m \leqq n. \tag{116}$$

Mit Hilfe von (116) können wir jetzt aber $W_n(k)$ nach (108) bestimmen und bekommen

$$W_n(k) = \frac{k}{\lg^2 n} \sum_{0 \leqq \nu \leqq \nu_0} \nu + O\left(\frac{n^2}{k \lg^3 n} \lg\lg n\right) = \frac{n^2}{2k \lg^3 n} + O\left(\frac{n^2}{k \lg^3 n} \lg\lg n\right).$$

Setzen wir dies in (115) ein, so folgt endlich mit Lemma 18 wegen (4)

$$\gamma(n; k, h) = \frac{B(k, h)}{2k} \frac{n^2}{\lg^2 n} + O\left(\frac{n^2}{k \lg^3 n} \lg^3 \lg n\right). \tag{117}$$

17. Ist $k \equiv 0 \pmod 2$ und $h \equiv 1 \pmod 2$, so ist nach der Definition (104) die Anzahl $\gamma(n; k, h) = 0$. In allen anderen Fällen ist nach Lemma 21

$$B(k, h) \geqq \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \geqq \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}$$

und daher in (117) das Fehlerglied von kleinerer Größenordnung als das Hauptglied. Mit (117) und Lemma 21 haben wir so noch den folgenden Mittelwertsatz bewiesen (die Beschränkung $\alpha \geqq 25$ wäre hierbei nicht nötig gewesen):

Satz 6. *Für die Lösungsanzahl $\gamma(n; k, h)$ von*

$$p_1 + p_2 \equiv h \pmod k, \quad p_1 + p_2 \leqq n, \quad 3 \leqq p_i, \quad p_i \text{ prim}, \quad i = 1, 2,$$
$$1 \leqq h \leqq k \leqq \log^\alpha n, \ \alpha \text{ beliebig groß, aber fest } (\alpha \geqq 25),$$

gilt

$$\frac{\gamma(n; k, h)}{\frac{n}{k}} = \frac{k}{n} \sum_{\substack{m \leqq n \\ m \equiv h(k)}} G(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \equiv 0 \pmod 2 \text{ und } h \equiv 1 \pmod 2, \\ \frac{1}{2} \prod_{p \mid (k, h)} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \prod_{\substack{p \mid k \\ p \nmid h}} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{n}{\log^2 n} + O\left(\frac{n \log^3 \log n}{\log^3 n}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit sind alle in der Einleitung angekündigten Sätze bewiesen.

Eingegangen 13. Juni 1951.

Arithmetischer Beweis der Riemannschen Vermutung in Kongruenzfunktionenkörpern beliebigen Geschlechts.*)

Von *Peter Roquette* in München.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Vorbemerkungen zur Bezeichnungsweise.

§ 1. Differenten und Diskriminanten von Isomorphismensystemen.
1. Reduzierte Isomorphismensysteme. Elementdifferenten und -diskriminanten.
2. Differenten reduzierter Isomorphismensysteme.
3. Diskriminanten reduzierter Isomorphismensysteme.
4. Untersuchung der „besonderen" Isomorphismensysteme.

§ 2. Arithmetik in einem Doppelkörper.
5. Definition der Doppelkörper. Konstantenerweiterungen.
6. Die Divisorengruppe eines Doppelkörpers.
7. Kennzeichnung der nichtkonstanten Primdivisoren eines Doppelkörpers.
8. Integritätsbereiche in einem Doppelkörper.

§ 3. Divisorenreste in einem Doppelkörper.
9. Arithmetische Theorie der Korrespondenzen.
10. Definition der Divisorenrestabbildungen.
11. Arithmetische Eigenschaften der Divisorenreste.
12. Der Zusammenhang zwischen den Divisorenresten und den Elementardifferenten.

§ 4. Die Restmultiplikation der Divisoren eines Doppelkörpers und die σ-Metrik.
13. Definition und Eigenschaften der Restmultiplikation.
14. Differentialdivisoren als Restprodukte von Primdivisoren ersten Grades.
15. Die σ-Metrik der gröberen Divisorklassen. Formulierung des Hauptsatzes.
16. Beweis des Hauptsatzes über die σ-Metrik.

§ 5. Die Riemannsche Vermutung über die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen.
17. Symmetrische Doppelkörper mit absolut-algebraischem Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik.
18. Formulierung und Beweis der Riemannschen Vermutung.

Einleitung[1]).

Ist K_0 ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1 über dem endlichen Konstantenkörper Ω_0 (kurz: ein Kongruenzfunktionenkörper), so liegen die Nullstellen der zugehörigen Zetafunktion $\zeta(s)$ alle auf der Geraden $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Dieser Satz, der das Analogon zur Riemannschen Vermutung über die Nullstellen der Zetafunktion eines algebraischen Zahlkörpers darstellt, und der von uns deshalb kurz „die Riemannsche Vermutung" genannt wird, soll in dieser Arbeit auf rein arithmetischem Wege bewiesen werden.

---

*) Diese Arbeit wurde im Jahre 1951 von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Hamburg als Dissertation angenommen. Eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse und Beweismethoden ist inzwischen im „Archiv der Mathematik", Bd. 4, erschienen.

[1]) Das Literaturverzeichnis befindet sich am Schluß der Arbeit. Fettgedruckte Ziffern beziehen sich auf die Abschnitte der Arbeit; Ziffern in eckigen Klammern auf die Zitate des Literaturverzeichnisses.

Die Anregung zur Durchführung dieser Arbeit erhielt ich von Herrn Professor H. Hasse in einer Unterredung über die Arbeit [7]. In dieser wird die Riemannsche Vermutung auf algebraisch-geometrischem Wege bewiesen. Die Verbindung zwischen der Theorie der algebraischen Funktionenkörper und der der algebraischen Kurven ergibt sich ja bekanntlich daraus, daß die Primdivisoren der algebraisch-abgeschlossenen Konstantenerweiterung K/Ω eines algebraischen Funktionenkörpers K_0/Ω_0 als Punkte einer algebraischen Kurve gedeutet werden können, und sich umgekehrt K/Ω aus dieser dem Typus nach als der Körper aller „Funktionen" auf der Kurve im Sinne der algebraischen Geometrie bestimmt (vgl. [7], S. 63/64; [4] § 1, 1.). Beim Beweis der Riemannschen Vermutung in [7] wird nun weitgehend von der immerhin recht umfangreichen und komplizierten Theorie der Durchschnittsprodukte algebraischer Mannigfaltigkeiten Gebrauch gemacht. Daher entstand die Frage, ob sich nicht ein direkter arithmetischer Beweis finden ließe, der den Umweg über die algebraische Geometrie vermeidet. Wie schon gesagt, zeigt die vorliegende Arbeit einen solchen Beweis auf. Es erwies sich dabei, daß dieser erheblich einfacher gestaltet werden konnte als die bisher veröffentlichten Beweise[2]).

Für einen *elliptischen* Kongruenzfunktionenkörper K_0/Ω_0 war die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung durch die Arbeiten von H. Hasse schon seit längerer Zeit bekannt. Der Beweis für diesen Fall verläuft etwa folgendermaßen (man vgl. die Darstellung dieses Beweises in [4]): Man studiert den zu K_0 gehörigen Multiplikatorenring R. In diesem gibt es einen Multiplikator π, der sich auf Grund der allgemeinen Bildungsvorschrift für die Multiplikatoren von K_0 aus dem Isomorphismus „Potenzierung mit q" von K_0/Ω_0 herleitet, wobei q die Elementeanzahl von Ω_0 ist. Es wird nun zunächst die Struktur des Multiplikatorenringes R untersucht und gezeigt, daß jeder Multiplikator $\varkappa$ aus R, insbesondere also π, einer quadratischen Gleichung $f_\varkappa(t) = at^2 + bt + c = 0$ mit ganzrationalen Koeffizienten genügt, deren Diskriminante nichtpositiv ist:

$$d_\varkappa = b^2 - 4ac \leqq 0. \tag{1}$$

Für π selbst ergibt eine genaue Ausrechnung

$$f_\pi(t) = t^2 + (N_1 - (q+1))\,t + q,$$

wobei N_1 die Anzahl der Primdivisoren ersten Grades von K_0 ist. Die Tatsache, daß die Diskriminante $d_\pi \leqq 0$ ist, bedeutet, daß die Nullstellen von $f_\pi(t)$ konjugiert komplex oder reell zusammenfallend sind, also jedenfalls den gleichen Betrag besitzen. Da ihr Produkt gleich q ist, so ist ihr absoluter Betrag gleich $q^{\frac{1}{2}}$. — Andererseits wird gezeigt, daß man das Polynom $f_\pi(t)$ aus der zu K_0 gehörigen Zetafunktion $\zeta(s)$ und aus der zu einem rationalen Funktionenkörper über Ω_0 gehörigen Zetafunktion

$$\zeta_{rat}(s) = \frac{1}{1-\frac{q}{q^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}$$

in der Form

$$\frac{1}{q^{2s}} \cdot f_\pi(q^s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta_{rat}(s)}$$

erhält. Da $\zeta_{rat}(s)$ nullstellenfrei ist und dieselben Pole besitzt wie $\zeta(s)$, so folgt daraus, daß die Nullstellen von $\zeta(s)$ gleich denen von $f_\pi(q^s)$ sind. Da nun für die letzteren nach dem oben Gesagten $|q^s| = q^{\frac{1}{2}}$ ist, so ersieht man daraus die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung, nämlich $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

---

[2]) Außer dem Beweis in der Arbeit [7] von *A. Weil* existiert noch ein zweiter, ebenfalls algebraisch-geometrischer Beweis von *J. Igusa* (Journ. Math. Soc. Japan **1** (1949), S. 147).

Wollte man diesen Beweis der Riemannschen Vermutung für elliptische auf beliebige Kongruenzfunktionenkörper ausdehnen, so hätte man zunächst entsprechende Strukturaussagen über ihre Multiplikatorenringe zu beweisen. Insbesondere wäre die von H. Hasse wesentlich benützte *Normfunktion* der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper auch für Funktionenkörper höheren Geschlechts zu erklären und zu untersuchen. H. Hasse deutet in seiner Arbeit selbst an, wie dies zu geschehen hätte, nämlich durch die Betrachtung des zugehörigen Körpers der Abelschen Funktionen (vgl. [4]).

Wir werden jedoch diesen von H. Hasse in seiner Arbeit vorgeschlagenen Weg nicht gehen. Es erweist sich nämlich als zweckmäßig, statt der H. Hasseschen *multiplikativen* Normfunktion eine *additive* Funktion zur Untersuchung der Multiplikatoren zu verwenden. *Wir werden in dieser Arbeit im Multiplikatorenring R eine ganzzahlige Metrik $\sigma(\alpha, \beta)$ definieren* (d. h. eine ganzzahlige, symmetrische und bilineare Funktion der Multiplikatoren α, β) *und zeigen, daß sie positiv definit ist*: $\sigma(\alpha, \alpha) > 0$ für $\alpha \neq 0$. Durch Berechnung der Werte, die σ für den Multiplikator π und für dessen Potenzen annimmt, wird sich dann unter Ausnutzung der Tatsache, daß σ positiv definit ist, die Riemannsche Vermutung in einfacher Weise ergeben.

Schon in [7] verwendet A. Weil eine *additive* Spurfunktion zur Untersuchung der Korrespondenzenklassen ξ einer algebraischen Kurve, welche in der algebraischen Geometrie das Analogon zu den Multiplikatoren eines algebraischen Funktionenkörpers darstellen. Dieser Spurfunktion $\sigma(\xi)$ von A. Weil entspricht in unserer arithmetischen Theorie die Funktion $\sigma(\alpha, \varepsilon)$ der Multiplikatoren α, wobei ε der Einsmultiplikator ist. Da ich, wie oben erwähnt, vor Durchführung dieser Arbeit die A. Weilsche Arbeit [7] studiert habe, so ist es klar, woher ich die Anregung zur Einführung der σ-Metrik erhielt. Auch in manch anderer Hinsicht habe ich aus den interessanten Ausführungen A. Weils wertvolle Anregungen entnommen. Ich habe es aber absichtlich vermieden, [7] im Einzelnen zu zitieren, da es ja gerade ein Hauptziel dieser Arbeit ist, dem algebraisch-geometrischen Beweis der Riemannschen Vermutung von A. Weil einen davon unabhängigen, auf rein arithmetischen Begriffsbildungen beruhenden Beweis gegenüberzustellen.

Nach dem bisher Gesagten liegt das Schwergewicht dieser Arbeit auf zwei Dingen: erstens auf der Definition der σ-Metrik und zweitens auf dem Beweis des Hauptsatzes, daß diese positiv definit ist. Beiden sind die §§ 1—4 gewidmet, während in § 5 die Riemannsche Vermutung aus den erhaltenen Sätzen über die σ-Metrik abgeleitet wird. Im Einzelnen ist zu unseren Ausführungen folgendes zu sagen:

Den Multiplikatorenring R eines Kongruenzfunktionenkörpers K_0/Ω_0 erhält man auf folgende Weise: Zunächst gehe man von K_0/Ω_0 zur algebraisch-abgeschlossenen Konstantenerweiterung K/Ω über. Dann bilde man ein unabhängiges Kompositum $\Delta = K \times K'$ von K mit einem zu K isomorphen Körper K'[3]), d. h. einen *Doppelkörper* zu K. Auf Grund der M. Deuringschen Auffassung der Divisoren von Δ als Korrespondenzen von K in sich entsprechen die gröberen Divisorklassen von Δ umkehrbar eindeutig den Multiplikatoren von K_0 und können mit diesen identifiziert werden (vgl. [1], § 5). Zur Definition der σ-Metrik werden wir daher zweckmäßigerweise einen Doppelkörper $\Delta = K \times K'$ mit *beliebigem* algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper Ω zugrundelegen und dessen gröbere Divisorklassen untersuchen. In der Tat gelten die Ausführungen der §§ 1—4 für beliebige solche Doppelkörper; insbesondere kann Ω der komplexe Zahlkörper sein. Auch ist es nicht notwendig, daß K und K' isomorph sind, wie es sein muß, wenn die gröberen Klassen von Δ im Sinne der Korrespondenzenmultiplikation einen Ring bilden sollen. Gemäß dem oben Gesagten werden wir nämlich nur *additive* Funktionen der gröberen

[3]) Das $\times$-Zeichen zur Bezeichnung eines unabhängigen Kompositums, also eines Doppelkörpers, wird in 5. eingeführt.

Divisorklassen untersuchen, und daher auch nur die Divisor*addition*, aber niemals die Divisormultiplikation (im Sinne der Korrespondenzentheorie) in unserer Arbeit heranziehen. Neben dem Vorteil, daß unsere Überlegungen für beliebige Doppelkörper gelten, schafft diese ausschließliche Betrachtung der Divisoraddition beim Beweise des Hauptsatzes über die σ-Metrik übersichtlichere Verhältnisse. In einer weiteren Arbeit beabsichtige ich, auf das Verhalten der σ-Metrik bei der Korrespondenzenmultiplikation einzugehen.

Die Grundlage für die gesamten Ausführungen dieser Arbeit bildet die in § 2 entwickelte *Arithmetik in einem Doppelkörper.* Diese unterscheidet sich von der bisher üblichen kurz gesagt dadurch, daß ein Doppelkörper $\Delta = K \times K'$ nicht nur über einem der beiden komponierten Körper, etwa über K, als algebraischer Funktionenkörper Δ/K betrachtet wird, sondern gleichzeitig als algebraischer Funktionenkörper Δ/K' über dem anderen Körper K'. Die Wahrung dieser Symmetrie in K und K' wird überhaupt erst die weiteren Ausführungen dieser Arbeit ermöglichen. Teilweise wurde diese Symmetrie auch in der Literatur bereits hervorgehoben, nämlich bei der Definition des Rosatischen involutorischen Antiautomorphismus der Divisorenklassengruppe von Δ (vgl. [2]).

In § 3 wird die Theorie der *Divisorenreste* in einem Doppelkörper entwickelt. Die dort erklärten Divisorenrestabbildungen sind arithmetische Homomorphismen der Divisorengruppe des Doppelkörpers Δ in dem in § 2 erklärten Sinne. In dieser glatten Formulierung zeigt sich bereits der Vorzug der in K und K' symmetrischen Behandlung der Arithmetik in einem Doppelkörper, denn eine entsprechende Aussage für die Divisorengruppen von Δ/K bzw. Δ/K' ist nicht richtig. — Die Divisorenresttheorie in § 3 stellt das (birational invariante) Analogon zu der von M. Deuring [1] behandelten Theorie der Restideale dar, indem wir statt der dort auftretenden Reste nach einem *konstanten* Primdivisor hier die Reste nach einem *nichtkonstanten* Primdivisor betrachten. Übrigens lassen sich die entsprechenden Sätze aus der M. Deuringschen Arbeit [1] auf eine ganz ähnliche Art wie die unseren beweisen[3a]).

Die Definition der *σ-Metrik* in § 4 ist nun folgende: Als Metrik der Divisorengruppe von Δ ist σ die Differenz zweier Metriken ψ und χ, deren erste ψ sich aus den Gradfunktionen der Divisoren von Δ zusammensetzt, und deren zweite χ gleich dem Grad des „*Restprodukts*" ist. Dieses Restprodukt wird in § 4 gleich zu Beginn erklärt und untersucht. Seine Eigenschaften beruhen auf der Theorie der Divisorenreste (§ 3) einerseits und auf der M. Deuringschen Theorie der Korrespondenzen ([1]) andererseits, insbesondere auf dem Additionstheorem. Zum leichteren Verständnis dieser Arbeit haben wir die von uns benötigten Korrespondenzensätze in einem besonderen Abschnitt **9.** zusammengestellt.

Der *Beweis des Hauptsatzes* über die σ-Metrik beruht auf der Feststellung, daß zu jedem ganzen Divisor eines Doppelkörpers $\Delta = K \times K'$ ein System von Isomorphismen von K in eine algebraische Erweiterung von K' gehört (vgl. **7.**). Es gelingt, erstens in jeder von Null verschiedenen gröberen Klasse einen „besonderen" Vertreter $\mathfrak{b}$ zu finden, dessen zugehöriges Isomorphismensystem $\boldsymbol{\beta}$ ein „besonderes" in einem genau festzulegenden Sinne und daher besonders einfach zu behandeln ist, und zweitens den Hauptsatz auf eine Ungleichung über den Grad der „Diskriminante" dieses Isomorphismensystems $\boldsymbol{\beta}$ zurückzuführen (vgl. **16.**).

Somit kann der Hauptsatz als ein Satz über Diskriminanten von Isomorphismensystemen ausgesprochen werden, welcher im Rahmen der allgemeinen Theorie der Isomorphismensysteme verhältnismäßig einfach zu beweisen ist. Es ist jedoch dazu notwendig, zunächst diese allgemeine Theorie der Isomorphismensysteme darzustellen. Dies

---

[3a]) Bemerkung bei der Korrektur: Vgl. meine inzwischen erschienene Arbeit: Arithmetische Untersuchung des Abelschen Funktionenkörpers, der einem Funktionenkörper höheren Geschlechts zugeordnet ist, Abh. Math. Sem. Hamburg **18**, 144–178 (1952).

geschieht schon zu Beginn der Arbeit in § 1, da sich die Heranziehung der Differenten- und Diskriminantensätze von Isomorphismensystemen schon bei der Untersuchung der Divisorenreste als sehr nützlich erweist, und da wir dann diese Sätze zur Verfügung haben wollen. Wir haben die Differenten- und Diskriminantentheorie von Isomorphismensystemen als eine direkte Verallgemeinerung der gewöhnlichen Differenten- und Diskriminantentheorie der endlich-algebraischen separablen Körpererweiterungen behandelt. Sie nimmt in unserem arithmetischen Beweis der Riemannschen Vermutung eine ähnliche Stelle ein, wie sie in den algebraisch-geometrischen Beweisen die Theorie eines mehrfachen Produktes $\Gamma \times \cdots \times \Gamma$ einer algebraischen Kurve Γ mit sich selbst innehat (vgl. [7] § II, 11.—13.).

Hat man nur den *Fall des Geschlechtes* 1 im Auge, so vereinfacht sich der Beweis des Hauptsatzes bedeutend, da es dann in jeder nichtverschwindenden gröberen Divisorenklasse des Doppelkörpers $\Delta = K \times K'$ einen nichtkonstanten Primdivisor $\mathfrak{p}$ vom Grade 1 über K' gibt (wenn K das Geschlecht 1 hat). Die Diskriminantenabschätzungen werden in diesem Falle trivial, da es sich hier um Isomorphismensysteme handelt, welche nur aus einem einzigen Isomorphismus bestehen. Über den Beweis von $\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) > 0$ hinaus kann hier sogar der genaue Wert von $\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ angegeben werden (vgl. **15.** (10)).

Diese Formel zeigt, daß unsere Metrik σ mit der von Hasse, Behrbohm und Teichmüller untersuchten Metrik im elliptischen Falle[4]) übereinstimmt. Sie liefert, wie man ganz einfach einsehen kann, die einschlägigen Resultate von Hasse, die notwendig sind, um die Struktur der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper zu bestimmen[5]).

Schließlich sei noch auf folgende, für beliebigen Körper K gültige Strukturaussage über die Multiplikatorenringe hingewiesen, nämlich auf den Satz, daß sie die Charakteristik Null besitzen. Dieser Satz findet sich bei uns in folgender, allgemeinerer Form: *Die additive Gruppe der gröberen Divisorklassen eines Doppelkörpers besitzt keine Elemente endlicher Ordnung.* Er ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptsatz über die σ-Metrik und ist hier zum erstenmal auf arithmetischem Wege bewiesen (vgl. **15.** (7)).

Vorbemerkungen zur Bezeichnungsweise.

Ich habe mich bemüht, die Bezeichnungen an jeder Stelle dieser Arbeit so zu wählen, daß sich das jeweils behandelte Problem in möglichst einfacher und übersichtlicher Weise formelmäßig darstellen läßt. Meist habe ich mich dabei an die übliche Bezeichnungsweise halten können. Infolge des großen Beziehungsreichtums dieser Arbeit zu den verschiedensten mathematischen Disziplinen ist dies jedoch nicht immer möglich gewesen. Auch kommt es vor, daß an verschiedenen Stellen der Arbeit verschiedene Dinge mit dem gleichen Buchstaben benannt werden. Irrtümer können jedoch in keinem Falle entstehen, da wir stets sagen, was mit den betr. Bezeichnungen und Formeln gemeint ist. Zur Orientierung für den Leser werden jetzt einige grundsätzliche Hinweise über die hier im allgemeinen verwendeten Bezeichnungen gegeben.

Ω sei ein in dieser Arbeit ein für allemal fest gewählter algebraisch-abgeschlossener Körper. Dieser kann ganz beliebig sein, lediglich in § 5 beim Beweis der Riemannschen Vermutung wird vorausgesetzt, daß Ω absolut-algebraisch von Primzahlcharakteristik ist. Er soll bei allen betrachteten Isomorphismen, Restabbildungen usw. stets elementweise festbleiben, auch wenn dies nicht ausdrücklich gesagt ist.

---

[4]) Vgl. *Hasse*, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper III, Journ. f. r. u. a. Math. **175** (1936), sowie *Behrbohm*, Über die Algebraizität der Meromorphismen eines elliptischen Funktionenkörpers, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Neue Folge I **1** (1935).

[5]) Gemeint sind die Sätze I, II, III aus [4], § 5, **1**.

Über Ω als Konstantenkörper betrachten wir algebraische Funktionenkörper (das sind durch endlich viele Elemente erzeugbare Erweiterungskörper von Ω vom Transzendenzgrad 1), welche wie alle Körper mit großen griechischen Buchstaben bezeichnet werden (K, M, P usw.). Die allgemeine arithmetische Theorie algebraischer Funktionenkörper wird vorausgesetzt und dieserhalb auf [5] verwiesen. Kleine deutsche Buchstaben bedeuten stets Divisoren ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$), und zwar werden im allgemeinen die zuletzt aufgeführten drei Buchstaben für *Prim*divisoren verwendet. Anders als in [5] schreiben wir jedoch die Gruppenoperation der Divisoren nicht multiplikativ, sondern *additiv*. Diese Schreibweise ist für die gegenwärtigen Untersuchungen besser geeignet, weil wir dann die Isomorphismen als hintere und die Korrespondenzen als vordere Operatoren der Divisorengruppe schreiben können, so wie es auch in [4] geschieht. Eine Teilbarkeitsrelation zwischen zwei Divisoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wird hier $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ geschrieben, wie es der additiven Divisorschreibweise angepaßt ist, und nicht $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$, wie es in [5] bei multiplikativer Divisorschreibweise getan wird. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ soll also bedeuten, daß die Vielfachheit in $\mathfrak{a}$ eines jeden Primdivisors nicht größer als seine Vielfachheit in $\mathfrak{b}$ ist. Gilt dies nicht für alle Primdivisoren, sondern nur für einen einzigen $\mathfrak{q}$ oder für ein gewisses Primdivisorensystem $\mathbf{q}$, so schreiben wir $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ (für $\mathfrak{q}$) bezw. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ (für $\mathbf{q}$). Diesen Zusatz „für $\mathfrak{q}$" verwenden wir nicht nur bei Teilbarkeiten, sondern bei allen arithmetischen Aussagen, wenn angedeutet werden soll, daß sie sich nur auf den Primdivisor $\mathfrak{q}$ beziehen (entsprechendes wird natürlich für ein Primdivisorensystem $\mathbf{q}$ getan). So heißt zum Beispiel $a \cong \mathfrak{a}$ (für $\mathfrak{q}$), daß der Hauptdivisor (a) des Elements a den gleichen $\mathfrak{q}$-Bestandteil besitzt wie der Divisor $\mathfrak{a}$, kurz: daß (a) $\mathfrak{q}$-gleich zu $\mathfrak{a}$ ist. Die Divisoräquivalenz bezeichnen wir mit dem Zeichen $\sim$ und die Divisorenklassen mit großen lateinischen Buchstaben (A, B, C usw.). Hierbei ist jedoch darauf zu achten, daß der algebraische Funktionenkörper K, in dem eine Äquivalenz $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ statthat, durch einen Zusatz „in K" angegeben wird, wenn dies nicht aus dem Zusammenhang klar hervorgeht. Es ist nämlich möglich, daß zwei Divisoren zwar nicht in K, wohl aber in einem geeigneten Erweiterungskörper von K äquivalent sind. Eine entsprechende Bemerkung gilt für die Gradfunktion $gr(\mathfrak{a})$ der Divisoren: Auch hier muß, wenn Mißverständnisse möglich sein könnten, der algebraische Funktionenkörper K/Ω angegeben werden, in dem der Grad zu bilden ist; wir tun dies durch einen Index: $gr_{K/\Omega}(\mathfrak{a})$.

Isomorphismen werden im allgemeinen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet und, wie schon gesagt, stets als hintere Operatoren geschrieben; dasselbe gilt für Resthomomorphismen.

Systeme von Dingen bezeichnen wir stets mit den zugehörigen fettgedruckten Buchstaben, z. B. ist $\mathbf{q}$ ein Primdivisorensystem und $\boldsymbol{\mu}$ ein Isomorphismensystem.

§ 1. Differenten und Diskriminanten von Isomorphismensystemen.

1. Reduzierte Isomorphismensysteme. Elementdifferenten und -diskriminanten.

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper mit dem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper Ω. Wir betrachten Systeme $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ von endlich vielen Isomorphismen von K, deren Bildkörper alle in einem zweiten algebraischen Funktionenkörper $\widetilde{K}$ liegen sollen: $K\mu_i \leq \widetilde{K}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Zwei Isomorphismensysteme $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\nu}$ von K in $\widetilde{K}$ bzw. in $\widehat{K}$ heißen *vom selben Typus*, wenn sie erstens gleich viel Isomorphismen enthalten, und wenn es zweitens einen Isomorphismus σ des in $\widetilde{K}$ gebildeten Kompositums $M = K\mu_1 \cdots K\mu_n$ auf das in $\widehat{K}$ gebildete Kompositum $N = K\nu_1 \cdots K\nu_n$ derart gibt, daß $\mu_i\sigma = \nu_i$ ist $(i = 1, \ldots, n)$. Wir schreiben dann auch kurz: $\boldsymbol{\mu}\sigma = \boldsymbol{\nu}$. Wir nennen ein

Isomorphismensystem $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ *reduziert*, wenn alle in ihm enthaltenen Isomorphismen voneinander verschieden sind, wenn also für $i \neq k$ stets $\mu_i \neq \mu_k$ ist.

Beispiel: Ist K_0 ein Teilkörper von K, über dem K endlich-algebraisch und separabel ist (etwa der von einem separierenden Element x_0 von K erzeugte rationale Funktionenkörper $\Omega(x_0)$), und ist $\widetilde{K}$ eine endlich-algebraische und über K_0 normale Erweiterung von K, dann ist das System aller verschiedenen Isomorphismen von K in $\widetilde{K}$, welche K_0 elementweise festlassen, ein reduziertes Isomorphismensystem im oben erklärten Sinne.

Ist wieder $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ ein *beliebiges* reduziertes Isomorphismensystem von K in einen algebraischen Funktionenkörper $\widetilde{K}$, so erklären wir für jedes Element a aus K und für jeden Isomorphismus μ_i aus $\boldsymbol{\mu}$ $(i = 1, \ldots, n)$ die i-te $\boldsymbol{\mu}$-*Differente* durch

$$D_{\mu}^{(i)}(a) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a\mu_i - a\mu_j)$$

und ferner die $\boldsymbol{\mu}$-*Diskriminante*:

$$d_{\mu}(a) = \prod_{i=1}^{n} D_{\mu}^{(i)}(a) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (a\mu_i - a\mu_j).$$

Ist $\boldsymbol{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein n-gliedriges Elementsystem aus K, so bilden wir dessen $\boldsymbol{\mu}$-*Diskriminante*:

$$d_{\mu}(\boldsymbol{a}) = \det (a_i \mu_j)^2 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Alle Differenten und Diskriminanten liegen in $\widetilde{K}$. Der Nachweis der Existenz von Elementen und Elementsystemen, deren Differenten bzw. Diskriminanten von Null verschieden sind, wird in den folgenden Abschnitten mit erledigt werden. Über den Fall $n = 1$ bemerken wir, daß dann ein leeres Produkt gleich 1 zu setzen ist. Ferner sind in bezug auf unsere Definitionen Elemente und 1-gliedrige Elementsysteme zu unterscheiden: die Diskriminante eines Elements a ist $d_{\mu}(a) = 1$, während die Diskriminante von a als 1-gliedriges Elementesystem gleich $d_{\mu}(\boldsymbol{a}) = (a\mu_1)^2$ ist.

Es sei noch die für jedes n gültige Formel

$$d_{\mu}(a) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d_{\mu}(1, a, \ldots, a^{n-1}) \tag{1}$$

angeführt, die für $n > 1$ aus der Determinantentheorie bekannt ist und den Zusammenhang zwischen den Elementdiskriminanten und Elementsystemdiskriminanten herstellt. Im Falle $n = 1$ gilt sie definitionsgemäß. Ferner gilt für c aus K und $\boldsymbol{ac} = (a_1 c, \ldots, a_n c)$:

$$d_{\mu}(\boldsymbol{ac}) = d_{\mu}(\boldsymbol{a}) \cdot N_{\mu}(c)^2, \tag{2}$$

wobei wir die $\boldsymbol{\mu}$-*Norm* durch

$$N_{\mu}(c) = \prod_{i=1}^{n} c\mu_i \tag{3}$$

erklären.

Kehren wir zu unserem oben angeführten Beispiel zurück, wo das reduzierte Isomorphismensystem aus allen Isormorphismen der endlich-algebraischen und separablen Erweiterung K/K_0 besteht! Wird mit μ_1 der identische Isomorphismus bezeichnet, so stimmt die erste $\boldsymbol{\mu}$-Differente $D_{\mu}^{(1)}(a)$ eines Elements a aus K definitionsgemäß mit der Differente $D_{K/K_0}(a)$ von a bezüglich K/K_0 überein, und dasselbe gilt für die Diskriminanten. In diesem Sinne sind unsere Definitionen eine Verallgemeinerung der aus der gewöhnlichen Differenten- und Diskriminantentheorie bekannten Definitionen. Wir haben uns bemüht, auch in den folgenden Sätzen diese Verallgemeinerung hervorzuheben[6]).

[6]) Für die gewöhnliche Differenten- und Diskriminantentheorie verweisen wir auf [5], § 25.

2. Differenten reduzierter Isomorphismensysteme.

Jedem reduzierten Isomorphismensystem $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ eines algebraischen Funktionenkörpers K in einen algebraischen Funktionenkörper $\tilde{K}$ wollen wir n Differenten $\mathfrak{D}_\mu^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ zuordnen. Diese werden ganze Divisoren aus $\tilde{K}$ sein. Um sie zu definieren, genügt es, für jeden Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}$ aus $\tilde{K}$ den $\tilde{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{D}_\mu^{(i)}$ zu erklären. Dazu bilden wir, von $\tilde{\mathfrak{q}}$ ausgehend, die Normen

$$N_{\tilde{K}/K\mu_i}(\tilde{\mathfrak{q}})$$

und deren isomorphe Rückübertragungen

$$\mu_i\mathfrak{q} = N_{\tilde{K}/K\mu_i}(\tilde{\mathfrak{q}})\,\mu_i^{-1} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Diese durch $\tilde{\mathfrak{q}}$ bestimmten Primdivisoren von K heißen die $\boldsymbol{\mu}$-*Komponenten* von $\tilde{\mathfrak{q}}$. Wir bezeichnen das Komponentensystem $\{\mu_1\tilde{\mathfrak{q}}, \ldots, \mu_n\tilde{\mathfrak{q}}\}$ auch mit $\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$. Die Definition der i-ten $\boldsymbol{\mu}$-Differente lautet nun so (dabei ist der Index i fest zu denken):

(1) *Durchläuft a alle $\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzen Elemente aus K, so bilde man den größten gemeinsamen $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teiler aller i-ten Differenten $D_\mu^{(i)}(a)$; dieser soll gleich dem $\tilde{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{D}_\mu^{(i)}$ sein.*

Zur Rechtfertigung dieser Definition haben wir erstens zu zeigen, daß der angegebene $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teiler existiert und ganz ist, und zweitens, daß er für fast alle $\tilde{\mathfrak{q}}$ gleich 0 ist. Bevor wir an den Beweis dieser Tatsachen gehen, stellen wir zunächst einige Eigenschaften der Komponenten zusammen, welche sich für unsere Ausführungen als grundlegend erweisen werden.

Ist μ irgendein Isomorphismus aus $\boldsymbol{\mu}$ und ist $\mu\tilde{\mathfrak{q}}$ die zugehörige $\boldsymbol{\mu}$-Komponente von $\tilde{\mathfrak{q}}$, so besitzt das isomorphe Bild $(\mu\tilde{\mathfrak{q}})\mu$ in $K\mu$ definitionsgemäß $\tilde{\mathfrak{q}}$ in $\tilde{K}$ als Fortsetzungsprimdivisor. Das bedeutet, daß die Abbildung $K \to K\mu$ ein *Wertisomorphismus* des mit $\mu\tilde{\mathfrak{q}}$ bewerteten Körpers K in den mit $\tilde{\mathfrak{q}}$ bewerteten Körper $\tilde{K}$ ist. Aus einer Kongruenz $a \equiv b$ mod $\mu\tilde{\mathfrak{q}}$ in K kann demnach auf die Kongruenz $a\mu \equiv b\mu$ mod $\tilde{\mathfrak{q}}$ in $\tilde{K}$ geschlossen werden. Dasselbe gilt sinngemäß auch für Teilbarkeiten, Divisorgleichheiten, Limesbeziehungen usw. Diese Schlußweise wollen wir das *Prinzip der Komponentenübertragung* nennen. Insbesondere folgt, daß der konstante Rest $a(\mu\tilde{\mathfrak{q}})$ eines $\mu\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzen Elements $a \neq 0$ aus K gleich dem konstanten Rest $(a\mu)\tilde{\mathfrak{q}}$ modulo $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $a\mu$ in $\tilde{K}$ ist:

$$a(\mu\tilde{\mathfrak{q}}) = (a\mu)\,\tilde{\mathfrak{q}}.$$

Daher können und wollen wir in Zukunft die Klammern fortlassen und schreiben $a\mu\tilde{\mathfrak{q}}$.

Der Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{K}$ heißt *vollzerlegt* bezüglich $\boldsymbol{\mu}$, wenn $\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$ aus lauter *verschiedenen* Primdivisoren besteht. Im allgemeinen wird $\tilde{\mathfrak{q}}$ nicht vollzerlegt sein. Sind alle $\boldsymbol{\mu}$-Komponenten von $\tilde{\mathfrak{q}}$ einander gleich, so heißt $\tilde{\mathfrak{q}}$ *unzerlegt* bezüglich $\boldsymbol{\mu}$. Im allgemeinen Fall gibt es zu jeder $\boldsymbol{\mu}$-Komponente $\mathfrak{q}$ von $\tilde{\mathfrak{q}}$ ein maximales Teilsystem $\boldsymbol{\mu}^{(\mathfrak{q})}$ von $\boldsymbol{\mu}$ derart, daß alle $\boldsymbol{\mu}^{(\mathfrak{q})}$-Komponenten von $\tilde{\mathfrak{q}}$ gleich $\mathfrak{q}$ sind. Dies besteht nämlich aus allen Isomorphismen μ aus $\boldsymbol{\mu}$ mit $\mu\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$. Das Isomorphismensystem $\boldsymbol{\mu}$ zerfällt so in paarweise fremde Teilsysteme $\boldsymbol{\mu}^{(\mathfrak{q})}$, bezüglich deren $\tilde{\mathfrak{q}}$ unzerlegt ist, wenn $\mathfrak{q}$ alle verschiedenen Primdivisoren aus $\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$ durchläuft. — Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den folgenden Satz (dabei ist der Index i fest zu denken):

(2) *Ist t ein $\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzes Element aus K mit den Eigenschaften*

a) $t\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} \neq t\mu_j\tilde{\mathfrak{q}}$, *falls* $\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} \neq \mu_j\tilde{\mathfrak{q}}$

b) $t - t\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} \not\equiv 0 \bmod 2(\mu_i\tilde{\mathfrak{q}})$,

so ist die i-te $\boldsymbol{\mu}$-Differente $D_\mu^{(i)}(t) \neq 0$, und es gilt für jedes $\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$-ganze Element a aus K die $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teilbarkeit:

$$D_\mu^{(i)}(a) > D_\mu^{(i)}(t) \qquad (\textit{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Es ist klar, daß es ein solches Element t aus K gibt, denn z. B. erfüllt ein Primelement für $\mu_i\tilde{\mathfrak{q}}$, welches durch keine von $\mu_i\tilde{\mathfrak{q}}$ verschiedene μ-Komponente teilbar ist, die Bedingungen (2a, b). Daher wird mit dem Satz (2) die Existenz des in der Definition (1) genannten $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teilers bewiesen sein: dieser ist $\tilde{\mathfrak{q}}$-gleich zu $D_\mu^{(i)}(t)$.

Beweis von (2): Es sei t gemäß den Bedingungen (2a, b) gewählt und a ein beliebiges $\mu\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzes Element aus K. Zum Nachweis der Richtigkeit der beiden Behauptungen genügt es auf Grund der Definition der i-ten Differenten zu zeigen, daß für jedes j mit $j \neq i$ gilt:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &(a\mu_i - a\mu_j) > (t\mu_i - t\mu_j) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}) \\ &(t\mu_i - t\mu_j) \neq 0. \end{aligned}$$

Hierzu unterscheiden wir die beiden Fälle $\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} \neq \mu_j\tilde{\mathfrak{q}}$ und $\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} = \mu_j\tilde{\mathfrak{q}}$. Im ersten Falle ist wegen (2a) der konstante Rest $(t\mu_i - t\mu_j)\tilde{\mathfrak{q}} = t\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} - t\mu_j\tilde{\mathfrak{q}}$ von $t\mu_i - t\mu_j$ modulo $\tilde{\mathfrak{q}}$ von Null verschieden (Prinzip der Komponentenübertragung), also $t\mu_i - t\mu_j$ prim zu $\tilde{\mathfrak{q}}$. Daraus folgt zunächst die zweite der Gleichungen (3). Weiterhin ist $a\mu_i - a\mu_j$ nach dem Prinzip der Komponentenübertragung $\tilde{\mathfrak{q}}$-ganz, da a voraussetzungsgemäß $\mu\tilde{\mathfrak{q}}$-ganz ist; daher ist auch die erste Gleichung (3) richtig.

Im Falle $\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} = \mu_j\tilde{\mathfrak{q}}$ nennen wir diesen Primdivisor $\mathfrak{q}$ und wählen ein $\mathfrak{q}$-Primelement q aus K. Wir entwickeln t und a in ganze Potenzreihen nach q:

$$\begin{aligned} t &= \tau_0 + \tau_1 q + \cdots \qquad (\tau_k \text{ in } \Omega) \\ a &= \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots \qquad (\alpha_k \text{ in } \Omega). \end{aligned}$$

Durch Komponentenübertragung und Differenzbildung erhalten wir hieraus die beiden $\tilde{\mathfrak{q}}$-adisch konvergenten Reihen

$$(4) \qquad \begin{aligned} t\mu_i - t\mu_j &= \tau_1(q\mu_i - q\mu_j) + \tau_2((q\mu_i)^2 - (q\mu_j)^2) + \cdots \\ a\mu_i - a\mu_j &= \alpha_1(q\mu_i - q\mu_j) + \alpha_2((q\mu_i)^2 - (q\mu_j)^2) + \cdots. \end{aligned}$$

Aus der für $k \geqq 1$ gültigen Formel

$$(q\mu_i)^k - (q\mu_j)^k = (q\mu_i - q\mu_j) \cdot \left(\sum_{r=0}^{k-1} (q\mu_i)^r (q\mu_j)^{k-r-1}\right)$$

liest man nun die Teilbarkeitsbeziehungen

$$((q\mu_i)^k - (q\mu_j)^k) > (q\mu_i - q\mu_j) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}})$$

ab ($k \geqq 1$). Und zwar ist für $k > 1$ die linke Seite ein *echtes* $\tilde{\mathfrak{q}}$-Vielfaches der rechten, weil dann in der Summe

$$\sum_{r=0}^{k-1} (q\mu_i)^r (q\mu_j)^{k-r-1}$$

lauter durch $\tilde{\mathfrak{q}}$ teilbare Glieder auftreten. Da nun nach der Voraussetzung (2b) sicher $\tau_1 \neq 0$ ist, so ergibt das für t nach (4):

$$(5) \qquad (t\mu_i - t\mu_j) \cong (q\mu_i - q\mu_j) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Für a erhalten wir jedenfalls

$$(a\mu_i - a\mu_j) > (q\mu_i - q\mu_j) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}});$$

dies ergibt die erste der Gleichungen (3). Daß auch die zweite der Gleichungen (3) erfüllt ist, folgt wegen (5) daraus, daß $q\mu_i \neq q\mu_j$ ist, und diese Ungleichung ergibt sich wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit der Isomorphismen μ_i und μ_j aus der Tatsache, daß die Isomorphismen μ_i und μ_j als *Wert*isomorphismen schon durch die Bilder $q\mu_i$ und $q\mu_j$ des $\mathfrak{q}$-Primelements q eindeutig bestimmt sind. Die Bilder eines beliebigen Elements b aus K

ergeben sich nämlich aus der Entwicklung von b in eine Potenzreihe nach q durch deren gliedweise isomorphe Übertragungen.

Wie oben gesagt, steht mit dem eben erbrachten Beweis von Satz (2) die Existenz des in der Definition (1) genannten größten gemeinsamen $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teilers aller $D_\mu^{(i)}(a)$ mit $\mu\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzen a aus K fest. Dieser ist $\tilde{\mathfrak{q}}$-ganz, da die Differenten $D_\mu^{(i)}(a)$ der $\mu\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzen Elemente a nach dem Prinzip der Komponentenübertragung $\tilde{\mathfrak{q}}$-ganz sind. Wir haben daher nur noch zu zeigen, daß dieser $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teiler (den wir im Augenblick mit $\mathfrak{t}_{\tilde{\mathfrak{q}}}^{(i)}$ bezeichnen) für fast alle $\tilde{\mathfrak{q}}$ gleich 0 ist. Wir geben dazu endlich viele Primdivisoren $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{K}$ an, die möglicherweise auszunehmen sind, damit für alle übrigen $\mathfrak{t}_{\tilde{\mathfrak{q}}}^{(i)} = 0$ ist.

Dazu wählen wir ein Element b aus K mit nichtverschwindender Differente $D_\mu^{(i)}(b)$, was nach Satz (2) geht. Für einen Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{K}$ ist sicher dann $D_\mu^{(i)}(b)$ ein $\tilde{\mathfrak{q}}$-Vielfaches von $\mathfrak{t}_{\tilde{\mathfrak{q}}}^{(i)}$, wenn der Nenner $\mathfrak{n}$ von b prim zum Komponentensystem $\mu\tilde{\mathfrak{q}}$ ist. Dies ist für fast alle $\tilde{\mathfrak{q}}$ der Fall, nämlich für genau diejenigen, die weder Teiler von $\mathfrak{n}\mu_1$, noch von $\mathfrak{n}\mu_2, \ldots, \mathfrak{n}\mu_n$ sind. Es ist also für fast alle $\tilde{\mathfrak{q}}$ die Teilbarkeit

$$D_\mu^{(i)}(b) > \mathfrak{t}_{\tilde{\mathfrak{q}}}^{(i)} > 0 \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}})$$

richtig. Nehmen wir nun noch zusätzlich diejenigen $\tilde{\mathfrak{q}}$ aus, welche in $D_\mu^{(i)}(b)$ vorkommen, so ist demnach für die übrigen $\tilde{\mathfrak{q}}$ sicher $\mathfrak{t}_{\tilde{\mathfrak{q}}}^{(i)} = 0$, w. z. b. w.

Damit ist der Nachweis der Existenz und der Ganzheit der in (1) definierten i-ten Differente $\mathfrak{D}_\mu^{(i)}$ eines reduzierten Isomorphismensystems erbracht ($i = 1, \ldots, n$). Wir heben gleich noch folgende, später (**14.** (7)) benötigte Tatsache hervor, welche sich als Folge der Definition ergibt: Ist K/K_0 eine endlich-algebraische und separable Erweiterung, und ist μ das zugehörige System aller Isomorphismen von K/K_0 in einen K umfassenden Normalkörper über K_0 mit dem identischen Isomorphismus μ_1, dann

(6) *stimmt die Differente $\mathfrak{D}_{K/K_0}$ von K/K_0 mit der ersten μ-Differente $\mathfrak{D}_\mu^{(1)}$ überein.*

Denn diese Übereinstimmung gilt, wie wir schon am Schlusse von **1.** bemerkten, für Elementdifferenten, und die Differente $\mathfrak{D}_{K/K_0}$ ist ebenfalls für jeden Primteiler $\tilde{\mathfrak{q}}$ als größter gemeinsamer $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teiler der zugehörigen Elementdifferenten darstellbar[7]).

Auf Grund der Definition der Differenten $\mathfrak{D}_\mu^{(i)}$, in der nur die Elemente $D_\mu^{(i)}(a)$ des in $\tilde{K}$ gebildeten Kompositums $M = K\mu_1 \cdots K\mu_n$ zur Bildung des größten gemeinsamen Teilers herangezogen werden, erkennt man, daß die Differenten $\mathfrak{D}_\mu^{(i)}$ Divisoren von M und unabhängig von der endlich-algebraischen Erweiterung $\tilde{K}$ von M sind, also wirklich nur von μ und μ_i abhängen. Sind zwei Isomorphismensysteme μ und $\mu\sigma$ vom selben Typus, so gilt das *Isomorphieprinzip für Differenten*:

$$(7) \qquad \mathfrak{D}_{\mu\sigma}^{(i)} = \mathfrak{D}_\mu^{(i)}\sigma \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wie sich ohne weiteres daraus ergibt, daß die bei der Definition von $\mathfrak{D}_\mu^{(i)}$ verwendeten Begriffe bei Anwendung von σ in die bei der Definition von $\mathfrak{D}_{\mu\sigma}^{(i)}$ zu verwendenden Begriffe übergehen. Ferner kommt es auf den Urbildkörper K nur seinem Typus über Ω nach an. Ist nämlich K_0 ein zu K isomorpher Körper: $K_0\xi = K$, so überträgt sich das Isomorphismensystem μ zu einem Isomorphismensystem $\xi\mu$ von K_0 in $\tilde{K}$, und es gilt die Formel:

$$(8) \qquad \mathfrak{D}_{\xi\mu}^{(i)} = \mathfrak{D}_\mu^{(i)} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

wie man unmittelbar aus der Definition abliest.

Ist $\mu = \{\mu_1, \mu_2\}$ ein *zweigliedriges* reduziertes Isomorphismensystem, so ist für jedes a aus K:

$$D_\mu^{(1)}(a) = -D_\mu^{(2)}(a).$$

---

[7]) Vgl. [5], S. 316.

Da es auf das Vorzeichen bei der Teilerbildung nicht ankommt, so folgt daraus $\mathfrak{D}_\mu^{(1)} = \mathfrak{D}_\mu^{(2)}$. Unter Weglassung des oberen Index schreiben wir dafür einfach $\mathfrak{D}_\mu$ oder auch $\mathfrak{D}_{\mu_1\mu_2}$; ein solcher Divisor heißt eine *Elementardifferente*[8]). Es gilt folgender Zerlegungssatz:

(9) *Jede Differente $\mathfrak{D}_\mu^{(i)}$ eines beliebigen reduzierten Isomorphismensystems $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ zerlegt sich in eine Summe von Elementardifferenten:*

$$\mathfrak{D}_\mu^{(i)} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mathfrak{D}_{\mu_i\mu_j}.$$

Im Falle $n = 1$ ist natürlich (wie stets) unter der leeren Summe der Nulldivisor zu verstehen. *Beweis*: Wir zeigen die Gültigkeit der behaupteten Zerlegung für jeden Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{K}$. Dazu wählen wir das Element t gemäß den Bedingungen (2a, b), so daß auf Grund von Satz (2) die $\tilde{\mathfrak{q}}$-Divisorgleichung

$$\mathfrak{D}_\mu^{(i)} \cong D_\mu^{(i)}(t) = \prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} (t\mu_i - t\mu_j) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}})$$

besteht. Nun wenden wir den Satz (2) außerdem auf jedes Isomorphismenpaar $\{\mu_i\mu_j\}$ und die Elementardifferente $\mathfrak{D}_{\mu_i\mu_j}$ an. Es folgt, daß

$$\mathfrak{D}_{\mu_i\mu_j} \cong (t\mu_i - t\mu_j) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}})$$

gilt ($j = 1, \ldots, n; j \neq i$). Durch Produkt- bzw. Summenbildung ergibt sich

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mathfrak{D}_{\mu_i\mu_j} \cong \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (t\mu_i - t\mu_j) \cong \mathfrak{D}_\mu^{(i)} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}),$$

w. z. b. w.

(10) *Eine Elementardifferente $\mathfrak{D}_{\mu_1\mu_2}$ besitzt genau diejenigen Primdivisoren $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{K}$ als Teiler, welche bezüglich $\{\mu_1\mu_2\}$ unzerlegt sind, für welche also $\mu_1\tilde{\mathfrak{q}} \neq \mu_2\tilde{\mathfrak{q}}$ ist.*

Dies entnehmen wir wiederum unmittelbar aus Satz (2). Zum Isomorphismensystem $\mu = \{\mu_1\mu_2\}$ wählen wir ein Element t gemäß den Bedingungen (2a, b), wobei wir uns den Index i etwa gleich 1 denken. Dann ist nach Satz (2)

$$(t\mu_1 - t\mu_2) \cong \mathfrak{D}_{\mu_1\mu_2} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Ist nun $\mu_1\tilde{\mathfrak{q}} = \mu_2\tilde{\mathfrak{q}}$, so ist $(t\mu_1 - t\mu_2)\,\tilde{\mathfrak{q}} = t\mu_1\tilde{\mathfrak{q}} - t\mu_2\tilde{\mathfrak{q}} = 0$, also $\tilde{\mathfrak{q}}$ ein Teiler von $\mathfrak{D}_{\mu_1\mu_2}$. Ist aber $\mu_1\tilde{\mathfrak{q}} \neq \mu_2\tilde{\mathfrak{q}}$, so ist nach (2a) $(t\mu_1 - t\mu_2)\,\tilde{\mathfrak{q}} = t\mu_1\tilde{\mathfrak{q}} - t\mu_2\tilde{\mathfrak{q}} \neq 0$, also $\mathfrak{D}_{\mu_1\mu_2}$ prim zu $\tilde{\mathfrak{q}}$. — Durch Summenbildung gemäß (9) entsteht aus (10) eine Aussage über die Teiler einer beliebigen Differente. — Für die Elementardifferenten gilt folgende *Symmetrieformel*:

(11) $$\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2} = \mathfrak{D}_{\mu_2,\mu_1}$$

welche an dieser Stelle unmittelbar klar ist. Später wird sie sich als der Grund für die Richtigkeit der Symmetrieformel des Restproduktes erweisen.

3. Diskriminanten reduzierter Isomorphismensysteme.

Einem reduzierten Isomorphismensystem $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ von K in $\tilde{K}$ ordnen wir den ganzen Divisor

$$\mathfrak{d}_\mu = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{D}_\mu^{(i)}$$

[8]) Dieser Name wurde deshalb gewählt, weil $\mathfrak{D}_{\mu_1\mu_2}$ eine zu dem Hilbertschen „Element" aus der gewöhnlichen Differententheorie analoge Bildung darstellt.

von $\tilde{K}$ zu: die $\mathfrak{\mu}$-*Diskriminante.* Auf Grund des Zerlegungssatzes **2.** (9) zerlegt sich $\mathfrak{d}_\mu$ folgendermaßen in Elementardifferenten:

$$\mathfrak{d}_\mu = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \mathfrak{D}_{\mu_i,\mu_j}. \tag{12a}$$

Hieraus erkennt man wegen der Symmetrieformel **2.** (11), daß $\mathfrak{d}_\mu$ das Doppelte des Divisors

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}_\mu = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} \mathfrak{D}_{\mu_i,\mu_j}$$

ist, bei dem über jedes Paar $\{\mu_i, \mu_j\}$ nur einmal summiert wird. Ferner folgt aus **2.** (10), daß $\mathfrak{d}_\mu$ genau dann zum Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}$ prim ist, wenn $\tilde{\mathfrak{q}}$ bezüglich $\mathfrak{\mu}$ vollzerlegt ist. Wenn $\tilde{\mathfrak{q}}$ bezüglich $\mathfrak{\mu}$ nicht vollzerlegt ist, so ergibt sich folgende Aufspaltung des $\tilde{\mathfrak{q}}$-Bestandteils der Diskriminante: $\mathfrak{q}$ durchlaufe die verschiedenen $\mathfrak{\mu}$-Komponenten von $\tilde{\mathfrak{q}}$, und es seien $\mathfrak{\mu}^{(\mathfrak{q})}$ die zugehörigen maximalen Teilsysteme von $\mathfrak{\mu}$, bezüglich deren $\tilde{\mathfrak{q}}$ unzerlegt ist. Genau dann, wenn μ_i und μ_j nicht zum selben dieser Teilsysteme gehören, wenn also $\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} \neq \mu_j\tilde{\mathfrak{q}}$ ist, ist nach **2.** (10) $\mathfrak{D}_{\mu_i\mu_j}$ prim zu $\tilde{\mathfrak{q}}$. Um daher den $\tilde{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{d}_\mu$ zu erhalten, kann man diese $\mathfrak{D}_{\mu_i\mu_j}$ aus $\mathfrak{d}_\mu$ fortlassen. Es ergibt sich daraus die Aufspaltung:

$$\mathfrak{d}_\mu = \sum_{\mathfrak{q}} \mathfrak{d}_{\mu^{(\mathfrak{q})}} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}),$$

wo über alle verschiedenen $\mathfrak{\mu}$-Komponenten $\mathfrak{q}$ von $\tilde{\mathfrak{q}}$ summiert wird. Daraus folgt auch

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}_\mu = \sum_{\mathfrak{q}} \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}_{\mu^{(\mathfrak{q})}} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}). \tag{12}$$

Es gilt folgender Satz, den wir den *ersten Teilersatz für die Diskriminante* nennen:

(13) *Der $\tilde{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{d}_\mu$ ist der größte gemeinsame $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teiler aller Element-diskriminanten $d_\mu(a)$ mit $\mathfrak{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzem a aus K.*

Beweis: Es sei $\mathfrak{t}_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ der im Satz angegebene $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teiler. Wegen

$$\mathfrak{d}_\mu = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{D}_\mu^{(i)}; \quad d_\mu(a) = \prod_{i=1}^{n} D_\mu^{(i)}(a);$$

und wegen

$$\mathfrak{D}_\mu^{(i)} < D_\mu^{(i)}(a) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}})$$

für jedes $\mathfrak{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$-ganze a aus K folgt sicher

$$\begin{aligned} &\mathfrak{d}_\mu < d_\mu(a) && (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}), \quad \text{also}\\ &\mathfrak{d}_\mu < \mathfrak{t}_{\tilde{\mathfrak{q}}} && (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}). \end{aligned}$$

Um sogar die $\tilde{\mathfrak{q}}$-Gleichheit festzustellen, wähle man ein Element t aus K, welches $\mathfrak{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$-ganz ist, und die Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ t\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} - t\mu_j\tilde{\mathfrak{q}} \neq 0, \ \text{falls}\ \mu_i\tilde{\mathfrak{q}} \neq \mu_j\tilde{\mathfrak{q}} && (i,j = 1,\ldots,n)\\ &\text{b)}\ t - t\mu_i\tilde{\mathfrak{q}} \not\equiv 0 \bmod 2(\mu_i\tilde{\mathfrak{q}}) && (i = 1,\ldots,n). \end{aligned} \tag{14}$$

Wir werden gleich sehen, daß eine solche Wahl von t möglich ist. Nach dem Satz **2.** (2) ist dann für jedes feste i:

$$D_\mu^{(i)}(t) \cong \mathfrak{D}_\mu^{(i)} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}),$$

woraus durch Produkt bzw. Summenbildung folgt:

$$d_\mu(t) \cong \mathfrak{d}_\mu \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Es ist also in der Tat $\mathfrak{d}_\mu \cong \mathfrak{t}_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ (für $\tilde{\mathfrak{q}}$). — Um nun die Möglichkeit einer Wahl von t gemäß (14a, b) zu beweisen, wählen wir für jedes μ_j aus $\boldsymbol{\mu}$ ein Element γ_j aus Ω mit der Bedingung:

$$\gamma_j = \gamma_i, \quad \text{falls} \quad \mu_j\tilde{\mathfrak{q}} = \mu_i\tilde{\mathfrak{q}}$$
$$\gamma_j \neq \gamma_i, \quad \text{falls} \quad \mu_j\tilde{\mathfrak{q}} \neq \mu_i\tilde{\mathfrak{q}}.$$

Da der Grundkörper Ω als algebraisch abgeschlossener Körper unendlich viele Elemente enthält, gibt es sicher ein solches System von Elementen γ_j aus Ω. Ferner wählen wir ein gemeinsames Primelement q für alle $\boldsymbol{\mu}$-Komponenten $\mu_j\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{\mathfrak{q}}$ und lösen die endlich vielen Kongruenzen

$$t \equiv \gamma_j + q \mod 2(\mu_j\tilde{\mathfrak{q}}) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

durch ein Element t aus K. Dies t erfüllt dann die Bedingungen (14a, b) nach Konstruktion.

Neben dem ersten gilt auch *der im folgenden entscheidende zweite Teilersatz für die Diskriminante*:

(15) *Der $\tilde{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{d}_\mu$ ist der größte gemeinsame $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teiler aller Elementsystemdiskriminanten $d_\mu(\boldsymbol{a})$ mit n-gliedrigen $\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzen Elementsystemen $\boldsymbol{a}$ aus K.*

Der Beweis des zweiten Teilersatzes wird den Rest dieses Abschnitts ausfüllen. Nach 1. (1) und dem Beweis des ersten Teilersatzes gilt sicher

$$d_\mu(1, t, \ldots, t^{n-1}) \cong \mathfrak{d}_\mu \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}),$$

falls nur t die Bedingungen (14a, b) erfüllt. Es bleibt also folgende Aussage zu beweisen: Ist $\boldsymbol{a}$ ein beliebig vorgegebenes n-gliedriges $\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzes Elementsystem aus K, so ist $d_\mu(\boldsymbol{a}) > \mathfrak{d}_\mu$ (für $\tilde{\mathfrak{q}}$). Bezeichnen wir mit A die Matrix

$$A = (a_i\mu_j) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}^{9)},$$

so ist diese Aussage mit

$$\det(A) > \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{d}_\mu \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}) \tag{16}$$

gleichbedeutend. Wir werden (16) beweisen, und zwar behandeln wir zunächst den *unzerlegten Fall*, wo alle $\boldsymbol{\mu}$-Komponenten von $\tilde{\mathfrak{q}}$ einander gleich sind: $\mu_1\tilde{\mathfrak{q}} = \mu_2\tilde{\mathfrak{q}} = \cdots = \mu_n\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$. Wir wählen ein Primelement q für $\mathfrak{q}$ und entwickeln die a_i aus $\boldsymbol{a}$ in ganze Potenzreihen nach q:

$$a_i = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{ik} q^k \qquad (i = 1, \ldots, n; \ \gamma_{ik} \text{ in } \Omega).$$

Durch Komponentenübertragung erhalten wir daraus n^2 im $\tilde{\mathfrak{q}}$-adischen Sinne konvergente Reihenentwicklungen

$$a_i\mu_j = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{ik}(q\mu_j)^k \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Der Beweisgedanke ist nun folgender: Die Determinante von A wird auf Grund der Entwicklungen (17) in eine $\tilde{\mathfrak{q}}$-adisch konvergente Reihe von gewissen Determinanten entwickelt, die sich aus den $q\mu_j$ und deren Potenzen berechnen. Für diese wird die Teilbarkeit durch $\frac{1}{2}\,\mathfrak{d}_\mu$ (für $\tilde{\mathfrak{q}}$) leicht zu beweisen sein, woraus wir auch auf $\det(A) > \frac{1}{2}\,\mathfrak{d}_\mu$ (für $\tilde{\mathfrak{q}}$) schließen können werden.

---

9) Wir verabreden hier und im folgenden, daß wir bei Angabe der Indexmengen einer Matrix zuerst die Zeilenindizes und dann die Spaltenindizies berücksichtigen wollen.

Um dieses auszuführen, bilden wir die Matrix

$$Q = (\tilde{q}_j^k) \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, n \\ k = 0, 1, \ldots, \infty \end{pmatrix},$$

wo wir zur Abkürzung $\tilde{q}_j = q\mu_j$ gesetzt haben. Wir betrachten die n-spaltigen quadratischen Teilmatrizen von Q, welche die Form

$$Q_k = (\tilde{q}_j^k) \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, n \\ k = k_1, \ldots, k_n \end{pmatrix}$$

besitzen, also den Systemen $\boldsymbol{k} = \{k_1, \ldots, k_n\}$ ganzzahliger Exponenten mit $k_1 < \cdots < k_n$ zugeordnet sind. Wir setzen $\partial_k = \det(Q_k)$ und beweisen zunächst zwei *Hilfsbehauptungen*:

(18a) *Ist $\boldsymbol{k}_0$ das System $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ der ersten n Exponenten, so gilt für jedes beliebige Exponentensystem $\boldsymbol{k}$ die Teilbarkeit*

$$\partial_k > \partial_{k_0} \qquad (\textit{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

(18b) *Ist k_n der größte in $\boldsymbol{k}$ vorkommende Exponent, so gilt*

$$\partial_k \equiv 0 \bmod k_n \tilde{\mathfrak{q}}.$$

Beweis von (18a): Wir ersetzen die $\tilde{q}_j$ durch Unbestimmte x_j und erhalten so Matrizen $X_k = (x_j^k)$ $(j = 1, \ldots, n;\ k = k_1, \ldots, k_n)$ und Polynome $\xi_k(\boldsymbol{x}) = \det(X_k)$. Es ist dann für jedes Exponentensystem $\boldsymbol{k}$ einfach $\partial_k = \xi_k(\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n)$. Führt man in der Matrix X_k die Substitution $x_i \to x_j$ $(i \neq j)$ aus, so wird die i-te Zeile der neuen Matrix gleich ihrer j-ten Zeile, und daher verschwindet die Determinante der neuen Matrix. Das heißt, daß $\xi_k(\boldsymbol{x})$ bei der Substitution $x_i \to x_j$ verschwindet, also durch die Differenz $x_i - x_j$ teilbar ist. Dies gilt für jedes Paar i, j mit $i < j$, und daher ist $\xi_k(\boldsymbol{x})$ durch das Produkt $\prod_{i<j} (x_i - x_j)$ teilbar, welches ja gleich $\xi_{k_0}(\boldsymbol{x})$ ist. Das heißt, es gibt ein Polynom $\eta_k(\boldsymbol{x})$ mit

$$\xi_k(\boldsymbol{x}) = \xi_{k_0}(\boldsymbol{x})\ \eta_k(\boldsymbol{x}).$$

Führt man hierin die Ersetzung $x_j \to \tilde{q}_j$ aus, so erhält man in der Tat die $\tilde{\mathfrak{q}}$-Teilbarkeit $\partial_k > \partial_{k_0}$ (für $\tilde{\mathfrak{q}}$).

Beweis von (18b): Die letzte Spalte der Matrix Q_k ist die Spalte, welche von den Elementen $\tilde{q}_1^{k_n}, \ldots, \tilde{q}_n^{k_n}$ gebildet wird; sie besteht also aus lauter durch $k_n\tilde{\mathfrak{q}}$ teilbaren Elementen. Man erkennt nun die Richtigkeit der Behauptung, wenn man die Determinante $\partial_k = \det(Q_k)$ nach der letzten Spalte entwickelt.

Nachdem so die Hilfsbehauptungen (18) bewiesen sind, betrachten wir wieder die Matrix $A = (a_i \mu_j)$ und die Reihendarstellungen (17) ihrer Elemente. Da (17) eine Entwicklung der Spaltenvektoren von A nach den Spalten

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1^k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{q}_n^k \end{pmatrix} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \infty)$$

mit Koeffizienten aus Ω darstellt, und da eine Determinante linear in jeder ihrer Spalten ist, so kann $\det(A)$ als Linearkombination über Ω von Determinanten der Form $\det(\tilde{q}_j^k)$ $(j = 1, \ldots, n;\ k = k_1, \ldots, k_n)$ geschrieben werden. Hier darf $k_1 < \cdots < k_n$ angenommen werden, was höchstens einen Vorzeichenwechsel bedeutet. Diese Determinanten sind aber gerade die in den Hilfsbehauptungen auftretenden Determinanten ∂_k, so daß wir eine Entwicklung

$$\det(A) = \sum_k \gamma_k \partial_k \tag{19}$$

erhalten, in der sich die Koeffizienten γ_k aus den γ_{ik} von (17) durch Multiplikation und Addition zusammensetzen, also jedenfalls in Ω liegen. Diese zunächst formale Entwicklung ist sogar $\tilde{\mathfrak{q}}$-adisch konvergent. Ist nämlich $r > 0$ vorgegeben, so gibt es nur endlich viele Exponentensysteme $\boldsymbol{k}$, deren größter Exponent k_n kleiner als r ist $\left(\text{nämlich genau } \binom{r}{n}\right)$. Für die anderen, also für fast alle Exponentensysteme gilt nach (18b) $\partial_k \equiv 0 \bmod r\tilde{\mathfrak{q}}$. Da also bei vorgegebenem $r > 0$ fast alle Summanden der obigen Reihe $\equiv 0 \bmod r\tilde{\mathfrak{q}}$ sind, so ist deren $\tilde{\mathfrak{q}}$-adische Konvergenz erkannt. Da ferner nach (18a) für alle $\boldsymbol{k}$ die Teilbarkeit $\partial_k > \partial_{k_0}$ gilt, so folgt aus (19), daß auch

$$\det(A) > \partial_{k_0} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}) \tag{20}$$

ist. Nun ist definitionsgemäß $\partial_{k_0} = \det((q\mu_j)^k)$ $(j = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n-1)$, also

$$\partial_{k_0}^2 = d_\mu(1, q, \ldots, q^{n-1}).$$

Da bei uns zunächst der unzerlegte Fall vorliegt, es also nur eine $\boldsymbol{\mu}$-Komponente $\mathfrak{q}$ von $\tilde{\mathfrak{q}}$ gibt, so erfüllt q als $\mathfrak{q}$-Primelement die Bedingungen (14a, b), woraus nach dem am Anfang des Beweises Gesagten

$$d_\mu(1, q, \ldots, q^{n-1}) \cong \mathfrak{d}_\mu \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}})$$

folgt, also:

$$\partial_{k_0} \cong \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}_\mu \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Im Hinblick auf (20) ergibt das in der Tat die behauptete Teilbarkeit (16). Im unzerlegten Falle ist damit der zweite Teilersatz bewiesen.

Den allgemeinen Fall führen wir folgendermaßen auf den unzerlegten Fall zurück: Es sei $\mathfrak{q}'$ eine beliebige $\boldsymbol{\mu}$-Komponente von $\tilde{\mathfrak{q}}$, und $\boldsymbol{\mu}'$ sei das zugehörige maximale Teilsystem von $\boldsymbol{\mu}$, bezüglich dessen $\tilde{\mathfrak{q}}$ unzerlegt ist. Ist $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}$, so ist $\tilde{\mathfrak{q}}$ bezüglich $\boldsymbol{\mu}$ unzerlegt; diesen Fall haben wir eben behandelt. Es sei also $\boldsymbol{\mu}'$ ein *echtes* Teilsystem von $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\mu}''$ das dazu komplementäre Teilsystem von $\boldsymbol{\mu}$. Da $\boldsymbol{\mu}'$ und $\boldsymbol{\mu}''$ beide weniger Isomorphismen als $\boldsymbol{\mu}$ enthalten, so können wir unter Verwendung vollständiger Induktion annehmen, die behauptete Formel (16) gelte für $\boldsymbol{\mu}'$ und für $\boldsymbol{\mu}''$. Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 1$, welcher als unzerlegter Fall oben mit erledigt wurde (für ihn ist die Behauptung überhaupt trivial). Die Matrix $A = (a_i\mu_j)$ zerfällt gemäß der Aufspaltung von $\boldsymbol{\mu}$ in $\boldsymbol{\mu}'$ und in $\boldsymbol{\mu}''$ in zwei Teilmatrizen:

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix},$$

deren jede genau diejenigen j-Zeilen von A enthält, für die μ_j in $\boldsymbol{\mu}'$ bzw. in $\boldsymbol{\mu}''$ liegt. Es seien n' und n'' die Zeilenanzahlen von A' bzw. A'' $(n' + n'' = n)$. Jede n'-spaltige quadratische Teilmatrix von A' hat die Form $A'_{i'} = (a_i\mu_j)$ $(j = 1, \ldots, n';\ i = i_1, \ldots, i_{n'})$, wo $\boldsymbol{a}_{i'} = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n'}}\}$ ein n'-gliedriges Teilsystem von $\boldsymbol{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist nun $\det(A'_{i'}) > \mathfrak{d}_{\mu'}$ (für $\tilde{\mathfrak{q}}$), und entsprechend folgt für jede n''-spaltige quadratische Teilmatrix $A''_{i''}$ von A'' die Teilbarkeit $\det(A''_{i''}) > \frac{1}{2}\mathfrak{d}_{\mu''}$ (für $\tilde{\mathfrak{q}}$). Da sich nun die Determinante von A nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz in eine Summe von Produkten der Form $\det(A'_{i'}) \cdot \det(A''_{i''})$ entwickeln läßt, so folgt:

$$\det(A) > \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}_{\mu'} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}_{\mu''} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Nun benutzen wir die Tatsache, daß $\boldsymbol{\mu}'$ ein maximales Teilsystem ist, in welchem $\tilde{\mathfrak{q}}$ unzerlegt ist, und daß sich daher auch $\boldsymbol{\mu}''$ aus solchen maximalen Teilsystemen zusammensetzt. Nach (12) gilt dann nämlich die Zerlegung

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{d}_\mu = \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}_{\mu'} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{d}_{\mu''} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Im Hinblick auf die obige Teilerbeziehung für det (A) folgt daraus in der Tat die behauptete Teilbarkeit (16). Damit ist auch der zweite Teilersatz voll bewiesen.

Wir erwähnen, daß der wesentliche Teil unseres Beweises des zweiten Teilersatzes, nämlich die Aussage, daß der $\tilde{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{d}_\mu$ überhaupt ein Teiler der sämtlichen Elementsystemdiskriminanten $d_\mu(\boldsymbol{a})$ mit $\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzen Elementsystemen $\boldsymbol{a}$ ist, von uns lediglich für die Ausführungen des folgenden Abschnittes benötigt wird.

4. Untersuchung der „besonderen" Isomorphismensysteme.

Die Untersuchungen dieses Abschnitts beziehen sich nicht auf beliebige, sondern auf „*besondere*" reduzierte Isomorphismensysteme, welche später (**16.** (6)) beim Beweise des Hauptsatzes über die σ-Metrik eine wichtige Rolle spielen. Außer in **16.** werden die hier bewiesenen Sätze nicht angewandt.

Definition:

(1) *Ein Isomorphismensystem* $\boldsymbol{\beta}$ *von* K *in* $\tilde{K}$ *heißt ein „besonderes", wenn es einen Primdivisor* $\tilde{\mathfrak{q}}$ *von* $\tilde{K}$ *gibt, welcher bezüglich* $\boldsymbol{\beta}$ *vollzerlegt ist, und dessen Komponentensumme ein regulärer Divisor von* K *ist.*

Wie üblich, nennen wir dabei einen ganzen Divisor von K *regulär*, wenn er die Dimension 1 besitzt ([5], S. 359), wenn er also der einzige ganze Vertreter seiner Klasse ist. Ist das Geschlecht g von K gleich 0, so ist der einzige ganze reguläre Divisor von K gleich dem Nulldivisor; in diesem Falle gibt es kein besonderes Isomorphismensystem. Es sei daher im folgenden $g \geqq 1$. Da dann jeder *Prim*divisor von K regulär ist, so folgt, daß jedes eingliedrige Isomorphismensystem ein besonderes ist. Da die Diskriminante eines eingliedrigen Isomorphismensystems definitionsgemäß der Nulldivisor ist, so sind in diesem Falle die weiter unten bewiesenen Diskriminantensätze trivial. — Ein besonderes Isomorphismensystem ist stets reduziert im Sinne der in **1.** gegebenen Definition, d. h. für $i \neq j$ ist stets $\beta_i \neq \beta_j$. Dies folgt daraus, daß wegen der vorausgesetzten Vollzerlegtheit des in der Definition (1) auftretenden Primdivisors $\tilde{\mathfrak{q}}$ sogar $\beta_i\tilde{\mathfrak{q}} \neq \beta_j\tilde{\mathfrak{q}}$ ist. Es sind daher die Ergebnisse der drei vorigen Abschnitte, insbesondere der zweite Teilersatz für die Diskriminante, auf die besonderen Isomorphismensysteme anwendbar. Dies wird beim Beweis von (7) geschehen. Zuvor werden wir einen wichtigen Satz über die besonderen Isomorphismensysteme beweisen, der die Existenz eines Elementsystems $\boldsymbol{a}$ mit nichtverschwindender Diskriminante und möglichst kleinem Nenner behauptet:

(2) *Ist* $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ *ein besonderes Isomorphismensystem der Gliederzahl* n, *so gibt es einen Divisor* $\mathfrak{c}$ *aus* K *vom Grade* $n + g - 2$ *und* n *Vielfache* $a_1, \ldots, a_n$ *von* $-\mathfrak{c}$, *deren* $\boldsymbol{\beta}$*-Diskriminante nicht verschwindet*:

$$d_\beta(a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Der Nachdruck liegt dabei auf der Tatsache, daß $gr(\mathfrak{c}) = n + g - 2$ ist.

Beweis: Nach Definition eines besonderen Isomorphismensystems gibt es einen Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{K}$ derart, daß erstens seine $\boldsymbol{\beta}$-Komponenten $\mathfrak{q}_j = \beta_j\tilde{\mathfrak{q}}$ alle voneinander verschieden sind ($j = 1, \ldots, n$), und daß zweitens deren Summe $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 + \cdots + \mathfrak{q}_n$ ein regulärer Divisor von K ist. Wir ergänzen zunächst $\mathfrak{r}$ zu einem ganzen Divisor $\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0$ vom Grade g und der Dimension 1, so daß also $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_0, \mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0$ drei reguläre Divisoren der Grade $n, g - n, g$ sind (eine solche Ergänzung ist nach [5], S. 359 möglich). Dann sei C die Komplementärklasse zu $\mathfrak{r}_0$:

$$C \sim W - \mathfrak{r}_0.$$

Dabei ist W die Differentialklasse von K. Es ist $gr(C) = (2g - 2) - (g - n) = n + g - 2$. Wir wählen nun einen zu $\mathfrak{r}$ primen Divisor $\mathfrak{c}$ aus der Klasse C und behaupten:

(3) *Es gibt n Vielfache $a_1, \ldots, a_n$ von $-\mathfrak{c}$, deren $\boldsymbol{\beta}$-Diskriminante $d_\beta(a_1, \ldots, a_n) \not\equiv 0$ mod $\tilde{\mathfrak{q}}$ ist.*

Mit (3) ist offenbar auch (2) bewiesen, da $\mathfrak{c}$ nach Konstruktion den vorgeschriebenen Grad $n + g - 2$ besitzt. Übrigens hat das Nichtverschwinden der Diskriminante von $a_1, \ldots, a_n$ zur Folge, daß diese Elemente über Ω linear unabhängig sind. Daher bilden sie eine *Basis* des Ω-Vielfachenmoduls von $-\mathfrak{c}$, denn es ist $\dim(\mathfrak{c}) = \dim(C) = \dim(W - \mathfrak{r}_0) = g - gr(\mathfrak{r}_0) = g - (g - n) = n$ [10]).

Beweis von (3): Die Vielfachen a von $-\mathfrak{c}$ entsprechen vermöge $a \cong \mathfrak{a} - \mathfrak{c}$ den ganzen Divisoren $\mathfrak{a}$ aus C. Zur Konstruktion von n Elementen der verlangten Eigenschaft werden wir uns daher zuerst geeignete ganze Divisoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ aus C suchen. Dazu gehen wir so vor:

Wir bilden die ganzen regulären Divisoren $\mathfrak{r}_j = \mathfrak{r} - \mathfrak{q}_j$, welche aus $\mathfrak{r}$ durch Wegnahme von $\mathfrak{q}_j$ entstehen und daher den Grad $n - 1$ besitzen. Wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit aller $\mathfrak{q}_j$ gilt:

(4) *$\mathfrak{q}_j$ geht nicht in $\mathfrak{r}_j$, wohl aber in allen $\mathfrak{r}_i$ mit $i \neq j$ auf.*

Ferner bilden wir die regulären Divisoren $\mathfrak{r}_j + \mathfrak{r}_0$, welche aus $\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0$ durch Wegnahme von $\mathfrak{r}_j$ entstehen und daher den Grad $g - 1$ besitzen. Es ist $\dim(C - \mathfrak{r}_j) = \dim(W - (\mathfrak{r}_j + \mathfrak{r}_0)) = g - (g - 1) = 1$. Das bedeutet, daß es für jedes $j = 1, \ldots, n$ genau einen ganzen Divisor $\mathfrak{s}_j$ derart gibt, daß der Divisor $\mathfrak{r}_j + \mathfrak{s}_j$ in C liegt. Wir setzen nun

$$\mathfrak{a}_j = \mathfrak{r}_j + \mathfrak{s}_j \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Dies sind schon n ganze Divisoren aus C. Sie besitzen wegen (4) folgende Eigenschaft:

(5) *$\mathfrak{q}_j$ geht nicht in $\mathfrak{a}_j$, wohl aber in allen $\mathfrak{a}_i$ mit $i \neq j$ auf.*

Denn daß $\mathfrak{q}_j$ in $\mathfrak{a}_i$ mit $i \neq j$ aufgeht, folgt daraus, daß nach (4) $\mathfrak{q}_j$ in $\mathfrak{r}_i$ und nach Konstruktion $\mathfrak{r}_i$ in $\mathfrak{a}_i$ aufgeht. Ginge nun $\mathfrak{q}_j$ in $\mathfrak{a}_j$ auf, so folgte aus (4) und dem eben Gesagten, daß $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_j + \mathfrak{r}_j$ in $\mathfrak{a}_j$ aufginge. Dann wäre also $\dim(\mathfrak{a}_j - \mathfrak{r}) = \dim(C - \mathfrak{r}) \geqq 1$, was aber wegen $\dim(C - \mathfrak{r}) = \dim(W - (\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0)) = g - g = 0$ nicht der Fall ist. Es ist daher in der Tat $\mathfrak{q}_j$ kein Teiler von $\mathfrak{a}_j$, womit (5) gezeigt ist.

Mit den so bestimmten ganzen Divisoren $\mathfrak{a}_j$ aus C bilden wir die bis auf konstante Faktoren eindeutig festliegende Elemente $a_j \cong \mathfrak{a}_j - \mathfrak{c}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Da $\mathfrak{c}$ nach Wahl zu $\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_1 + \cdots + \mathfrak{q}_n$ prim ist, so überträgt sich (5) auf die Elemente a_j so:

(6) *$a_j \not\equiv 0$ mod $\mathfrak{q}_j$, aber $a_i \equiv 0$ mod $\mathfrak{q}_j$ für $i \neq j$.*

Gehen wir hierin zu den konstanten Resten mod $\mathfrak{q}_j$ über und setzen wieder $\mathfrak{q}_j = \beta_j \tilde{\mathfrak{q}}$, so erhalten wir:

$$a_j \beta_j \tilde{\mathfrak{q}} \neq 0, \quad \text{aber} \quad a_i \beta_j \tilde{\mathfrak{q}} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Hieraus schließen wir unter Anwendung des Prinzips der Komponentenübertragung aus **2.** (welches schon in der Schreibweise zum Ausdruck kommt), daß die Matrix $A = (a_i \beta_j)$ mod $\tilde{\mathfrak{q}}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente $a_j \beta_j$ mod $\tilde{\mathfrak{q}}$ nicht verschwinden. Daher ist $\det(A)$ prim zu $\tilde{\mathfrak{q}}$, und also auch $d_\beta(a_1, \ldots, a_n) = \det(A)^2$ prim zu $\tilde{\mathfrak{q}}$, w. z. b. w.

Aus dem damit bewiesenen Satz (2) ziehen wir Folgerungen: Es gilt zunächst:

$$\mathfrak{d}_\beta < (d_\beta(\boldsymbol{a})) + 2N_\beta(\mathfrak{c}), \tag{7}$$

wo $\mathfrak{c}$ und $\boldsymbol{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ die in Satz (2) angegebene Bedeutung haben, und wo $N_\beta(\mathfrak{c}) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{c}\beta_i$ die $\boldsymbol{\beta}$-Norm von $\mathfrak{c}$ ist.

[10]) Hier und später verwenden wir die aus dem Riemann-Rochschen Satz folgende Tatsache, daß die Regularität eines Divisors $\mathfrak{u}$ mit $\dim(W - \mathfrak{u}) = g - gr(\mathfrak{u})$ gleichbedeutend ist.

Beweis: Wir zeigen (7) für einen willkürlich gewählten Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{K}$. Es sei $\beta\tilde{\mathfrak{q}}$ dessen Komponentensystem bezüglich β. Wir wählen ein Element c aus K mit

$$(8) \qquad c \cong \mathfrak{c} \qquad (\text{für } \beta\tilde{\mathfrak{q}}).$$

Dann ist das Elementsystem $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}c$ ein $\beta\tilde{\mathfrak{q}}$-ganzes Elementsystem, also folgt aus dem zweiten Teilersatz für die Diskriminante (3. (15)) die Teilbarkeit

$$(9) \qquad \mathfrak{d}_\beta < (d_\beta(\boldsymbol{b})) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Andererseits ist nach 1. (2):

$$(10) \qquad d_\beta(\boldsymbol{b}) = d_\beta(\boldsymbol{a}) \cdot N_\beta(c)^2.$$

Aus (8) ergibt sich durch Komponentenübertragung die Divisorgleichung

$$N_\beta(c) \cong N_\beta(\mathfrak{c}) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Dies ergibt nach Eintragung in (10) die Divisorgleichung

$$(d_\beta(\boldsymbol{b})) \cong (d_\beta(\boldsymbol{a})) + 2N_\beta(\mathfrak{c}) \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}).$$

Im Hinblick auf (9) erhalten wir daraus die Teilbarkeit (7) für den Divisor $\tilde{\mathfrak{q}}$, w. z. b. w.

Schreiben wir allgemein für zwei Divisoren $\mathfrak{a} \lesssim \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ einem ganzen Divisor äquivalent ist, so ist dies offenbar eine transitive Beziehung zwischen den Divisoren, für die folgende Aussage richtig ist:

(11) *Aus* $\mathfrak{a} \lesssim \mathfrak{b}$ *folgt* $gr(\mathfrak{a}) \leqq gr(\mathfrak{b})$.

Mit Hilfe dieser Bezeichnungsweise erhalten wir aus (7) folgende Formel:

$$(12) \qquad \boxed{\mathfrak{d}_\beta \lesssim 2N_\beta(\mathfrak{c}) \text{ mit } gr(\mathfrak{c}) = n + g - 2} \qquad (\text{in } \tilde{K}).$$

Sie ist gültig für jedes besondere Isomorphismensystem β. Dies ist die Formel, die wir später beim Beweis des Hauptsatzes über die σ-Metrik heranziehen werden. Wie gesagt, liegt der Nachdruck darauf, daß der Grad des dabei auftretenden Divisors $\mathfrak{c}$ von K gleich $n + g - 2$ ist, wo g das Geschlecht von K und n die Gliederzahl von β ist.

§ 2. Arithmetik in einem Doppelkörper.

5. Definition der Doppelkörper. Konstantenerweiterungen.

Es seien zwei algebraische Funktionenkörper K und K' über dem algebraisch-abgeschlossenen Grundkörper Ω gegeben. Ein Erweiterungskörper M/Ω, zusammen mit zwei Isomorphismen $K \to K\mu$ und $K' \to K'\mu'$ von K bzw. K' in M heißt ein *Kompositum* von K mit K', wenn es keinen echten Teilkörper von M gibt, der sowohl $K\mu$ als auch $K'\mu'$ enthält. Ist ein Kompositum durch M und die Isomorphismen μ und μ' gegeben, so schreiben wir $M = K\mu \cdot K'\mu'$. Zwei Komposita $M = K\mu \cdot K'\mu'$ und $N = K\nu \cdot K'\nu'$ sind *vom selben Typus*, wenn es einen Isomorphismus σ von M auf N gibt derart, daß $K\mu\sigma = K\nu$ und $K'\mu'\sigma = K'\nu'$ ist. Der Transzendenzgrad über Ω eines Kompositums von K mit K' kann 1 oder 2 sein; je nachdem wird es *abhängig* oder *unabhängig* genannt. Zu vorgegebenen algebraischen Funktionenkörpern K und K' gibt es stets ein unabhängiges Kompositum, und dieses ist dem Typus nach eindeutig bestimmt[11]). Sind K und K' selbst nur ihrem Typus über Ω nach gegeben, so können wir sie mit den Teilkörpern $K\mu$ bzw. $K'\mu'$ eines unabhängigen Kompositums identifizieren. Wir nennen dies dann einen *Doppelkörper* von K mit K' und schreiben $\Delta = K \times K'$. Das $\times$-Zeichen soll andeuten, daß es sich um ein *unabhängiges* Kompositum handelt.

---

[11]) Vgl. [6], Sätze 3 und 4.

Das Ziel dieses Paragraphen ist die Entwicklung einer arithmetischen Theorie in einem Doppelkörper, welche bei unseren weiteren Untersuchungen über Divisorenreste (§ 3) und über die σ-Metrik (§ 4) bequem zu handhaben ist. Zu diesem Zwecke werden wir die Begriffe des *Divisors* in Δ, der *Ganzheit* eines Divisors in Δ, und der *Primzerlegung* der Elemente in Δ erklären, aus welchen sich dann die Teilbarkeitslehre in Δ in genau derselben Weise ergibt, wie etwa in einem algebraischen Zahl- oder Funktionenkörper. Bevor wir an diese Aufgabe gehen, seien einige bekannte Tatsachen über Konstantenerweiterungen algebraischer Funktionenkörper vorangestellt.

Ein Doppelkörper $\Delta = K \times K'$ kann auch als algebraischer Funktionenkörper Δ/K' mit dem Konstantenkörper K' angesehen werden; dann ist er gleich der Konstantenerweiterung von K/Ω auf den Konstantenkörper K'. Die Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von Δ/K' heißen *nichtkonstant* bzw. *konstant*, je nachdem ob eine zugehörige Bewertung $w_\mathfrak{p}$ den Körper K identisch bewertet oder nicht. Die konstanten Primdivisoren von Δ/K' entsprechen eineindeutig den Primdivisoren von K/Ω als deren Fortsetzungen und werden von uns mit diesen identifiziert. Die Divisorengruppe von K/Ω erscheint so als Untergruppe der Divisorengruppe von Δ/K', und zwar bleiben bei dieser Einbettung die *Divisorfunktionen Grad und Dimension erhalten*. Daraus folgt nach einer Bemerkung von E. Witt, daß eine Äquivalenz in K/Ω zweier Divisoren aus K mit ihrer Äquivalenz in Δ/K' gleichbedeutend ist, denn die Hauptklasse eines jeden algebraischen Funktionenkörpers ist dadurch charakterisiert, daß ihr Grad gleich 0 und ihre Dimension gleich 1 ist. Daher erscheint auch die Divisoren*klassen*gruppe von K/Ω als eine Untergruppe der Divisorenklassengruppe von Δ/K'. Bei dieser Einbettung geht die Differentialklasse von K/Ω in die von Δ/K' über, und es folgt, daß das Geschlecht von Δ/K' gleich dem von K/Ω ist. In Δ/K' tritt neben die gewöhnliche noch die *gröbere Äquivalenz* der Divisoren, welche $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$ geschrieben wird. Sie soll bedeuten, daß die Divisoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von Δ/K' bis auf einen Divisor $\mathfrak{c}$ aus K äquivalent sind: $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ (in Δ/K').

Wir bemerken zum Schluß, daß all dieses statt für Δ/K' auch für Δ/K als Konstantenerweiterung von K'/Ω gilt.

6. Die Divisorengruppe eines Doppelkörpers.

Es sei $\Delta = K \times K'$ ein Doppelkörper. Wie in 5. ausgeführt, kann er sowohl als algebraischer Funktionenkörper über K als auch über K' aufgefaßt werden und stellt dann eine Konstantenerweiterung von K'/Ω bzw. K/Ω dar. Die nichtkonstanten Primdivisoren von Δ/K sind Klassen solcher äquivalenter Bewertungen von Δ/K, welche auch K' identisch bewerten. Sie stellen daher gleichzeitig die Klassen äquivalenter Bewertungen von Δ/K' dar, welche K identisch bewerten, entsprechen also auch den nichtkonstanten Primdivisoren von Δ/K'. Wir können und wollen in dieser Arbeit je zwei sich so entsprechende nichtkonstante Primdivisoren von Δ/K und von Δ/K' miteinander identifizieren.

Jedes Element $a \neq 0$ aus Δ besitzt als Element von Δ/K' eine Primzerlegung

$$(1) \qquad a \cong \sum_{\mathfrak{p}} r_\mathfrak{p} \mathfrak{p} + \sum_{\mathfrak{q}} r_\mathfrak{q} \mathfrak{q} \qquad (\text{in } \Delta/K'),$$

in der wir die nichtkonstanten Primdivisoren $\mathfrak{p}$ und die konstanten Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von Δ/K' (also die Primdivisoren von K/Ω) jeweils in einer Summe zusammengefaßt haben. Dabei sind die $r_\mathfrak{p}$ und $r_\mathfrak{q}$ ganzrationale Zahlen, definiert durch $r = w_\mathfrak{p}(a)$, $r_\mathfrak{q} = w_\mathfrak{q}(a)$, wo $w_\mathfrak{p}$ und $w_\mathfrak{q}$ die zu den Primdivisoren $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ gehörigen additiven, auf kleinsten positiven Wert 1 normierten Bewertungen sind. Symmetrisch zu (1) gibt es auch die Primzerlegung von a als Element von Δ/K:

$$(2) \qquad a \cong \sum_{\mathfrak{p}} r_\mathfrak{p} \mathfrak{p} + \sum_{\mathfrak{q}'} r_{\mathfrak{q}'} \mathfrak{q}' \qquad (\text{in } \Delta/K).$$

Gemäß unserer obigen Vereinbarung über die Identifikation der nichtkonstanten Primdivisoren von Δ/K und der von Δ/K' stimmen die nichtkonstanten Bestandteile der beiden Zerlegungen (1) und (2) überein. Wir fassen sie als *Primzerlegung in* Δ folgendermaßen zusammen:

$$(3) \qquad a \cong \sum_{\mathfrak{p}} r_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} + \sum_{\mathfrak{q}} r_{\mathfrak{q}} \mathfrak{q} + \sum_{\mathfrak{q}'} r_{\mathfrak{q}'} \mathfrak{q}' \qquad (\text{in } \Delta),$$

wo also $\mathfrak{p}$ alle nichtkonstanten Primdivisoren von Δ/K (und gleichzeitig die von Δ/K'), $\mathfrak{q}$ alle Primdivisoren aus K und $\mathfrak{q}'$ alle Primdivisoren aus K' durchläuft. Aus dieser Definition folgt, daß zwei von Null verschiedene Elemente a und b genau dann gleiche Primzerlegung in Δ besitzen (wir schreiben dann $a \cong b$ (in Δ)), wenn sie sich um ein Element aus Ω unterscheiden: $a = \gamma b$ mit γ in Ω. Denn aus $a \cong b$ (in Δ) folgt definitionsgemäß, daß sowohl $a \cong b$ (in Δ/K) als auch $a \cong b$ (in Δ/K') ist. Aus der ersten dieser Divisorgleichungen folgt nun, daß ab^{-1} im Konstantenkörper K von Δ/K liegt, und aus der zweiten folgt, daß ab^{-1} in K' liegt. Daher liegt ab^{-1} in $K \cap K'$, also in Ω.

Allgemein nennen wir jede Summe der Form

$$(4) \qquad \mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{p}} r_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} + \sum_{\mathfrak{q}} r_{\mathfrak{q}} \mathfrak{q} + \sum_{\mathfrak{q}'} r_{\mathfrak{q}'} \mathfrak{q}'$$

mit beliebigen ganzrationalen Koeffizienten, von denen nur endlich viele von Null verschieden sind, einen *Divisor von* Δ. Dieser heißt *ganz*, wenn alle seine Vielfachheiten $r_{\mathfrak{p}}$, $r_{\mathfrak{q}}$ und $r_{\mathfrak{q}'}$ nichtnegativ sind, und der Divisor $\mathfrak{b}$ heißt ein *Teiler* von $\mathfrak{a}$, in Zeichen $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ganz ist. Entsteht $\mathfrak{a}$ aus dem Element $a \neq 0$ von Δ durch dessen Primzerlegung in Δ gemäß (3), so heißt $\mathfrak{a}$ ein *Hauptdivisor*, und zwei beliebige Divisoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von Δ heißen *äquivalent* in Δ, in Zeichen: $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ (in Δ), wenn $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ ein Hauptdivisor ist. Die Klassen äquivalenter Divisoren heißen die *Divisorenklassen* von Δ. Die Divisoren der Form $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}'$ nennen wir die *Primdivisoren* von Δ, und zwar der Reihe nach nichtkonstant, konstant aus K und konstant aus K'. Ein nur aus konstanten Primdivisoren zusammengesetzter Divisor von Δ heißt *konstant*, ein nur aus nichtkonstanten Divisoren zusammengesetzter Divisor dagegen *total nichtkonstant*. Sind zwei Divisoren von Δ bis auf einen konstanten Divisor äquivalent in Δ, so heißen sie *gröber äquivalent* in Δ, in Zeichen: $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$ (in Δ).

Auf Grund unserer Definitionen kommen die Primdivisoren aus K unter denen von Δ vor, und so erscheint die Divisorengruppe von K als Untergruppe der Divisorengruppe von Δ. Man sieht ohne weiteres, daß eine Teilbarkeit $\mathfrak{c}_1 < \mathfrak{c}_2$ in K zwischen zwei Divisoren aus K mit ihrer Teilbarkeit in Δ gleichbedeutend ist. Ferner gilt:

(5) *Ist $c \neq 0$ ein Element aus K, so ist sein Hauptdivisor in K gleich seinem Hauptdivisor in Δ. Eine Äquivalenz $\mathfrak{c}_1 \sim \mathfrak{c}_2$ (in K) zwischen zwei Divisoren aus K ist mit ihrer Äquivalenz in Δ gleichbedeutend.*

Zum Beweise nutze man einfach die Definition (3) der Primzerlegung in Δ aus und beachte die Tatsache, daß K der genaue Konstantenkörper des algebraischen Funktionenkörpers Δ/K ist, also genau diejenigen Elemente aus Δ enthält, die für alle Bewertungen von Δ/K den Wert Null besitzen.

Der Satz (5) und die vorangegangenen Ausführungen zeigen, daß sich die Divisoren von K nicht nur unter Erhaltung der Divisorenaddition, sondern auch unter Erhaltung der arithmetischen Relationen der Teilbarkeit und der Äquivalenz in die Divisorengruppe von Δ einbetten. Diesen Sachverhalt drücken wir dadurch aus, daß wir sagen: *Die Divisorengruppe von K ist eine arithmeitische Untergruppe der Divisorengruppe von Δ.* Dasselbe gilt natürlich auch für die Divisorengruppe von K'.

Dual dazu läßt sich *die Divisorengruppe von Δ/K als arithmetische Faktorgruppe der Divisorengruppe von Δ* auffassen, und zwar in folgender Weise: Läßt man den in K gelegenen Bestandteil eines Divisors $\mathfrak{a}$ von Δ weg, so entsteht ein Divisor $\mathfrak{a}_{\Delta/K}$ von Δ/K. Die Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_{\Delta/K}$ ist offenbar ein Homomorphismus, der genau die konstanten Divisoren aus K auf 0 abbildet, und bei dem eine Teilbarkeit $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ in die Teilbarkeit $\mathfrak{a}_{\Delta/K} < \mathfrak{b}_{\Delta/K}$ übergeht. Daß dabei auch die Äquivalenz in Δ in die Äquivalenz in Δ/K übergeht, sagt folgender Satz:

(6) *Aus $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ (in Δ) folgt $\mathfrak{a}_{\Delta/K} \sim \mathfrak{b}_{\Delta/K}$ (in Δ/K).*

Zum Beweise kann man $\mathfrak{b} = 0$ annehmen und hat dann zu zeigen: aus $a \cong \mathfrak{a}$ (in Δ) für ein Element $a \neq 0$ aus Δ folgt $a \cong \mathfrak{a}_{\Delta/K}$ (in Δ/K). Dies ist aber nach der Definition (3) der Primzerlegung in Δ unmittelbar klar, aus der ja nach Weglassen des in K gelegenen Bestandteils die Primerzlegung von a in Δ/K entsteht. — Was über die Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_{\Delta/K}$ gesagt wurde, gilt natürlich genau so auch für die Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_{\Delta/K'}$.

Mit Hilfe dieser beiden arithmetischen Homomorphismen führen wir für die Divisoren von Δ zwei additive Gradfunktionen folgendermaßen ein: $gr_{\Delta/K}(\mathfrak{a})$ bzw. $gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{a})$ seien der Grad von $\mathfrak{a}_{\Delta/K}$ bzw. von $\mathfrak{a}_{\Delta/K'}$ als Divisoren des algebraischen Funktionenkörpers Δ/K bzw. Δ/K'. Wir nennen diese auch den *Grad von $\mathfrak{a}$ über K bzw. über K'*. Aus der Tatsache, daß die Abbildungen $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_{\Delta/K}$ und $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_{\Delta/K'}$ *arithmetische* Homomorphismen sind, erschließt man nach den arithmetischen Eigenschaften des Divisorgrades algebraischer Funktionenkörper den folgenden Satz:

(7) *Aus $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ folgt $gr_{\Delta/K}(\mathfrak{a}) \leqq gr_{\Delta/K}(\mathfrak{b})$, und aus $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ (in Δ) folgt $gr_{\Delta/K}(\mathfrak{a}) = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{b})$. Entsprechendes gilt für den Grad über K'.*

Ferner gilt folgender Satz, welcher zeigt, daß die Menge der gröberen Divisorklassen von Δ genau so groß ist wie die der gröberen Divisorklassen von Δ/K oder von Δ/K':

(8) *Eine gröbere Äquivalenz $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$ (in Δ) ist mit der gröberen Äquivalenz $\mathfrak{a}_{\Delta/K} \approx \mathfrak{b}_{\Delta/K}$ (in Δ/K) gleichbedeutend, und entsprechendes gilt für Δ/K' statt Δ/K.*

Zum Beweise beachte man, daß der Homomorphismus $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_{\Delta/K}$ nicht nur einen Homomorphismus der gewöhnlichen, sondern auch der gröberen Divisorklassengruppe von Δ auf die von Δ/K induziert, und daß dabei die auf Null abgebildeten Divisoren, also die Divisoren aus K, in der gröberen Hauptklasse von Δ liegen, so daß die Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_{\Delta/K}$ für die gröberen Divisorklassen sogar einen *Isomorphismus* bedeutet.

7. Kennzeichnung der nichtkonstanten Primdivisoren eines Doppelkörpers.

Für die algebraische Kennzeichnung der nichtkonstanten Primdivisoren eines Doppelkörpers $\Delta = K \times K'$ gibt es zwei Möglichkeiten: Erstens die Kennzeichnung durch abhängige Komposita von K mit K' und zweitens die Kennzeichnung durch Systeme von Isomorphismen von K in die algebraisch-abgeschlossene Hülle $\overline{K}'$ von K'. Beide Möglichkeiten wollen wir hier untersuchen, da sie beide grundlegend für unsere Ausführungen sind. Die Kennzeichnung durch Komposita wird für die Divisorenresttheorie von entscheidender Bedeutung sein, während die Kennzeichnung durch Isomorphismensysteme zur Untersuchung der Restprodukte benötigt wird und den Zusammenhang zwischen den letzteren und den in § 1 behandelten Differenten und Diskriminanten von Isomorphismensystemen liefern wird.

Ein abhängiges Kompositum $M = K\mu \cdot K'\mu'$ von K mit K' heißt *K'-normiert*, wenn $\mu' = \varepsilon'$ der identische Isomorphismus von K' ist; wir schreiben dann $M = K\mu \cdot K'$.

Dann ist $K \to K\mu$ ein Isomorphismius von K in die algebraisch-abgeschlossene Hülle $\bar{K}'$ von K', und umgekehrt führt jeder Isomorphismus $K \to K\mu$ von K in $\bar{K}'$ zu einem K'-normierten Kompositum $K\mu \cdot K'$. Alle Typen abhängiger Komposita von K mit K' können durch K'-normierte Komposita repräsentiert werden, und zwei K'-normierte Komposita $M = K\mu \cdot K'$ und $H = K\eta \cdot K'$ sind genau dann vom selben Typus, wenn es einen K' festlassenden Isomorphismus σ von M auf H gibt mit $\mu\sigma = \eta$. Wir nennen dann μ und η *konjugiert* bezüglich K'. Hieraus folgt:

(1) *Die sämtlichen Typen abhängiger Komposita von K mit K' entsprechen umkehrbar eindeutig den Systemen $\boldsymbol{\mu}$ von K'-konjugierten Isomorphismen von K in $\bar{K}'$ derart, daß für μ aus $\boldsymbol{\mu}$ das K'-normierte Kompositum $K\mu \cdot K'$ den zu $\boldsymbol{\mu}$ gehörigen Typus repräsentiert.*

Nach dieser Vorbereitung können wir folgenden Satz formulieren:

(2) *Die nichtkonstanten Primdivisoren $\mathfrak{m}$ des Doppelkörpers $\Delta = K \times K'$ entsprechen eineindeutig den Systemen K'-konjugierter Isomorphismen von K in $\bar{K}'$ und daher nach* (1) *den Typen abhängiger Komposita von K mit K' in der Weise, daß der Restklassenkörper $\Delta\mathfrak{m}$ von Δ modulo $\mathfrak{m}$ zusammen mit den durch den Restklassenhomomorphismus modulo $\mathfrak{m}$ induzierten Isomorphismen von K und K' in $\Delta\mathfrak{m}$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Kompositum darstellt.*

Fassen wir nämlich die nichtkonstanten Primdivisoren von Δ als die nichtkonstanten Primdivisoren von Δ/K' auf, so gilt die in (2) formulierte Behauptung über den Zusammenhang zwischen diesen Primdivisoren und den Isomorphismensystemen von K in $\bar{K}'$ nach [1], S. 167—168.

Wir schließen nun einige Bemerkungen an, die eine für uns nützliche Ausgestaltung des obigen Zusammenhanges zwischen den Primdivisoren von Δ einerseits, und (a.) den abhängigen Komposita von K mit K', (b.) den Isomorphismensystemen von K in $\bar{K}'$ andererseits betreffen.

Zu (a.). Es sei $M = K\mu \cdot K'\mu'$ ein beliebiges abhängiges Kompositum von K mit K', und es sei $\mathfrak{m}$ der nach (2) zugehörige Primdivisor von Δ mit dem Restkompositum $\Delta\mathfrak{m} = K\mathfrak{m} \cdot K'\mathfrak{m}$. Dann sind diese beiden Komposita vom selben Typus, und der Resthomomorphismus $a \to a\mathfrak{m}$ von Δ auf $\Delta\mathfrak{m}$ überträgt sich daher eindeutig zu einem Homomorphismus $a \to a\mu^*$ von Δ auf M derart, daß $K\mu^* = K\mu$ und $K'\mu^* = K'\mu'$ ist. Wir nennen μ^* den zum Kompositum $M = K\mu \cdot K'\mu'$ gehörigen *Resthomomorphismus.* $a\mu^* = 0$ bzw. $= \infty$ bedeutet einfach, daß $\mathfrak{m}$ im Zähler bzw. im Nenner von a in Δ aufgeht.

Ist $M = K\mu \cdot K'$ ein K'-normiertes Kompositum, so sagen wir auch der Einfachheit halber, der Resthomomorphismus μ^* sei K'-normiert. Ist $H = K\eta \cdot K'\eta'$ ein Kompositum vom selben Typus wie $M = K\mu \cdot K'\mu'$, und ist η^* der zu H gehörige Resthomomorphismus so sagen wir, daß μ^* und η^* vom selben Typus seien. Es gibt dann einen Isomorphismus σ von M auf H derart, daß $\mu^*\sigma = \eta^*$ ist.

Zu (b.). Zu einem nichtkonstanten Primdivisor $\mathfrak{m}$ von Δ gehört nach (2) ein System K'-konjugierter Isomorphismen von K in $\bar{K}'$, aus dem wir einen Isomorphismus μ herausgreifen; es sei $M = K\mu \cdot K'$ das zugehörige K'-normierte Kompositum. Für unsere Zwecke wird es nützlich sein, die Isomorphismen des zu $\mathfrak{m}$ gehörigen Isomorphismensystems von K in $\bar{K}'$ so oft zu zählen, wie der Inseparabilitätsgrad q von M/K' angibt (der ja unabhängig von der Auswahl von μ unter seinen K'-Konjugierten ist). Wir erhalten auf diese Weise das *volle*, zu $\mathfrak{m}$ gehörige Isomorphismensystem $\boldsymbol{\mu}$ von K in $\bar{K}'$. Dies besteht aus genau soviel Isomorphismen, wie der Grad $[M : K'] = gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{m})$ angibt, und man erhält es aus μ, indem man auf μ ein *volles* System $\boldsymbol{\sigma}$ von Isomorphismen von M/K' anwendet, wobei also jeder Isomorphismus q mal zu zählen ist: $\boldsymbol{\mu} = \mu\boldsymbol{\sigma}$.

Die Zweckmäßigkeit dieser Begriffsbildung tritt zutage, wenn wir uns die Aufgabe stellen, einen vorgegebenen Primdivisor $\mathfrak{m}$ von $\Delta = K \times K'$ durch Übergang zu einem geeigneten Doppelkörper $\tilde{\Delta} = K \times \tilde{K}$ (wo $\tilde{K}/K'$ eine endlich-algebraische Erweiterung ist) in lauter Primdivisoren ersten Grades über $\tilde{K}$ zu zerlegen. Die Lösung dieser Aufgabe ist für uns von großer Wichtigkeit. Sie gestattet es uns nämlich, Aussagen über beliebige Primdivisoren auf solche ersten Grades zurückzuführen; die letzteren sind aber besonders einfach zu übersehen. Es gilt nun folgender Satz:

(3) *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein nichtkonstanter Primdivisor von* $\Delta = K \times K'$ *mit dem vollen Isomorphismensystem* $\boldsymbol{\mu}$ *von* K *in* $\bar{K}'$, *und ist* $\tilde{K}$ *ein solcher endlich-algebraischer Erweiterungskörper von* K', *der alle* $K\mu$ *mit* μ *aus* $\boldsymbol{\mu}$ *enthält, so zerfällt* $\mathfrak{m}$ *in* $\tilde{\Delta} = K \times \tilde{K}$ *in eine Summe*

$$\mathfrak{m} = \sum_{\mu} \tilde{\mathfrak{m}}_{\mu}$$

von nichtkonstanten Primdivisoren ersten Grades über $\tilde{K}$, *welche eineindeutig durch die Isomorphismen* μ *aus* $\boldsymbol{\mu}$ *im Sinne von* (2) *charakterisiert sind.*

Eine Erweiterung $\tilde{K}/K'$ der angegebenen Art soll eine *Zerfällungserweiterung* für $\mathfrak{m}$ heißen. Der Satz (3) ist also eine Aussage über die Primzerlegung von $\mathfrak{m}$ in dem mit einer Zerfällungserweiterung gebildeten Doppelkörper $K \times \tilde{K}$. Und zwar sagt er gemäß der Definition des vollen Isomorphismensystems aus, daß erstens die *verschiedenen* Primteiler von $\mathfrak{m}$ durch die verschiedenen Isomorphismen aus $\boldsymbol{\mu}$ in der angegebenen Weise charakterisiert sind, und daß zweitens alle Primteiler von $\mathfrak{m}$ in $\tilde{\Delta}$ dieselbe Verzweigungsordnung besitzen, die sich als der gemeinsame Inseparabilitätsgrad aller $K\mu \cdot K'/K'$ mit μ aus $\boldsymbol{\mu}$ ergibt. Wir begnügen uns damit, den allgemeinen Grundgedanken dieses Beweises darzustellen. Für die Einzelheiten der Ausführung, welche wohlbekannte Schlüsse aus der Theorie der Bewertungsfortsetzungen darstellen, verweisen wir auf [5], §§ 20 und 25.

Die Charakterisierung der verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{m}$ durch die verschiedenen Isomorphismen aus $\boldsymbol{\mu}$ gewinnt man folgendermaßen: Ist der Primdivisor $\tilde{\mathfrak{m}}$ von $\tilde{\Delta}$ eine Fortsetzung des Primdivisors $\mathfrak{m}$ von Δ, so äußert sich das darin, daß der Restklassenhomomorphismus von $\tilde{\Delta}$ mod $\tilde{\mathfrak{m}}$ eine Fortsetzung des Restklassenhomomorphismus von Δ mod $\mathfrak{m}$ ist. Dies bedeutet, daß ein zu $\tilde{\mathfrak{m}}$ im Sinne von (2) gehöriger Isomorphismus von K in $\bar{K}'$ [12]) gleichzeitig ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriger Isomorphismus ist, also dem System $\boldsymbol{\mu}$ angehört. Danach gilt für eine *beliebige* endlich-algebraische Erweiterung K''/K' folgendes:

(4) *Die verschiedenen Fortsetzungsprimdivisoren von* $\mathfrak{m}$ *in* $K \times K''$ *werden im Sinne von* (2) *durch diejenigen Teilsysteme* K''*-konjugierter Isomorphismen von* K *in* $\bar{K}'$ *gegeben, in die sich* $\boldsymbol{\mu}$ *aufspaltet.*

Haben wir nun statt einer beliebigen Erweiterung K''/K' eine Zerfällungserweiterung $\tilde{K}/K'$, für die definitionsgemäß $K\mu \leqq \tilde{K}$ für alle μ aus $\boldsymbol{\mu}$ ist, so folgt aus (4) die in (3) enthaltene Aussage über die verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{m}$ in $K \times \tilde{K}$, da dann keine zwei verschiedenen Isomorphismen aus $\boldsymbol{\mu}$ bezüglich $\tilde{K}$ konjugiert sind. — Es bleibt also die Aussage über die Verzweigungsordnung zu beweisen. Wir sagen, daß $\mathfrak{m}$ über K' *separabel* ist, wenn ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Kompositum $M = K\mu \cdot K'\mu'$ über $K'\mu'$ separabel ist; diese Definition ist ersichtlich unabhängig von der Auswahl von M unter den Komposita von gleichem Typus. Zuerst gilt nun:

(5) *Ist* $\mathfrak{m}$ *separabel über* K', *so ist* $\mathfrak{m}$ *in jeder Erweiterung* $K \times K''$ *bei beliebigem endlich-algebraischen* K''/K' *unverzweigt.*

---

[12]) $\bar{K}'$ ist gleichzeitig die algebraisch-abgeschlossene Hülle von K' und von $\tilde{K}$.

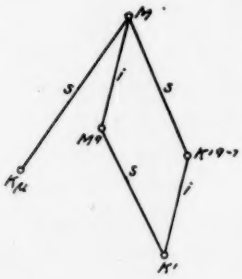
Zum Beweise können wir K'' durch einen endlich-algebraischen Erweiterungskörper K''' ersetzen, denn ist $\mathfrak{m}$ in $K \times K'''$ unverzweigt, so erst recht im Teilkörper $K \times K''$. Für K''' wählen wir eine K'' enthaltende Zerfällungserweiterung für $\mathfrak{m}$. Mit anderen Worten: Wir können annehmen, K''/K' sei eine Zerfällungserweiterung für $\mathfrak{m}$. Wir bilden dann das in K'' enthaltene Kompositum $\hat{M}$ von allen $M = K\mu \cdot K'$ mit μ aus $\mathfrak{p}$. Nach Voraussetzung über $\mathfrak{m}$ sind alle M/K' separabel, also auch $\hat{M}/K'$. Wir zerlegen nun die Erweiterung K''/K' in die beiden Schritte $\hat{M}/K'$ und $K''/\hat{M}$, und dementsprechend $K \times K''/K \times K'$ in die beiden Schritte

$$K \times \hat{M}/K \times K' \quad \text{und} \quad K \times K''/K \times \hat{M}.$$

Beim ersten Schritt tritt wegen der Separabilität von $\hat{M}/K'$ keine Verzweigung auf, was man ganz genau so erschließt wie in [5], S. 341 (was wegen der Separabilität möglich ist). Da $\hat{M}/K'$ konstruktionsgemäß eine Zerfällungserweiterung für $\mathfrak{m}$ ist, so sind alle Primteiler von $\mathfrak{m}$ in $K \times \hat{M}$ nach (4) von erstem Grade über $\hat{M}$ und werden daher beim Übergang zu $K \times K''$ weder zerfällt noch verzweigt. Da also bei keinem dieser beiden Schritte für $\mathfrak{m}$ eine Verzweigung auftritt, so ist $\mathfrak{m}$ in der Tat in $K \times K''$ unverzweigt. — Insbesondere folgt aus (5), daß für einen über K' separablen Primdivisor das behauptete Zerlegungsgesetz (3) richtig ist, da ja dann alle μ aus $\mathfrak{p}$ verschieden sind, also (3) die Unverzweigtheit von $\mathfrak{m}$ behauptet. Wir können daher annehmen, $\mathfrak{m}$ sei über K' inseparabel. Ist dann μ aus $\mathfrak{p}$ und $M = K\mu \cdot K'$ mit dem Inseparabilitätsgrad q über K', so ist M^q ein separabler Erweiterungskörper von K' und $K'^{q^{-1}}$ ein Teilkörper von M, über dem M separabel ist [13]).

Es gilt ferner:

(6) *Der über K' inseparable Primdivisor $\mathfrak{m}$ ist über K separabel.* Denn sonst wäre neben M/K' auch $M/K\mu$ inseparabel, also M^p (p = Charakteristik von M) ein Erweiterungskörper von $K\mu$ und von K'. Es wäre also M nicht das Kompositum von $K\mu$ und K' [14]).



Nach dem Gesagten liegt also das nebenstehende Körperschema vor, wo s eine separable und i eine rein inseparable Erweiterung bedeutet. Nun können wir folgenden Satz beweisen:

(7) *$\mathfrak{m}$ ist in $K \times K'^{q^{-1}}$ rein verzweigt von der Ordnung q.*

Denn sicher ist $\mathfrak{m}$ in $(K \times K')^{q^{-1}} = K^{q^{-1}} \times K'^{q^{-1}}$ verzweigt von der Ordnung q, und es bleibt nachzuweisen, daß in der Erweiterung

$$(8) \qquad K^{q^{-1}} \times K'^{q^{-1}} / K \times K'^{q^{-1}}$$

der Primteiler $\mathfrak{m}_0$ von $\mathfrak{m}$ in $K \times K'^{q^{-1}}$ unverzweigt ist. Nach (4) gehört zu $\mathfrak{m}_0$ der Isomorphismus $K \to K\mu$ von K in $\bar{K}'$, was im Hinblick auf die obige Figur die Separabilität von $\mathfrak{m}_0$ über K ergibt, denn $M = K\mu \cdot K'^{q^{-1}}$ ist ein zu $\mathfrak{m}_0$ gehöriges Kompositum von K mit $K'^{q^{-1}}$. Wegen der Separabilität über K folgt nun nach (5) die Unverzweigtheit von $\mathfrak{m}_0$ bei der Erweiterung (8), w. z. b. w.

Aus dem Beweis von (7) folgt wegen der Separabilität von $M/K'^{q^{-1}}$ weiter, daß $\mathfrak{m}_0$ über $K'^{q^{-1}}$ separabel ist. Nach (5) folgt daraus die Unverzweigtheit von $\mathfrak{m}_0$ in jeder

[13]) Dies ist eine Folge davon, daß Ω algebraisch abgeschlossen ist und M/Ω den Transzendenzgrad 1 besitzt. Vgl. [5], S. 242.

[14]) Diese Schlußweise ist aus [1], S. 168 entnommen.

Erweiterung $K \times K''$ von $K \times K'^{\varrho^{-1}}$; insbesondere gilt dies für eine Zerfällungserweiterung $\tilde{K}$, welche ja M, also auch $K'^{\varrho^{-1}}$ enthält. Im Hinblick auf (7) ergibt das in der Tat die in (3) enthaltene Behauptung, daß $\mathfrak{m}$ in $K \times \tilde{K}$ von der Ordnung q verzweigt ist. — Damit ist das Zerlegungsgesetz (3) als richtig erkannt. Übrigens ergibt sich aus den eben angestellten Überlegungen ein Zerlegungsgesetz von $\mathfrak{m}$ in einer beliebigen Erweiterung $K \times K''$. Jedoch benötigen wir es nur in der handlichen Form (3), da es uns lediglich darauf ankommen wird, einen Primdivisor von Δ in Primdivisoren ersten Grades zu zerlegen.

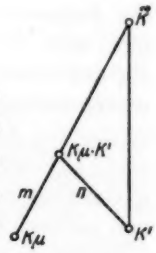
Zum Schluß erklären wir noch Zerfällungserweiterung und volles Isomorphismensystem für einen beliebigen ganzen total nichtkonstanten Divisor $\mathfrak{b}$ von Δ: Eine endlich-algebraische Erweiterung $\tilde{K}/K'$, welche für jeden Primteiler von $\mathfrak{b}$ eine Zerfällungserweiterung ist, sei eine *Zerfällungserweiterung für* $\mathfrak{b}$ genannt. Schreibt man die vollen Isomorphismensysteme aller Primteiler von $\mathfrak{b}$ nebeneinander auf (wobei jeder Primteiler so oft gezählt wird, wie er in $\mathfrak{b}$ vorkommt), so erhält man ein *volles zu* $\mathfrak{b}$ *gehöriges Isomorphismensystem* von K in $\tilde{K}'$. Nennen wir dieses $\boldsymbol{\beta}$, so folgt aus Satz (3):

(9) $\mathfrak{b}$ *zerfällt in* $\tilde{\Delta} = K \times \tilde{K}$ *in eine Summe* $\mathfrak{b} = \sum_{\beta} \tilde{\mathfrak{b}}_\beta$ *von Primdivisoren* $\tilde{\mathfrak{b}}_\beta$ *ersten Grades über* $\tilde{K}$, *welche eineindeutig den Isomorphismen* β *aus* $\boldsymbol{\beta}$ *in der angegebenen Weise entsprechen.*

Hieraus entnehmen wir die später einmal (**16.** (7)) benötigte *Gradregel*:

Wir setzen $m = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{b})$. Dann gilt:

$$\sum_{\beta \text{ in } \boldsymbol{\beta}} [\tilde{K} : K\beta] = [K : K'] \cdot m. \tag{10}$$



Beweis: Nach (9) steht auf der linken Seite der behaupteten Gleichung (10) der Grad $gr_{\tilde{\Delta}/K}(\mathfrak{b})$. Wegen der Linearität der Gradfunktionen können wir daher annehmen, es sei $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}$ ein nichtkonstanter *Prim*divisor von Δ. Dies hat zur Folge, daß alle Isomorphismen μ aus $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\mu}$ zu einem festen unter ihnen, etwa μ_0, bezüglich K' konjugiert sind. Daher gilt (wenn noch $n = gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{m}) = [K\mu_0 \cdot K' : K']$ gesetzt wird):

$$[K\mu \cdot K' : K'] = n;\ [K\mu \cdot K' : K\mu] = m \text{ also (vgl. Figur): } [\tilde{K} : K\mu] = [\tilde{K} : K'] \cdot \frac{1}{n} \cdot m.$$

Dies gilt für alle μ. Da ihre Anzahl gleich n ist, ergibt die Summation das n-fache $[\tilde{K} : K'] \cdot m$, w. z. b. w.

8. Integritätsbereiche in einem Doppelkörper.

Zu jeder Primdivisormenge $\mathfrak{P}$ von Δ gehört ein Integritätsbereich, welcher aus allen $\mathfrak{P}$-ganzen Elementen aus Δ besteht. In diesem Abschnitt werden wir zwei Arten spezieller solcher Integritätsbereiche untersuchen, deren Kenntnis uns bei unseren weiteren Ausführungen, insbesondere beim Studium der Divisorenreste nützlich sein wird. Zunächst ist in Δ in invarianter Weise die Menge der nichtkonstanten Primdivisoren ausgezeichnet, deren Integritätsbereich wir die *ausgezeichnete Hauptordnung* nennen und stets mit I bezeichnen. I wird rein algebraisch durch folgenden Satz bestimmt:

(1) *I ist gleich dem in Δ gebildeten Ringkompositum* $[K, K']$[15]).

Neben der ausgezeichneten Hauptordnung I werden wir noch Hauptordnungen der Form $I_{\mathfrak{q}}$ untersuchen, welche folgendermaßen gebildet sind: $\mathfrak{q} = \{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'\}$ sei ein System

[15]) Dieser Satz wurde auch schon in [2], S. 32 bewiesen.

von zwei konstanten Primdivisoren von Δ, deren einer in K liegt, während der andere $\mathfrak{q}'$ in K' liegen soll. $I_{\mathfrak{q}}$ sei dann der Integritätsbereich derjenigen Elemente aus I, welche $\mathfrak{q}$-ganz sind. Hier gilt der zu (1) analoge Satz:

(2) *$I_{\mathfrak{q}}$ ist gleich dem in Δ gebildeten Ringkompositum $[K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$ des Integritätsbereiches $K_{\mathfrak{q}}$ der $\mathfrak{q}$-ganzen Elemente aus K mit dem Integritätsbereich $K'_{\mathfrak{q}'}$ der $\mathfrak{q}'$-ganzen Elemente aus K'.*

Aus (2) folgt (1) unter Beachtung der Tatsache, daß sowohl I die Vereinigungsmenge aller $I_{\mathfrak{q}}$ als auch $[K, K']$ die Vereinigungsmenge aller $[K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$ ist, wenn das Primdivisorensystem $\mathfrak{q}$ alle Paare von Primdivisoren $\mathfrak{q}$ aus K und $\mathfrak{q}'$ aus K' durchläuft.

Beweis von (2): Da sowohl die Elemente aus $K_{\mathfrak{q}}$ als auch die aus $K'_{\mathfrak{q}'}$ konstanten und zu $\mathfrak{q}$ primen Nenner besitzen, so gilt dies auch für die Elemente des Ringkompositums $[K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$, was $[K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}] \leqq I_{\mathfrak{q}}$ ergibt. Um die Umkehrung zu zeigen, wählen wir ein beliebiges Element $a \neq 0$ aus $I_{\mathfrak{q}}$ und weisen nach, daß es in $[K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$ liegt:

Der Nenner von a in Δ ist konstant und zu $\mathfrak{q}$ prim; daher ist der in K gelegene Nennerbestandteil $\mathfrak{n}$ von a zu $\mathfrak{q}$ prim. Jetzt wählen wir in K ein nichtkonstantes Element t, dessen Nenner prim zu $\mathfrak{q}$ und durch $\mathfrak{n}$ teilbar ist[16]), sodaß a ganz in t ist, wenn man es als Element des algebraischen Funktionenkörpers Δ/K' betrachtet. Ist u_i eine t-Ganzheitsbasis von K/Ω, so bilden diese Elemente auch eine t-Ganzheitsbasis von Δ/K', und daher läßt sich a in der Form

$$a = \sum_i f'_i(t)\, u_i$$

mit *Polynomen* $f'_i(t)$ darstellen, deren Koeffizienten in K' liegen. Beachtet man noch, daß mit t auch die t-ganzen Elemente u_i ganz für $\mathfrak{q}$ sind, so liest man aus dieser Darstellung ab, daß a zumindest in $[K_{\mathfrak{q}}, K']$ liegt. Um nun zu zeigen, daß a sogar in $[K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$ liegt, wie es verlangt wird, beachte man, daß der Primdivisor $\mathfrak{q}'$ von K' ein *Funktionalprimdivisor* von Δ/K' ist[17]). Das bedeutet, daß sich der $\mathfrak{q}'$-Teiler von a als der größte gemeinsame $\mathfrak{q}'$-Teiler der Koeffizienten der Polynome $f'_i(t)$ ergibt. Wegen der vorausgesetzten $\mathfrak{q}'$-Ganzheit von a sind daher diese Koeffizienten $\mathfrak{q}'$-ganz. Daher setzt die obige Darstellung von a durch die t und u_i mit Koeffizienten aus $K'_{\mathfrak{q}'}$ die Zugehörigkeit von a zum Ringkompositum $[K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$ in Evidenz.

Für die Idealtheorie der Ringe I und $I_{\mathfrak{q}}$ ist folgender Satz von Bedeutung:

(3) *Schreibt man für endlich viele nichtkonstante Primdivisoren $\mathfrak{p}_i$ von Δ ganzrationale Zahlen $r_{\mathfrak{p}_i}$ vor, sowie für $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ ganzrationale Zahlen $r_{\mathfrak{q}}, r_{\mathfrak{q}'}$, so gibt es stets ein Element a aus Δ, welches diese Werte für $\mathfrak{p}_i$ bzw. $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}'$ annimmt, und außerdem für die übrigen nichtkonstanten Primdivisoren $\mathfrak{p}$ ganz ist:*

$$w_{\mathfrak{p}_i}(a) = r_{\mathfrak{p}_i}; \quad w_{\mathfrak{q}}(a) = r_{\mathfrak{q}}; \quad w_{\mathfrak{q}'}(a) = r_{\mathfrak{q}'}; \quad w_{\mathfrak{p}}(a) \geqq 0 \text{ für } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i.$$

Beweis: Wir fassen zuerst die Forderungen bezüglich der nichtkonstanten Primdivisoren von Δ ins Auge, achten also zunächst nicht auf die Primdivisoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$. Die nichtkonstanten Primdivisoren von Δ können auch als die nichtkonstanten Primdivisoren des algebraischen Funktionenkörpers Δ/K als Konstantenerweiterung von K'/Ω betrachtet werden; für diese steht aber die Erfüllbarkeit der angegebenen Forderungen nach dem verschärften Annäherungssatz für Δ/K fest ([5], S. 298). Um nun noch zusätzlich die Forderungen bezüglich $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zu erfüllen, multipliziere man ein den übrigen Forderungen genügendes Element a mit passenden Primelementpotenzen zu $\mathfrak{q}$ aus K und zu $\mathfrak{q}'$ aus K', wodurch erstens das Erfülltsein der auf die nichtkonstanten Primdivisoren bezüg-

---

[16]) Eine solche Wahl von t ist möglich, da die angegebenen Bedingungen lediglich Vorschriften über die Werte von t für endlich viele Primdivisoren bedeuten.

[17]) Vgl. [1], S. 169, Satz 3.

lichen Forderungen nicht beeinträchtigt wird, und wodurch man zweitens die zusätzliche Gültigkeit von $w_{\mathfrak{q}}(a) = r_{\mathfrak{q}}$ und $w_{\mathfrak{q}'}(a) = r_{\mathfrak{q}'}$ erreichen kann.

Ordnen wir nun jedem Divisor $\mathfrak{a}$ von Δ die Menge $[\mathfrak{a}]$ zu, bestehend aus allen Elementen a aus Δ, für welche $w_{\mathfrak{p}}(a) \geqq w_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})$ für alle nicht konstanten Primdivisoren $\mathfrak{p}$ ist, so folgt aus den Bewertungseigenschaften und aus (3), daß $[\mathfrak{a}]$ ein I-Ideal ist: das *I-Vielfachenideal* von $\mathfrak{a}$. Genau so folgt, daß die Menge $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ aller a, für die außerdem $w_{\mathfrak{q}}(a) \geqq w_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{a})$ und $w_{\mathfrak{q}'}(a) \geqq w_{\mathfrak{q}'}(\mathfrak{a})$ ist, ein $I_{\mathfrak{q}}$-Ideal ist: das *$I_{\mathfrak{q}}$-Vielfachenideal* von $\mathfrak{a}$.

Diese Vielfachenideale werden wir bei der Untersuchung der Divisorenreste heranziehen. Wir werden dann (**10.** (8)) einen Satz benötigen, der sich auf das Verhalten der $I_{\mathfrak{q}}$-Vielfachenideale beim Übergang von $\Delta = K \times K'$ zu einem Doppelkörper $\tilde{\Delta} = K \times \tilde{K}$ mit einer endlich-algebraischen Erweiterung $\tilde{K}/K'$ bezieht, und den wir daher jetzt noch beweisen wollen. Ist $\tilde{\mathfrak{q}}$ ein Fortsetzungsprimdivisor von $\mathfrak{q}'$ in $\tilde{K}$, so bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{q}}$ das Primdivisorensystem $\{\mathfrak{q}, \tilde{\mathfrak{q}}\}$ und bezeichnen mit $\tilde{I}_{\tilde{\mathfrak{q}}} = [K_{\mathfrak{q}}, \tilde{K}_{\tilde{\mathfrak{q}}}]$ den zugehörigen Integritätsbereich aus $\tilde{\Delta}$. Die Divisorengruppe von Δ bettet sich in die Divisorengruppe von $\tilde{\Delta}$ ein. Zu einem Divisor $\mathfrak{a}$ aus Δ kann man daher neben dem $I_{\mathfrak{q}}$-Vielfachenideal $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ aus Δ auch sein $\tilde{I}_{\tilde{\mathfrak{q}}}$-Vielfachenideal $[\tilde{\mathfrak{a}}]_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ aus $\tilde{\Delta}$ bilden. Unsere Behauptung geht nun dahin, daß $[\tilde{\mathfrak{a}}]_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ durch $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ bezüglich $\tilde{I}_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ erzeugt wird, was wir auch durch die Gleichung

$$[\tilde{\mathfrak{a}}]_{\tilde{\mathfrak{q}}} = [\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}} \tilde{I}_{\tilde{\mathfrak{q}}} \tag{4}$$

ausdrücken können.

Beweis: Man wähle eine $\mathfrak{q}'$-Ganzheitsbasis u_i von $\tilde{K}/K'$; diese ist sicher eine Basis von $\tilde{\Delta}/\Delta$. Stellen wir nun ein Element $\tilde{a}$ aus $[\tilde{\mathfrak{a}}]_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ durch die Basis u_i mit Koeffizienten aus Δ dar: $\tilde{a} = \sum_i a_i u_i$, so läuft unsere Behauptung darauf hinaus, daß diese Koeffizienten a_i in $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ liegen, d. h. daß $w_{\mathfrak{x}}(a_i) \geqq w_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{a})$ für alle i ist, wenn $\mathfrak{x}$ ein beliebiger nichtkonstanter Primdivisor von Δ' oder $\mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{q}$ ist. Durch Multiplikation von $\tilde{a}$ und der a_i mit einem Element aus Δ, das für $\mathfrak{x}$ genau die Ordnungszahl $-w_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{a})$ besitzt, läuft das auf den Nachweis zurück, daß jedes $\mathfrak{x}$-ganze Element $\tilde{b}$ aus $\tilde{\Delta}$ durch die Basis u_i mit $\mathfrak{x}$-ganzen Koeffizienten aus Δ dargestellt wird, daß also u_i eine $\mathfrak{x}$-Ganzheitsbasis von $\tilde{\Delta}/\Delta$ ist. Ist nun $\tilde{b} = \sum_i b_i u_i$ (b_i in Δ) die Darstellung von $\tilde{b}$ durch die Basis u_i, so multipliziere man $\tilde{b}$ mit einem geeigneten zu $\mathfrak{x}$ primen Element c aus Δ so, daß $c\tilde{b}$ konstanten und zu $\tilde{\mathfrak{q}}$ primen Nenner in $\tilde{\Delta}$ besitzt, also in $\tilde{I}_{\tilde{\mathfrak{q}}} = [K_{\mathfrak{q}}, \tilde{K}_{\tilde{\mathfrak{q}}}] \leq \sum_i [K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]\, u_i = \sum_i I_{\mathfrak{q}} u_i$ liegt. Hierbei wurde benutzt, daß die u_i eine $\mathfrak{q}'$-Ganzheitsbasis von $\tilde{K}/K'$ bilden, daß also $\tilde{K}_{\tilde{\mathfrak{q}}} \leq \sum_i K'_{\mathfrak{q}'} u_i$ ist. Es liegt dann $\tilde{b}$ in $\sum_i c^{-1} I_{\mathfrak{q}} u_i$, woraus man abliest, daß die b_i in $c^{-1} I_{\mathfrak{q}}$ liegen. Da nun c nach Wahl prim zu $\mathfrak{x}$ ist, sind die b_i in der Tat $\mathfrak{x}$-ganz, und dies war zu zeigen.

§ 3. Divisorenreste in einem Doppelkörper.

9. Arithmetische Theorie der Korrespondenzen.

M. Deuring hat in den beiden Arbeiten [1] und [2] eine arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper entwickelt. Wir benötigen von seinen Ergebnissen im wesentlichen das sogenannte *Additionstheorem*, welches in diesem Abschnitt, zusammen mit den nötigen Begriffen aus der Korrespondenzentheorie, in unserer Schreibweise dargestellt werden soll. Für seinen Beweis verweisen wir auf die Deuringsche Originalarbeit [1]. (Es sei jedoch bemerkt, daß wir in einer weiteren Arbeit die Deuring-

schen Resultate über Korrespondenzen mit den hier entwickelten Methoden neu beweisen werden, so daß sich dann eine Bezugnahme auf [1] erübrigen wird, vgl. Fußnote [3a]). — Ferner wird am Schlusse dieses Abschnitts eine Folgerung aus dem Additionstheorem gezogen und ein Satz über Korrespondenzen bewiesen, welch' beide wir in unserer Arbeit anwenden wollen.

Es seien K und K' zwei algebraische Funktionenkörper, für die eine Korrespondenzentheorie entwickelt werden soll. Da es nur auf ihren Typus über Ω ankommt, können wir sie als algebraisch unabhängig annehmen, so daß wir den Doppelkörper $\Delta = K \times K'$ bilden können. Es sei ferner $M = K\mu \cdot K'\mu'$ ein abhängiges Kompositum von K und K'. Zu diesem bilden wir die Divisorfunktion

$$\mathfrak{c} \to N_{M/K'\mu'}(\mathfrak{c}\mu)\,\mu'^{-1}, \tag{1}$$

die jedem Divisor $\mathfrak{c}$ aus K einen Divisor aus K' zuordnet. Da die Addition, Teilbarkeit und Äquivalenz der Divisoren bei der isomorphen Übertragung μ, bei Einbettung von $K\mu$ in M, bei Normbildung von M nach $K'\mu'$ und schließlich bei der Rückübertragung μ'^{-1} erhalten bleiben, so ist die Abbildung (1) ein *arithmetischer Homomorphismus* der Divisorengruppe von K in die von K'. Dieser hängt nicht von dem Kompositum M selbst, sondern nur von seinem Typus ab. Ist $\mathfrak{m}$ der zu diesem Typus im Sinne von **7.** (2) gehörige Primdivisor von $\Delta = K \times K'$, dann wird für die Abbildung (1) auch $\mathfrak{m}_{K\to K'}(\mathfrak{c})$ geschrieben; sie heißt die durch $\mathfrak{m}$ vermittelte *Korrespondenz* von K in K'. Natürlich vermittelt $\mathfrak{m}$ symmetrisch dazu auch eine Korrespondenz von K' in K, und alles, was über Korrespondenzen von K in K' gesagt wird, insbesondere das Additionstheorem, gilt nach Vertauschung von K und K' auch für Korrespondenzen von K' in K, und umgekehrt.

Für einen konstanten Primdivisor $\mathfrak{q}$ aus K bzw. $\mathfrak{q}'$ aus K' wird

$$\mathfrak{q}_{K\to K'}(\mathfrak{c}) = 0; \quad \mathfrak{q}'_{K\to K'}(\mathfrak{c}) = gr_{K/\Omega}(\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{q}' \tag{2}$$

gesetzt, und für einen beliebigen Divisor $\mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{p}} r_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$ aus $\Delta = K \times K'$ wird die Korrespondenz $\mathfrak{a}_{K\to K'}(\mathfrak{c})$ durch Linearität erklärt: $\mathfrak{a}_{K\to K'}(\mathfrak{c}) = \sum_{\mathfrak{p}} r_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}_{K\to K'}(\mathfrak{c})$. Die Korrespondenzen von K in K' bilden somit einen zur Divisorengruppe von Δ homomorphen Modul. Wie in [1] bewiesen, gilt nun das sogenannte *Additionstheorem*:

(3) *Aus* $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ (*in* Δ) *folgt für jeden Divisor* $\mathfrak{c}$ *aus* K *die Äquivalenz* $\mathfrak{a}_{K\to K'}(\mathfrak{c}) \sim \mathfrak{b}_{K\to K'}(\mathfrak{c})$ (*in* K'), *und entsprechendes gilt für die Korrespondenz von* K' *in* K.

Zu dieser Formulierung bemerken wir folgendes: Übersetzt man das bei Deuring vorkommende Additionstheorem in unsere Schreibweise, so lautet es: Ist $\mathfrak{a}$ ein Divisor von Δ/K, und ist $\mathfrak{a} \sim 0$ (in Δ/K), so ist $\mathfrak{a}_{K\to K'}(\mathfrak{c}) \sim 0$ (in K') für jeden Divisor $\mathfrak{c}$ aus K. Man sieht ohne weiteres, daß dies mit (3) gleichbedeutend ist, denn eine Äquivalenz $\mathfrak{a} \sim 0$ (in Δ/K) bedeutet ja eine Äquivalenz von $\mathfrak{a}$ mit 0 in Δ bis auf einen konstanten Divisor aus K, und nach Definition (2) kommt es auf die in K gelegenen Divisoren für die Korrespondenzen von K in K' ja gar nicht an. — Das Additionstheorem kann man auch in folgender, für uns manchmal günstigerer Form aussprechen:

(4) *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein Primdivisor von* K, *so ist die Abbildung* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_{K\to K'}(\mathfrak{q})$ *ein arithmetischer Homomorphismus der Divisorengruppe von* Δ *in die von* K'.

Denn die Homomorphieeigenschaft ist ja nach Definition klar. Daß die Teilbarkeit erhalten bleibt, folgt daraus, daß für einen *Prim*divisor $\mathfrak{m}$ die Teilbarkeit $\mathfrak{m}_{K\to K'}(\mathfrak{q}) > 0$ gilt. Die Invarianz der Äquivalenz ist aber gerade die Aussage des Additionstheorems. —

Es gelten folgende *Gradregeln*:

$$(5)\qquad \begin{aligned} gr_{\Delta/K}(\mathfrak{a}) &= gr_{K'/\Omega}(\mathfrak{a}_{K\to K'}(\mathfrak{q})) \\ gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{a}) &= gr_{K/\Omega}(\mathfrak{a}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')), \end{aligned}$$

welche sich leicht aus der Korrespondenzendefinition ergeben[18]).

Aus dem bisher Gesagten leiten wir nun folgenden Satz ab, welchen wir an zwei Stellen dieser Arbeit (**11.** (10); **16.** (1)) benötigen werden: Es sei $\mathfrak{q}'$ ein beliebig gewählter Primdivisor aus K' und $\mathfrak{r}$ ein ganzer regulärer Divisor aus K, dessen Grad gleich dem Geschlechte g von K ist. Dann gilt:

(6) *In jeder gröberen Klasse von Δ gibt es einen ganzen total nichtkonstanten Divisor* $\mathfrak{b}$ *mit* $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') < \mathfrak{r}$.

Zum Beweise konstruieren wir zu einem beliebig vorgegebenen Divisor $\mathfrak{a}$ von Δ einen ihm gröber äquivalenten Divisor $\mathfrak{b}$, welcher die verlangten Eigenschaften besitzt:

Durch Fortlassen des in K' gelegenen Bestandteils von $\mathfrak{a}$ entsteht ein Divisor $\mathfrak{a}^+$ von Δ/K', der zu $\mathfrak{a}$ gröber äquivalent ist. Wendet man die durch $\mathfrak{a}^+$ gelieferte Korrespondenz von K' in K auf $\mathfrak{q}'$ an, so erhält man einen Divisor $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^+_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ von K, der nach der Gradregel (5) denselben Grad besitzt wie $\mathfrak{a}^+$ über K'. Es folgt, daß der Divisor $\mathfrak{a}^+ - \mathfrak{c} + \mathfrak{r}$ von Δ/K' den Grad g über K' besitzt, weswegen nach dem Riemann-Rochschen Satz für Δ/K' auf einen ganzen Divisor $\mathfrak{b}^+$ mit $\mathfrak{b}^+ \sim \mathfrak{a}^+ - \mathfrak{c} + \mathfrak{r}$ (in Δ/K') geschlossen werden kann. Diese Äquivalenz in Δ/K' bedeutet eine Äquivalenz in Δ bis auf einen gewissen in K' gelegenen Divisor $\mathfrak{c}'$:

$$(7)\qquad \mathfrak{b}^+ \sim \mathfrak{a}^+ - \mathfrak{c} + \mathfrak{r} + \mathfrak{c}' \qquad (\text{in } \Delta).$$

Auf Grund des Additionstheorems ergibt sich hieraus durch Anwendung auf $\mathfrak{q}'$ die Äquivalenz $\mathfrak{b}^+_{K'\to K}(\mathfrak{q}') \sim \mathfrak{a}^+_{K'\to K}(\mathfrak{q}') - \mathfrak{c} + \mathfrak{r} = \mathfrak{c} - \mathfrak{c} + \mathfrak{r} = \mathfrak{r}$ (in K). Aus der Regularität von $\mathfrak{r}$ und der Ganzheit von $\mathfrak{b}^+_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ (welche eine Folge der Ganzheit von $\mathfrak{b}^+$ ist) folgt nun, daß sogar $\mathfrak{b}^+_{K'\to K}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{r}$ ist. Läßt man aus $\mathfrak{b}^+$ den nichtkonstanten Teil fort, so entsteht ein ganzer total nichtkonstanter Divisor $\mathfrak{b}$, der ein Teiler von $\mathfrak{b}^+$ ist, und für den daher

$$\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') < \mathfrak{b}^+_{K'\to K}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{r}$$

gilt. Dieser Divisor $\mathfrak{b}$ ist nun auch zu $\mathfrak{a}$ gröber äquivalent, weil nach (7) $\mathfrak{b}^+$ zu $\mathfrak{a}^+$ gröber äquivalent ist, und weil sich nach Konstruktion $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}^+$ sowie $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}^+$ nur um konstante Divisoren unterscheiden.

Damit ist der Satz (6), der ein sehr nützliches Hilfsmittel für unsere Beweise darstellen wird, voll bewiesen. Wir beweisen jetzt noch einen Satz, der sich auf das Rechnen mit Korrespondenzen bezieht, und der im Beweis von Satz **16.** (1) herangezogen wird: Es sei $\mathfrak{b}$ ein ganzer total nichtkonstanter Divisor von $\Delta = K \times K'$ mit dem vollen Isomorphismensystem $\boldsymbol{\beta}$ von K in $\bar{K}'$. Ferner sei $\tilde{K}/K'$ eine Zerfällungserweiterung für $\mathfrak{b}$, so daß also alle $K\beta$ in $\tilde{K}$ enthalten sind (β aus $\boldsymbol{\beta}$). Zu einem Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{K}$ können wir dann die $\boldsymbol{\beta}$-Komponentensumme $\sum\limits_{\beta} \beta\tilde{\mathfrak{q}} = \sum\limits_{\beta} N_{\tilde{K}/K\beta}(\tilde{\mathfrak{q}})\, \beta^{-1}$ bilden, welche wir im Augenblick der Einfachheit halber mit $\boldsymbol{\beta}\tilde{\mathfrak{q}}$ bezeichnen wollen (wir verstehen jetzt also unter $\boldsymbol{\beta}\tilde{\mathfrak{q}}$ nicht das System der $\boldsymbol{\beta}$-Komponenten von $\tilde{\mathfrak{q}}$, sondern deren Summe). Der folgende Satz liefert nun eine Berechnungsvorschrift der Komponentensumme $\boldsymbol{\beta}\tilde{\mathfrak{q}}$ durch die Korrespondenz $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$:

---

[18]) Vgl. [1], S. 161.

(8) *Es ist* $\boldsymbol{\beta}\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$, *falls* $\mathfrak{q}'$ *das Primvielfache von* $\tilde{\mathfrak{q}}$ *in* K' *ist.*

Der Beweis von (8) ergibt sich sehr einfach aus den Eigenschaften der Komponentensumme $\boldsymbol{\beta}\tilde{\mathfrak{q}}$ und der Korrespondenz $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$.

Zerlegt sich $\boldsymbol{\beta}$ in paarweise fremde Teilsysteme $\boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r\}$, so ist $\boldsymbol{\beta}\tilde{\mathfrak{q}} = \boldsymbol{\beta}_1\tilde{\mathfrak{q}} + \cdots + \boldsymbol{\beta}_r\tilde{\mathfrak{q}}$, was unmittelbar aus der Definition der Komponentensumme folgt. Diese Bemerkung ermöglicht es, nach Zerlegung von $\mathfrak{b}$ in seine Primteiler von Δ und entsprechender Zerlegung von $\boldsymbol{\beta}$ in die zugehörigen vollen Isomorphismensysteme die Gleichung (8) auf die entsprechende Gleichung

$$\mathfrak{m}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') = \boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}} \tag{9}$$

für einen nichtkonstanten *Prim*divisor $\mathfrak{m}$ von Δ mit dem zugehörigen vollen Isomorphismensystem $\boldsymbol{\mu}$ von K in $\bar{K}'$ zurückzuführen.

Ist $\hat{K}$ ein $\tilde{K}$ umfassender endlich-algebraischer Erweiterungskörper von K', und ist $\hat{\mathfrak{q}}$ ein Primteiler von $\tilde{\mathfrak{q}}$, so ist die in $\hat{K}$ gebildete Komponentensumme von $\hat{\mathfrak{q}}$ gleich der in $\tilde{K}$ gebildeten Komponentensumme von $\tilde{\mathfrak{q}}$, weil für jeden Isomorphismus μ aus $\boldsymbol{\mu}$ die Formel $N_{\hat{K}/K\mu}(\hat{\mathfrak{q}}) = N_{\tilde{K}/K\mu}(\tilde{\mathfrak{q}})$ gilt. Diese Bemerkung ermöglicht es, zum Beweis von (9) den Körper $\tilde{K}$ der Einfachheit halber durch einen ihn umfassenden Normalkörper über K' zu ersetzen, anders gesagt: Wir können annehmen, $\tilde{K}/K'$ sei *normal.* Mit ϱ bezeichnen wir dann die Automorphismen des vollen Automorphismensystems von $\tilde{K}/K'$.

Jeder Automorphismus ϱ führt ein μ aus $\boldsymbol{\mu}$ in einen Isomorphismus $\mu\varrho$ und $\tilde{\mathfrak{q}}$ in den Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}\varrho$ von $\tilde{K}$ über; demnach ist $(\mu\varrho)(\tilde{\mathfrak{q}}\varrho) = \mu\tilde{\mathfrak{q}}$. Da nun $\boldsymbol{\mu}$ ein volles System K'-konjugierter Isomorphismen ist, so liegt $\mu\varrho$ auch in $\boldsymbol{\mu}$ und durchläuft mit μ ganz $\boldsymbol{\mu}$. Demnach folgt durch Summation über alle μ aus $\boldsymbol{\mu}$ für die Komponentensummen von $\tilde{\mathfrak{q}}$ und $\tilde{\mathfrak{q}}\varrho$ die Gleichung

$$\boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}} = \boldsymbol{\mu}(\tilde{\mathfrak{q}}\varrho). \tag{10}$$

Zufolge der Voraussetzung, daß $\tilde{K}/K'$ normal ist, zerlegt sich $\mathfrak{q}'$ in $\tilde{K}$ in die Summe $\mathfrak{q}' = \sum_{\varrho} \tilde{\mathfrak{q}}\varrho$, wobei über alle Automorphismen ϱ aus dem vollen Automorphismensystem von $\tilde{K}/K'$ summiert wird. Da die Anzahl der ϱ gleich dem Körpergrad $[\tilde{K} : K']$ ist, so folgt aus (10)

$$\boldsymbol{\mu}\mathfrak{q}' = \sum_{\varrho} \boldsymbol{\mu}(\tilde{\mathfrak{q}}\varrho) = [\tilde{K} : K'] \cdot \boldsymbol{\mu}\tilde{\mathfrak{q}}. \tag{11}$$

Andererseits behaupten wir, daß

$$\boldsymbol{\mu}\mathfrak{q}' = [\tilde{K} : K'] \cdot \mathfrak{m}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') \tag{12}$$

ist, womit dann (9) bewiesen ist. — Es sei μ_0 ein fester Isomorphismus aus $\boldsymbol{\mu}$. Da alle Isomorphismen aus $\boldsymbol{\mu}$ zu μ_0 bezüglich K' konjugiert sind und $\mathfrak{q}'$ in K' liegt, so ist für alle μ aus $\boldsymbol{\mu}$ stets $\mu\mathfrak{q}' = \mu_0\mathfrak{q}'$. Nach Summation über alle μ von der Anzahl $[K\mu_0 \cdot K' : K']$ folgt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}\mathfrak{q}' &= [K\mu_0 \cdot K' : K'] \cdot \mu_0\mathfrak{q}' = [K\mu_0 \cdot K' : K'] \cdot N_{\tilde{K}/K\mu_0}(\mathfrak{q}')\, \mu_0^{-1} \\ &= [K\mu_0 \cdot K' : K'] \cdot [\tilde{K} : K\mu_0 \cdot K'] \cdot N_{K\mu_0 \cdot K'/K\mu_0}(\mathfrak{q}')\, \mu_0^{-1} = [\tilde{K} : K'] \cdot \mathfrak{m}_{K'\to K}(\mathfrak{q}'), \text{ w. z. b. w.}\end{aligned}$$

10. Definition der Divisorenrestabbildungen.

Gegeben sei ein nichtkonstanter Primdivisor $\mathfrak{m}$ des Doppelkörpers $\Delta = K \times K'$ und ein zugehöriger Resthomomorphismus μ^* von Δ auf das abhängige Kompositum $M = K\mu \cdot K'\mu'$ im Sinne von **7.** Wir fassen M als algebraischen Funktionenkörper über Ω auf. Ist das Element a aus Δ zu $\mathfrak{m}$ prim, also $a\mu^* \neq 0, \infty$, so bestimmt $a\mu^*$ in M einen

Hauptdivisor, der sich offenbar nicht ändert, wenn man a durch ein zu ihm divisorgleiches Element $b = \gamma a$ mit γ aus Ω ersetzt. Der Hauptdivisor $(a\mu^*)$ in M ist also nur von dem Hauptdivisor (a) in Δ abhängig und heißt der *Divisorenrest* von (a) nach μ^*. Das Ziel dieses Paragraphen ist es, nicht nur für die zu $\mathfrak{m}$ primen *Haupt*divisoren, sondern für alle zu $\mathfrak{m}$ primen Divisoren $\mathfrak{a}$ von Δ den Divisorenrest nach μ^* zu erklären und zu untersuchen. Die dabei verwendete Methode ist arithmetisch völlig durchsichtig. Sie beruht auf dem Gedanken, für jeden Primdivisor $\hat{\mathfrak{q}}$ von M den $\hat{\mathfrak{q}}$-Bestandteil des Divisorenrestes von $\mathfrak{a}$ als den größten gemeinsamen $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler der Reste $a\mu^*$ von solchen Elementen a aus Δ darzustellen, die ihrerseits in Δ den Divisor $\mathfrak{a}$ als ihren Teiler bestimmen.

Zuvor eine Definition: Zu einem Primdivisor $\hat{\mathfrak{q}}$ von M bilden wir die Primdivisoren

$$(1) \qquad \mathfrak{q} = \mu\hat{\mathfrak{q}} = N_{M/K\mu}(\hat{\mathfrak{q}})\,\mu^{-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}' = \mu'\hat{\mathfrak{q}} = N_{M/K'\mu'}(\hat{\mathfrak{q}})\,\mu'^{-1}$$

aus K bzw. aus K' und nennen sie die *Komponenten* von $\hat{\mathfrak{q}}$ in bezug auf M. Die so erklärten Komponenten sind genau so gebildet wie die in **2.** definierten Komponenten bezüglich eines Isomorphismensystems. Das *Prinzip der Komponentenübertragung* ist sinngemäß auch für den hier vorliegenden Fall gültig. Man beachte aber, daß dort die Komponenten alle im selben algebraischen Funktionenkörper liegen, während hier $\mathfrak{q}$ in K und $\mathfrak{q}'$ in K' liegt. — Wir bezeichnen das zu $\hat{\mathfrak{q}}$ gehörige Komponentensystem mit $\mathfrak{q} = \{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'\}$. Dann gilt:

(2) *Ist $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{m}$ primer Divisor aus Δ und durchläuft a alle Elemente aus $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$, so existiert der größte gemeinsame $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler der mit diesen a gebildeten Reste $a\mu^*$ aus M.*

(Für die Definition von $I_{\mathfrak{q}}$ und $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ vgl. **8.**) *Beweis*: Aus **8.** (3) folgt, daß es in $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ sicher zu $\mathfrak{m}$ prime Elemente gibt, weil $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{m}$ prim ist. Für diese Elemente ist $a\mu^* \neq 0, \infty$. Um zu zeigen, daß diese $a\mu^*$ einen $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler besitzen, weisen wir nach, daß alle diese $a\mu^*$ mit a aus $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ durch Multiplikation mit einem festen Element $\hat{v} \neq 0$ aus M in $\hat{\mathfrak{q}}$-ganze Elemente verwandelt werden können. Zur Auffindung eines solchen $\hat{v}$ bemerken wir, daß es zu dem $I_{\mathfrak{q}}$-Ideal $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ ein $v \neq 0$ aus Δ gibt, für das $v[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ ein *ganzes* Ideal ist; v kann prim zu $\mathfrak{m}$ gewählt werden, weil $\mathfrak{a}$ prim zu $\mathfrak{m}$ ist, so daß $v\mu^* \neq 0, \infty$ ist. Wir behaupten, daß $v\mu^*$ schon ein Element der verlangten Eigenschaft ist, daß also $(v\mu^*)(a\mu^*) = (va)\mu^*$ ganz für $\hat{\mathfrak{q}}$ ist, falls nur a in $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ liegt. Im Hinblick auf die Konstruktion von v läuft der Beweis unserer Behauptung auf den Nachweis folgenden Satzes hinaus:

(3) *Ist b ein Element aus $I_{\mathfrak{q}}$, so ist $b\mu^*$ ganz für $\hat{\mathfrak{q}}$.*

Beweis: Nach **8.** (2) ist $I_{\mathfrak{q}}$ gleich dem in Δ gebildeten Ringkompositum $[K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$, und daher ist $I_{\mathfrak{q}}\mu^*$ gleich dem in M gebildeten Ringkompositum $[K_{\mathfrak{q}}\mu, K'_{\mathfrak{q}'}\mu']$. Die Behauptung, daß alle Elemente aus $I_{\mathfrak{q}}\mu^*$ ganz für $\hat{\mathfrak{q}}$ seien, folgt nun aus dem Prinzip der Komponentenübertragung, demzufolge die Ringe $K_{\mathfrak{q}}\mu$ und $K'_{\mathfrak{q}'}\mu'$ aus lauter $\hat{\mathfrak{q}}$-ganzen Elementen bestehen.

Damit ist die Existenz des größten gemeinsamen $\hat{\mathfrak{q}}$-Teilers $\mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a})$ aller Reste $a\mu^*$ mit a aus $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ bewiesen. Es gilt:

(4) *Für fast alle $\hat{\mathfrak{q}}$ ist $\mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a}) = 0$.*

Das soll genauer bedeuten, daß es zu vorgegebenem $\mathfrak{a}$ nur endlich viele Primdivisoren $\hat{\mathfrak{q}}$ von M gibt, für die $\mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a})$ von Null verschieden ist. Zum Beweis schätzen wir $\mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a})$ für fast alle $\hat{\mathfrak{q}}$ im Sinne der $\hat{\mathfrak{q}}$-Teilbarkeit durch feste, von $\hat{\mathfrak{q}}$ unabhängige Hauptdivisoren ab. Dazu wähle man einmal ein zu $\mathfrak{m}$ primes Element a aus $[\mathfrak{a}]$, und das andere Mal ein zu $\mathfrak{m}$ primes Element c aus Δ, für das $c[\mathfrak{a}]$ ein *ganzes* Ideal ist. (Die Möglichkeit der Wahl dieser Elemente ist eine Folge aus Satz **8.** (3)). Für einen Primdivisor $\hat{\mathfrak{q}}$ von M mit dem Komponentensystem $\mathfrak{q}$ ist sicher dann a aus $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ und $c[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ ein ganzes $I_{\mathfrak{q}}$-Ideal, wenn

a, c und $\mathfrak{a}$ prim zu $\mathfrak{q}$ sind. Dies ist aber offenbar für fast alle $\hat{\mathfrak{q}}$ der Fall, denn damit z. B. $\mathfrak{a}$ prim zu $\mathfrak{q}$ ist, hat man die in K und K' gelegenen Teile $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{a}_0'$ von $\mathfrak{a}$ zu bilden und dann diejenigen endlich vielen Primdivisoren aus M auszunehmen, die Teiler von $\mathfrak{a}_0\mu$ oder von $\mathfrak{a}_0'\mu'$ sind. — Ist nun aber $\hat{\mathfrak{q}}$ so beschaffen, daß a aus $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ und $c[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ ganz ist, so ist nach Definition von $\mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a})$ und nach dem Beweis von (2) sicher $(a\mu^*) > \mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a})$ und $(c\mu^*) + \mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a}) > 0$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$), also:

$$(a\mu^*) > \mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a}) > -(c\mu^*) \qquad (\text{für } \hat{\mathfrak{q}}).$$

Diese Teilbarkeit gilt also für fast alle $\hat{\mathfrak{q}}$. Nimmt man nun noch zusätzlich die endlich vielen Teiler $\hat{\mathfrak{q}}$ von $(a\mu^*)$ oder $(c\mu^*)$ aus, so folgt für die übrigen, also für fast alle $\hat{\mathfrak{q}}$ die behauptete Gleichung $\mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a}) = 0$, w. z. b. w.

Wir setzen nun

$$\mathfrak{a}\mu^* = \sum_{\hat{\mathfrak{q}}} \mathfrak{t}_{\hat{\mathfrak{q}}}(\mathfrak{a})$$

summiert über alle Primdivisoren $\hat{\mathfrak{q}}$ von M; dies ist nach (4) sinnvoll. Dieser durch $\mathfrak{a}$ und μ^* eindeutig bestimmte Divisor von M heißt der *Divisorenrest* von $\mathfrak{a}$ nach μ^*. Das bisherige Ergebnis formulieren wir so:

(5) *Es sei $\mathfrak{m}$ ein nichtkonstanter Primdivisor des Doppelkörpers $\Delta = K \times K'$ und μ^* ein zugehöriger Resthomomorphismus von Δ mit dem Bildkompositum $M = K\mu \cdot K'\mu'$. Für jeden zu $\mathfrak{m}$ primen Divisor $\mathfrak{a}$ von Δ haben wir in invarianter Weise einen Divisorenrest $\mathfrak{a}\mu^*$ erklärt, der ein Divisor von M ist, und dessen $\hat{\mathfrak{q}}$-Bestandteil sich für jeden Primdivisor $\hat{\mathfrak{q}}$ von M als der größte gemeinsame $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler aller Elementreste $a\mu^*$ mit a aus $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ bestimmt. Dabei ist $\mathfrak{q}$ das Komponentensystem von $\hat{\mathfrak{q}}$ bezüglich M, und $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ ist das $I_{\mathfrak{q}}$-Vielfachenideal von $\mathfrak{a}$.*

Wir stellen nun noch einige Sätze auf, die sich fast unmittelbar aus der Definition des Divisorenrestes ergeben, und die das Rechnen mit Divisorenresten erleichtern sollen. Zunächst ist auf Grund der Definition und von Satz (3) folgendes richtig:

(6) *Ist $\mathfrak{E}_{\mathfrak{q}}$ ein $I_{\mathfrak{q}}$-Erzeugendensystem von $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$, so ergibt sich der $\hat{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{a}\mu^*$ als der größte gemeinsame $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler aller Elemente $e\mu^*$ mit e aus $\mathfrak{E}_{\mathfrak{q}}$.*

Ferner gilt das *Isomorphieprinzip für Divisorenreste*:

(7) *Sind die Resthomomorphismen μ^* und $\mu^*\sigma$ vom selben Typus, so gilt:* $(\mathfrak{a}\mu^*)\,\sigma = \mathfrak{a}(\mu^*\sigma)$.

Dies ergibt sich ohne weiteres daraus, daß die bei der Definition von $\mathfrak{a}\mu^*$ verwendeten Begriffe bei Anwendung von σ in die bei der Definition von $\mathfrak{a}(\mu^*\sigma)$ zu verwendenden Begriffe übergehen. Wir haben hier denselben Sachverhalt, wie bei dem Isomorphieprinzip 2. (7) für Differenten. In Wahrheit werden wir jedoch die isomorphe Übertragung σ niemals ausführen. Es werden uns nämlich nicht die Divisorenreste selbst, sondern die Bildungen

$$N_{M/K\mu}(\mathfrak{a}\mu^*)\,\mu^{-1}, \quad N_{M/K'\mu'}(\mathfrak{a}\mu^*)\,\mu'^{-1}$$

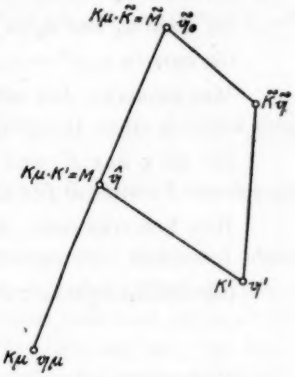
interessieren, welche nach dem Isomorphieprinzip von der Auswahl von μ^* unter denjenigen vom selben Typus unabhängig sind, also nur von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{a}$ abhängen. Daß wir trotzdem im Rest dieses Paragraphen noch die Eigenschaften der Divisorenreste untersuchen, hat seinen Grund darin, daß diese Eigenschaften sich durch Normbildung und isomorphe Übertragung in Eigenschaften der angegebenen Bildungen übertragen, und daher die Untersuchung der ersteren eine Quelle für Aussagen über die letzteren darstellt.

Es gilt ferner der *Satz über die Invarianz des Divisorenrestes bei Fortsetzung des Resthomomorphismus*: Es sei $\tilde{K}/K'$ eine endlich-algebraische Erweiterung und $\tilde{\mu}^*$ eine Fort-

setzung auf $\tilde{\Delta} = K \times \tilde{K}$ des Resthomomorphismus μ^*. Für alle a aus Δ soll also $a\tilde{\mu}^* = a\mu^*$ sein. Der zu $\tilde{\mu}^*$ gehörige Primdivisor $\tilde{\mathfrak{m}}$ von $\tilde{\Delta}$ ist dann ein Teiler von $\mathfrak{m}$. Das abhängige Restkompositum von K mit $\tilde{K}$, das zu $\tilde{\mu}^*$ gehört, hat dann die Form $\tilde{M} = K\mu \cdot \tilde{K}\tilde{\mu}$, wo $\tilde{K} \to \tilde{K}\tilde{\mu}$ eine Fortsetzung des Isomorphismus $K' \to K'\mu'$ ist. Wir behaupten dann, daß

(8) *für jeden zu* $\mathfrak{m}$ *primen Divisor* $\mathfrak{a}$ *aus* Δ *der in* Δ *gebildete Divisorenrest* $\mathfrak{a}\mu^*$ *mit dem in* $\tilde{\Delta}$ *gebildeten Divisorenrest* $\mathfrak{a}\tilde{\mu}^*$ *zusammenfällt (wobei das zweite Mal* $\mathfrak{a}$ *als Divisor von* $\tilde{\Delta}$ *zu betrachten ist):* $\mathfrak{a}\mu^* = \mathfrak{a}\tilde{\mu}^*$.

Dieser Satz besagt, daß nicht nur die Elementerestabbildung, sondern auch die Divisorenrestabbildung $\tilde{\mu}^*$ eine Fortsetzung von μ^* ist. Zu seinem Beweise können wir nach dem eben erwähnten Isomorphieprinzip für Divisorenreste annehmen, daß $\tilde{\mu}^*$ ein $\tilde{K}$-normierter Resthomomorphismus sei; es soll also $\tilde{K}\tilde{\mu} = \tilde{K}$ sein. Dann ist von selbst auch $K'\mu' = K'$, d. h. μ^* ist K'-normiert. Wir haben dann das nebenstehende Körperschema. Wir wählen nun einen beliebigen Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}_0$ von $\tilde{M}$ und zeigen für diesen die $\tilde{\mathfrak{q}}_0$-Gleichung $\mathfrak{a}\mu^* = \mathfrak{a}\tilde{\mu}^*$ (für $\tilde{\mathfrak{q}}_0$). Dazu bilden wir, von $\tilde{\mathfrak{q}}_0$ ausgehend, die Normen nach M, $K\mu$, $\tilde{K}$ und K' (die Benennungen sind aus der Figur zu entnehmen, wo neben die betrachteten Körper jeweils der zugehörige Primdivisor eingetragen ist). Es ist dann $\tilde{\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{q}, \tilde{\mathfrak{q}}\}$ das Komponentensystem bezüglich $\tilde{M}$ von $\tilde{\mathfrak{q}}_0$, während $\mathfrak{q} = \{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'\}$ das Komponentensystem bezüglich M des Primvielfachen $\hat{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{\mathfrak{q}}_0$ in M ist. Ferner ist unmittelbar ersichtlich, daß $\tilde{\mathfrak{q}}$ ein Teiler von $\mathfrak{q}'$ ist. — Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von Elementen aus $\tilde{M}$, so sei im Augenblick mit $\{m \text{ in } \mathfrak{M}\}_{\tilde{\mathfrak{q}}_0}$ der größte gemeinsame $\tilde{\mathfrak{q}}_0$-Teiler aller Elemente m aus $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Dann ist definitionsgemäß:



$$\mathfrak{a}\tilde{\mu}^* = \{\tilde{a}\tilde{\mu}^* \text{ mit } \tilde{a} \text{ aus } [\mathfrak{a}]_{\tilde{\mathfrak{q}}}\}_{\tilde{\mathfrak{q}}_0} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}_0).$$

Nun wird $[\mathfrak{a}]_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ nach **8.** (4) von $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ bezüglich $\tilde{I}_{\tilde{\mathfrak{q}}}$ erzeugt. Aus (6) folgt daher:

$$\mathfrak{a}\tilde{\mu}^* = \{a\tilde{\mu}^* \text{ mit } a \text{ aus } [\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}\}_{\tilde{\mathfrak{q}}_0} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}_0).$$

Für die a aus $[\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$ ist $a\tilde{\mu}^* = a\mu^*$, da $\tilde{\mu}^*$ eine Fortsetzung von μ^* ist. Ferner liegen die $a\mu^*$ in M; bei der Teilerbildung kommt es daher nicht darauf an, ob dieser als $\tilde{\mathfrak{q}}_0$-Teiler oder als $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler gebildet wird. Es folgt:

$$\mathfrak{a}\tilde{\mu}^* = \{a\mu^* \text{ mit } a \text{ aus } [\mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}\}_{\hat{\mathfrak{q}}} \qquad (\text{für } \tilde{\mathfrak{q}}_0).$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist definitionsgemäß $= \mathfrak{a}\mu^*$ (für $\tilde{\mathfrak{q}}_0$). w. z. b. w.

11. Arithmetische Eigenschaften der Divisorenreste.

In diesem Abschnitt sei zu dem nichtkonstanten Primdivisor $\mathfrak{m}$ wieder eine feste Restabbildung μ^* von Δ auf das Kompositum $M = K\mu \cdot K'\mu'$ gewählt. Wir wollen folgenden Satz beweisen:

(1) *Die in* **10.** *definierte Restabbildung* $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mu^*$ *ist ein arithmetischer Homomorphismus der Gruppe der zu* $\mathfrak{m}$ *primen Divisoren von* Δ *in die Divisorengruppe von* M, *der erstens für Hauptdivisoren mit dem durch die Elementrestabbildung* $a \to a\mu^*$ *gelieferten Homomorphismus übereinstimmt: Aus* $a \cong \mathfrak{a}$ *(in* Δ*) und* $\mathfrak{a}$ *prim zu* $\mathfrak{m}$ *folgt:* $a\mu^* \cong \mathfrak{a}\mu^*$ *(in* M*).*

Zweitens stimmt er für konstante Divisoren $\mathfrak{c}$ *aus* K *mit dem durch den Isomorphismus* $K \to K\mu$ *von* K *in* M *gelieferten Isomorphismus der Divisorengruppe von* K *in die von* M *überein: Für* $\mathfrak{c}$ *aus* K *gilt* $\mathfrak{c}\mu^* = \mathfrak{c}\mu$; *und entsprechendes gilt für die Divisoren* $\mathfrak{c}'$ *aus* K'.

Der Beweis dieses Satzes wird in Einzelschritten geführt werden, die den einzelnen in ihm aufgestellten Behauptungen entsprechen. Diese Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{a}\mu^*$, bis auf die eine, daß die Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mu^*$ homomorph ist. Der Beweis der Homomorphiebehauptung wird tiefer eindringende Untersuchungen erfordern, und wir verlegen ihn daher an den Schluß des Beweises von (1). Der Reihe nach beweisen wir folgendes:

(2) *Für* $\mathfrak{a} = 0$ *ist* $\mathfrak{a}\mu^* = 0$.

(3) *Sind* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2$ *prim zu* $\mathfrak{m}$ *und ist* $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2$, *so ist* $\mathfrak{a}_1\mu^* < \mathfrak{a}_2\mu^*$.

(4) *Sind* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2$ *zu* $\mathfrak{m}$ *prim und gilt* $\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{a}_2$ (*in* Δ), *so folgt* $\mathfrak{a}_1\mu^* \sim \mathfrak{a}_2\mu^*$ (*in* M). *Genauer ist* $\mathfrak{a}_1\mu^* - \mathfrak{a}_2\mu^* \cong a\mu^*$ (*in* M), *wenn* $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 \cong a$ (*in* Δ) *ist.*

Man bemerke, daß mit $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ auch a prim zu $\mathfrak{m}$ ist, und daher $a\mu^* \neq 0, \infty$ ist, also wirklich einen Hauptdivisor in M definiert.

(5) *Ist* $\mathfrak{c}$ *aus* K, *und ist* $\mathfrak{a}$ *prim zu* $\mathfrak{m}$, *so gilt* $(\mathfrak{c} + \mathfrak{a})\,\mu^* = \mathfrak{c}\mu + \mathfrak{a}\mu^*$. *Eine entsprechende Formel gilt für die konstanten Divisoren* $\mathfrak{c}'$ *aus* K'.

Hier bemerke man, daß $\mathfrak{c}$ als konstanter Divisor von selbst prim zu $\mathfrak{m}$ ist, so daß nicht besonders vorausgesetzt zu werden braucht, daß $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{m}$ prim ist.

(6) *Additionsformel: Sind* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2$ *prim zu* $\mathfrak{m}$, *so gilt:*

$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\,\mu^* = \mathfrak{a}_1\mu^* + \mathfrak{a}_2\mu^*.$$

Daß mit dem Beweis der Sätze (2) bis (6) der Satz (1) bewiesen ist, folgt so: (6) besagt, daß die Abbildung $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mu^*$ ein Homomorphismus ist, während (3) und (4) die Erhaltung der Teilbarkeit und der Äquivalenz bei diesem Homomorphismus aussagen, so daß $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mu^*$ ein *arithmetischer Homomorphismus* ist. Dieser besitzt die in (1) genannten beiden Eigenschaften, wie sich erstens aus der genaueren Aussage (4) für $\mathfrak{a}_2 = 0$ und zweitens aus (5) für $\mathfrak{a} = 0$ ergibt, beide Male unter Beachtung von (2). Natürlich ist (2) eine formale Folge von (6), wird aber gleich zu Beginn bewiesen, da diese Aussage benötigt wird, ehe die Richtigkeit von (6) feststeht.

Alle Aussagen (2) bis (6) sind solche über Gleichheit bzw. Teilbarkeit von Divisoren von M (dies gilt auch für (4)). Diese Gleichheiten und Teilbarkeiten sind richtig, wenn sie für jeden Primdivisor $\hat{\mathfrak{q}}$ von M gelten. Wir werden daher die entsprechenden Relationen für einen willkürlich gewählten Primdivisor $\hat{\mathfrak{q}}$ von M beweisen. Mit $\mathfrak{q} = \{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'\}$ bezeichnen wir stets das Komponentensystem von $\hat{\mathfrak{q}}$ bezüglich M.

Zu (2). Der Nulldivisor $\mathfrak{a} = 0$ ist ganz. Aus **10.** (3) folgt, daß $0\mu^*$ ganz für $\hat{\mathfrak{q}}$ ist. Andererseits ist 1 im $I_{\mathfrak{q}}$-Vielfachenideal $[0]_{\mathfrak{q}} = I_{\mathfrak{q}}$ enthalten, und $1\mu^* = 1$ zu $\hat{\mathfrak{q}}$ prim. Daraus folgt, daß auch $0\mu^*$ prim zu $\hat{\mathfrak{q}}$ ist: $0\mu^* = 0$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$).

Zu (3). Aus $[\mathfrak{a}_2]_{\mathfrak{q}}$ sei ein Element a_2 derart gewählt, daß $a_2\mu^* \cong \mathfrak{a}_2\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$) gilt, was nach Definition des Divisorenrestes geht. Wegen $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2$ ist $[\mathfrak{a}_2]_{\mathfrak{q}} \leqq [\mathfrak{a}_1]_{\mathfrak{q}}$, und daher liegt a_2 in $[\mathfrak{a}_1]_{\mathfrak{q}}$. Nach Definition von $\mathfrak{a}_1\mu^*$ folgt nun $a_2\mu^* > \mathfrak{a}_1\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$), also: $\mathfrak{a}_2\mu^* > \mathfrak{a}_1\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$).

Zu (4). Wegen $\mathfrak{a}_1 = (a) + \mathfrak{a}_2$ ist $[\mathfrak{a}_1]_{\mathfrak{q}}$ das Produkt von a mit $[\mathfrak{a}_2]_{\mathfrak{q}}$; das bedeutet, daß die Elemente a_1 aus $[\mathfrak{a}_1]_{\mathfrak{q}}$ durch die Produkte aa_2 von a mit den Elementen a_2 aus $[\mathfrak{a}_2]_{\mathfrak{q}}$ geliefert werden. Durch Restbildung nach μ^* ergibt sich die Aussage, daß die Elemente $a_1\mu^*$ gerade die Produkte $(a\mu^*)\,(a_2\mu^*)$ sind. Da die $a_1\mu^*$ den $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler $\mathfrak{a}_1\mu^*$ und die $a_2\mu^*$ den $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler $\mathfrak{a}_2\mu^*$ besitzen, so folgt daraus $\mathfrak{a}_1\mu^* = (a) + \mathfrak{a}_2\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$).

Zu (5). Es sei c aus K gewählt mit $c \cong \mathfrak{c}$ (für $\mathfrak{q}$). Dann ist $[\mathfrak{c} + \mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}} = c\,[a]_{\mathfrak{q}} = [(c) + \mathfrak{a}]_{\mathfrak{q}}$, also $(\mathfrak{c} + \mathfrak{a})\,\mu^* = ((c) + \mathfrak{a})\,\mu^* = (c\mu^*) + \mathfrak{a}\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$), letzteres nach (4). Aus $c \cong \mathfrak{c}$ (für $\mathfrak{q}$) folgt nun durch Komponentenübertragung $c\mu \cong \mathfrak{c}\mu$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$). Wegen $c \in K$ haben wir ferner $c\mu = c\mu^*$, also $c\mu^* \cong \mathfrak{c}\mu$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$). Eingesetzt in die oben erhaltene Gleichung ergibt das $(\mathfrak{c} + \mathfrak{a})\,\mu^* = \mathfrak{c}\mu + \mathfrak{a}\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$).

Zu (6). Ganz einfach sieht man zunächst folgendes:

$$(7) \qquad (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\,\mu^* < \mathfrak{a}_1\mu^* + \mathfrak{a}_2\mu^* \qquad (\text{für } \hat{\mathfrak{q}}).$$

Beweis: Es seien die Elemente a_i aus $[\mathfrak{a}_i]_{\mathfrak{q}}$ derart gewählt, daß $a_i\mu^* \cong \mathfrak{a}_i\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$) gilt ($i = 1, 2$). Dann ist das Produkt $a = a_1 a_2$ in $[\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2]_{\mathfrak{q}}$ gelegen, und daher ist $a\mu^*$ ein $\hat{\mathfrak{q}}$-Vielfaches von $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\,\mu^*$. Wegen $(a\mu^*) = (a_1\mu^*) + (a_2\mu^*) = \mathfrak{a}_1\mu^* + \mathfrak{a}_2\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$) folgt daraus in der Tat die Behauptung (7).

Ferner gilt auf Grund der erhaltenen Resultate folgendes:

(8) *Es sei* $\mathfrak{b}_1$ *ein zu* $\mathfrak{a}_1$ *gröber äquivalenter zu* $\mathfrak{m}$ *primer Divisor von* Δ. *Gilt dann*

$$(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2)\,\mu^* = \mathfrak{b}_1\mu^* + \mathfrak{a}_2\mu^* \ (\textit{für } \hat{\mathfrak{q}}), \textit{ so gilt auch}$$
$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)\,\mu^* = \mathfrak{a}_1\mu^* + \mathfrak{a}_2\mu^* \ (\textit{für } \hat{\mathfrak{q}}).$$

Dieser Satz besagt, daß zum Beweis von (6) der Divisor $\mathfrak{a}_1$ in seiner gröberen Klasse beliebig abgeändert werden darf. Er folgt einfach aus der Tatsache, daß nach (4) bzw. (5) die Additionsformel (6) gilt, falls einer der Summanden ein Hauptdivisor bzw. ein konstanter Divisor ist, also zusammengefaßt: falls einer der Summanden der gröberen Hauptklasse angehört. Wie nun diese Abänderung von $\mathfrak{a}_1$ in seiner gröberen Klasse zweckmäßig vorzunehmen ist, das zeigt folgender Satz:

(9) *Ist* $\mathfrak{b}_1$ *ein ganzer zu* $\mathfrak{m}$ *primer Divisor von* Δ, *dessen Divisorenrest* $\mathfrak{b}_1\mu^*$ *prim zu* $\hat{\mathfrak{q}}$ *ist, so gilt für jeden anderen zu* $\mathfrak{m}$ *primen Divisor* $\mathfrak{a}_2$ *die* $\hat{\mathfrak{q}}$-*Gleichung*: $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2)\,\mu^* = \mathfrak{b}_1\mu^* + \mathfrak{a}_2\mu^*$ (*für* $\hat{\mathfrak{q}}$).

Das heißt: die für $\hat{\mathfrak{q}}$ ausgesprochene Additionsformel (6) ist sicher richtig, falls $\mathfrak{b}_1$ die Voraussetzung des Satzes (9) erfüllt.

Beweis von (9): Da $\mathfrak{b}_1$ ganz ist, so ist $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 > \mathfrak{a}_2$. Aus (3) folgt daher $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2)\,\mu^* > \mathfrak{a}_2\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$). Da nach Voraussetzung $\mathfrak{b}_1\mu^* = 0$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$) gilt, so ergibt dies die Teilbarkeit $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2)\,\mu^* > \mathfrak{b}_1\mu^* + \mathfrak{a}_2\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$). Andererseits gilt nach (7) die umgekehrte Teilbarkeit, so daß dies in Wahrheit eine $\hat{\mathfrak{q}}$-Gleichung ist, w. z. b. w.

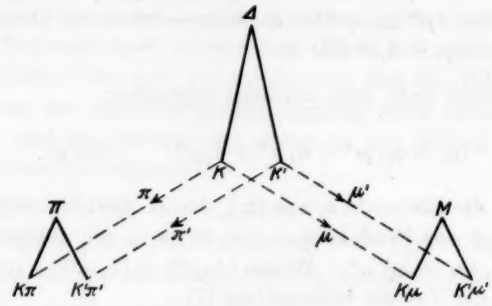
Die Sätze (9) und (8) zeigen, daß es zum Beweis von (6) hinreicht, zu dem vorgegebenen Divisor $\mathfrak{a}_1$ von Δ einen dazu gröber äquivalenten Divisor $\mathfrak{b}_1$ zu finden, der die Bedingungen von (9) erfüllt. Es ist also folgende Aufgabe zu lösen:

(10) *In jeder gröberen Klasse von* Δ *soll ein ganzer zu* $\mathfrak{m}$ *primer Divisor* $\mathfrak{b}$ *mit* $\mathfrak{b}\mu^* = 0$ (*für* $\hat{\mathfrak{q}}$) *gefunden werden.*

Zur Lösung dieser Aufgabe benötigen wir zunächst ein handliches Kriterium dafür, wann $\mathfrak{b}\mu^* = 0$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$) ist. Zuerst behandeln wir dazu den Fall eines nichtkonstanten *Prim*divisors $\mathfrak{b} = \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Zu $\mathfrak{p}$ wählen wir einen Resthomomorphismus π^* auf das zugehörige abhängige Kompositum $\Pi = K\pi \cdot K'\pi'$. Es sei wie immer $\mathfrak{q} = \{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'\}$ das Komponentensystem von $\hat{\mathfrak{q}}$ bezüglich M.

(12) *Spezielles Kriterium*: *Genau dann ist* $\mathfrak{p}\mu^* = 0$ (*für* $\tilde{\mathfrak{q}}$), *wenn* $\mathfrak{q}\pi$ *und* $\mathfrak{q}'\pi'$ *in* Π *keinen gemeinsamen Teiler besitzen.*

Zur Erläuterung der Lageverhältnisse der bei diesem Beweis auftretenden Divisoren fügen wir folgende Figur bei:



Der Beweis von (12) gliedert sich in den Beweis zweier Aussagen:

(12a) *Wenn* $\mathfrak{q}\pi$ und $\mathfrak{q}'\pi'$ *einen Teiler besitzen, so ist* $\hat{\mathfrak{q}}$ *Teiler von* $\mathfrak{p}\mu^*$.

(12b) *Wenn* $\mathfrak{q}\pi$ *und* $\mathfrak{q}'\pi'$ *keinen Teiler besitzen, so ist* $\mathfrak{p}\mu^*$ *prim zu* $\hat{\mathfrak{q}}$.

Zunächst formen wir diese beiden Aussagen um. Der $\hat{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{p}\mu^*$ ist definitionsgemäß gleich dem größten gemeinsamen $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler aller $a\mu^*$ mit a aus $[\mathfrak{p}]_{\mathfrak{q}}$. Nun sind alle Elemente a aus $I_{\mathfrak{q}} = [K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$ als Polynome $a = f(c, c')$ mit Elementsystemen (c) aus $K_{\mathfrak{q}}$ und (c') aus $K'_{\mathfrak{q}'}$ darstellbar, und die Elemente aus $[\mathfrak{p}]_{\mathfrak{q}}$ sind unter ihnen durch $a\pi^* = f(c\pi, c'\pi') = 0$ gekennzeichnet. Wegen $a\mu^* = f(c\mu, c'\mu')$ folgt daraus: Der $\hat{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{p}\mu^*$ ist der $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler aller $f(c\mu, c'\mu')$ mit $f(c\pi, c'\pi') = 0$. Die obigen Aussagen (12a, b) können also so umgeformt werden:

(13a) *Wenn* $\mathfrak{q}\pi$ *und* $\mathfrak{q}'\pi'$ *einen Teiler besitzen, so ist* $f(c\mu, c'\mu') \equiv 0 \bmod \hat{\mathfrak{q}}$, *falls nur* $f(c\pi, c'\pi') = 0$ *ist.*

(13b) *Wenn* $\mathfrak{q}\pi$ *und* $\mathfrak{q}'\pi'$ *keinen Teiler besitzen, so gibt es ein* $f(c, c')$ *mit* $f(c\mu, c'\mu') \not\equiv 0 \bmod \hat{\mathfrak{q}}$, *aber* $f(c\pi, c'\pi') = 0$.

Um zunächst den Kongruenzwert von $f(c\mu, c'\mu')$ modulo $\hat{\mathfrak{q}}$ zu berechnen, beachten wir, daß $\mathfrak{q} = \mu\hat{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{q}' = \mu'\hat{\mathfrak{q}}$ die Komponenten von $\hat{\mathfrak{q}}$ bezüglich M sind, und daß daher nach dem Prinzip der Komponentenübertragung die konstanten Reste $c\mathfrak{q}$ und $c'\mathfrak{q}'$ von c bzw. c' mod $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}'$ gleich den konstanten Resten von $c\mu$ bzw. $c'\mu'$ modulo $\hat{\mathfrak{q}}$ sind. Es folgt $f(c\mu, c'\mu') \equiv f(c\mathfrak{q}, c'\mathfrak{q}') \bmod \hat{\mathfrak{q}}$. Da nun $f(c\mathfrak{q}, c'\mathfrak{q}')$ in Ω liegt, und eine Kongruenz zwischen Elementen aus Ω ihre Gleichheit bedeutet, so folgt, daß

(14) $f(c\mu, c'\mu') \equiv 0 \bmod \hat{\mathfrak{q}}$ *mit* $f(c\mathfrak{q}, c'\mathfrak{q}') = 0$ *gleichbedeutend ist.*

Die Aussagen (13a, b) können daher so umgeformt werden:

(15a) *Wenn* $\mathfrak{q}\pi$ *und* $\mathfrak{q}'\pi'$ *einen Teiler besitzen, so ist* $f(c\mathfrak{q}, c'\mathfrak{q}') = 0$, *falls nur* $f(c\pi, c'\pi') = 0$ *ist.*

(15b) *Wenn* $\mathfrak{q}\pi$ *und* $\mathfrak{q}'\pi'$ *keinen Teiler besitzen, so gibt es ein* $f(c, c')$ *mit* $f(c\mathfrak{q}, c'\mathfrak{q}') \neq 0$ *und* $f(c\pi, c'\pi') = 0$.

Beweis von (15a): Es sei $\tilde{\mathfrak{q}}$ ein nach Voraussetzung vorhandener Primteiler von $\mathfrak{q}\pi$ und $\mathfrak{q}'\pi'$ in Π. Ersetzt man in (14) μ und μ' durch π und π' und den Teiler $\hat{\mathfrak{q}}$ von $\mathfrak{q}\mu$ und $\mathfrak{q}'\mu'$ durch den Teiler $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\mathfrak{q}\pi$ und $\mathfrak{q}'\pi'$, dann erhält man die Aussage, daß $f(c\pi, c'\pi') \equiv 0 \bmod \tilde{\mathfrak{q}}$ mit $f(c\mathfrak{q}, c'\mathfrak{q}') = 0$ gleichbedeutend ist. Da nun $f(c\pi, c'\pi') \equiv 0 \bmod \tilde{\mathfrak{q}}$ eine Folge von $f(c\pi, c'\pi') = 0$ ist, so ist auch $f(c\mathfrak{q}, c'\mathfrak{q}') = 0$ eine Folge von $f(c\pi, c'\pi') = 0$.

Beweis von (15b). Wähle ein Element $c\pi$ aus $K\pi$, welches die Kongruenzen

$$(16) \qquad c\pi \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}\pi \text{ und } c\pi \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}'\pi'$$

erfüllt, was wegen der vorausgesetzten Teilerlosigkeit von $\mathfrak{q}\pi$ und $\mathfrak{q}'\pi'$ möglich ist. Dann bilde man das irreduzible Polynom $F(X)$ über $K'\pi'$, dem $c\pi$ genügt:

$$(17) \qquad F(X) = X^m + (c_1'\pi')\, X^{m-1} + \cdots + (c_m'\pi') \qquad (c_j' \text{ in } K').$$

X bedeutet eine Unbestimmte. Setze $(c') = (c_1', \ldots, c_m')$, fasse $F(X)$ als Polynom in X und dem Elementsystem $(c'\pi')$ auf und bezeichne es dann mit $f(X, c'\pi')$. Nach Konstruktion ist $f(c\pi, c'\pi') = 0$. Aus den Kongruenzen (16) schließen wir, daß $f(c\mathfrak{q}, c'\mathfrak{q}') \neq 0$ ist: Die erste Kongruenz liefert $c \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}$, also $c\mathfrak{q} = 1$. Aus der zweiten Kongruenz (16) folgt, daß alle $c_j'\pi'$ als die elementarsymmetrischen Funktionen von $c\pi$ und seinen über $K'\pi'$ Konjugierten $\equiv 0 \bmod \mathfrak{q}'\pi'$ sind, woraus $c_j' \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}'$, also $c_j'\mathfrak{q}' = 0$ folgt. Setzen wir dies in (17) ein, so erhalten wir:

$$f(c\mathfrak{q}, c'\mathfrak{q}') = (c\mathfrak{q})^m + (c_1'\mathfrak{q}')\,(c\mathfrak{q})^{m-1} + \cdots + (c_m'\mathfrak{q}') = 1 \neq 0.$$

Damit ist das spezielle Kriterium als richtig erkannt.

Wir bemerken, daß die im Kriterium ausgesprochene Bedingung, daß $\mathfrak{q}\pi$ und $\mathfrak{q}'\pi'$ ohne Teiler seien, offenbar damit gleichbedeutend ist, daß $\mathfrak{q}\pi$ nicht in $N_{\Pi/K\pi}(\mathfrak{q}'\pi')$ aufgeht. Wendet man auf die beiden letzten Divisoren die isomorphe Übertragung π^{-1} an, so erhält man einmal $\mathfrak{q}$, und das andere Mal $\mathfrak{p}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$. Das spezielle Kriterium liefert also folgende Aussage:

(18) *Genau dann ist* $\mathfrak{p}\mu^* = 0$ *(für* $\hat{\mathfrak{q}}$*), wenn für die Komponenten* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *von* $\hat{\mathfrak{q}}$ *bezüglich* M *die Beziehung „*$\mathfrak{p}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ *prim zu* $\mathfrak{q}$*" gilt.*

Hieraus schließen wir jetzt für einen beliebigen ganzen Divisor das *allgemeine Kriterium*:

(19) *Ist* $\mathfrak{b}$ *ein beliebiger ganzer total nichtkonstanter Divisor von* Δ*, für welchen die Beziehung „*$\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ *prim zu* $\mathfrak{q}$*" gilt, so ist* $\mathfrak{b}$ *prim zu* $\mathfrak{m}$ *und es ist* $\mathfrak{b}\mu^* = 0$ *(für* $\hat{\mathfrak{q}}$*)*[19].

Beweis: Käme $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{b}$ vor, so wäre $\mathfrak{m}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ als Teiler von $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ ebenfalls prim zu $\mathfrak{q}$. Andererseits ist aber $\mathfrak{m}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') = N_{M/K\mu}(\mathfrak{q}'\mu')\mu^{-1}$ ein Vielfaches von $N_{M/K\mu}(\hat{\mathfrak{q}})\,\mu^{-1} = \mathfrak{q}$. Dies ist ein Widerspruch, also kommt $\mathfrak{m}$ nicht in $\mathfrak{b}$ vor. Daher ist jedenfalls der Divisorenrest $\mathfrak{b}\mu^*$ erklärt. Es sei $\mathfrak{b} = \sum_i \mathfrak{p}^{(i)}$ die Zerlegung von $\mathfrak{b}$ in seine Primteiler. Da alle $\mathfrak{p}^{(i)}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ als Teiler von $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ prim zu $\mathfrak{q}$ sind, so folgt aus (18), daß alle Divisorenreste $\mathfrak{p}^{(i)}\mu^* = 0$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$) sind. Nach (7) folgt nun die Teilbarkeit $\mathfrak{b}\mu^* < \sum_i \mathfrak{p}^{(i)}\mu^* = 0$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$). Andererseits ist $\mathfrak{b}$ nach Voraussetzung ein *ganzer* Divisor, woraus sich nach (3) in Verbindung mit (2) ergibt, daß $\mathfrak{b}\mu^*$ ein ganzer Divisor ist. Es ergibt sich also $\mathfrak{b}\mu^* = 0$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$), w. z. b. w.

Mit Hilfe des so bewiesenen allgemeinen Kriteriums lösen wir nun die Aufgabe (10) folgendermaßen: Es seien, wie immer, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ die Komponenten von $\hat{\mathfrak{q}}$ bezüglich M. Wähle einen ganzen regulären Divisor $\mathfrak{r}$ aus K, welcher erstens den Grad g besitzt (g das Geschlecht von K) und welcher zweitens prim zu $\mathfrak{q}$ ist (eine solche Wahl ist möglich; vgl. [5], S. 359—360). Nun berufen wir uns auf den mit Hilfe des Additionstheorems für Korrespondenzen bewiesenen Satz **9.** (6). Nach diesem gibt es in jeder gröberen Divisorklasse von Δ einen ganzen total nichtkonstanten Divisor $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') < \mathfrak{r}$. Aus dem allgemeinen Kriterium folgt jetzt, daß $\mathfrak{b}$ prim zu $\mathfrak{m}$ ist, und daß $\mathfrak{b}\mu^* = 0$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$) ist. Damit ist in jeder gröberen Klasse von Δ ein Divisor $\mathfrak{b}$ gefunden, wie es in der Aufgabe (10) verlangt war.

---

[19]) Man vergleiche hierzu die Bemerkung am Schlusse des Abschnitts.

Wie oben gesagt, ist mit der Lösung der Aufgabe (10) die Additionsformel (6) bewiesen, und somit ist auch Satz (1) als richtig erkannt.

Übrigens ist für einen zu $\mathfrak{m}$ primen total nichtkonstanten ganzen Divisor $\mathfrak{b}$ die in (19) ausgesprochene Bedingung, daß $\mathfrak{q}$ prim zu $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ sei, nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für das Bestehen der $\hat{\mathfrak{q}}$-Gleichung $\mathfrak{b}\mu^* = 0$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$). Dies erkennt man auf Grund der nunmehr feststehenden Additionsformel (6) daran, daß die entsprechende Bedingung für *Prim*divisoren nach (18) hinreichend und notwendig ist.

12. Der Zusammenhang zwischen Divisorenresten und Elementardifferenten.

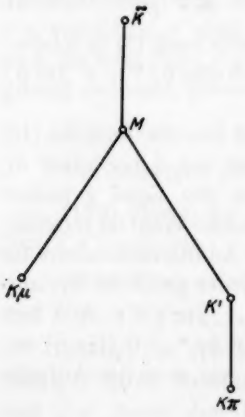
Es seien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ zwei verschiedene nichtkonstante Primdivisoren des Doppelkörpers $\Delta = K \times K'$ und μ^* ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriger Resthomomorphismus. Wir suchen in diesem Abschnitt eine Darstellung des Divisorenrestes $\mathfrak{p}\mu^*$ durch die in **2.** untersuchten Elementardifferenten. Dazu nehmen wir an, daß der Resthomomorphismus μ^* *normiert* bezüglich K' sei, was nach dem Isomorphieprinzip für Divisorenreste (**10.** (7)) keine wesentliche Einschränkung bedeutet. Das zu μ^* gehörige Kompositum von K mit K' habe also die Form $M = K\mu \cdot K'$, wo μ ein *I*somorphismus von K in die algebraisch-abgeschlosssene Hülle $\bar{K}'$ von K' ist. Es sei $\boldsymbol{\pi}$ das volle Isomorphismensystem von K in $\bar{K}'$, das zu $\mathfrak{p}$ gehört. Schließlich sei $\tilde{K}/K'$ eine gemeinsame Zerfällungserweiterung für $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$, die also alle Körper $K\pi$ mit π aus $\boldsymbol{\pi}$ und auch $K\mu$ enthält.

Da nach Voraussetzung $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ ist, so sind alle Isomorphismen π aus $\boldsymbol{\pi}$ von μ verschieden, so daß die Elementardifferenten $\mathfrak{D}_{\pi,\mu}$ gebildet werden können. Diese sind Divisoren von $\tilde{K}$. Auch der Divisorenrest $\mathfrak{p}\mu^*$, welcher ja ein Divisor von M ist, kann als Divisor von $\tilde{K}$ betrachtet werden. Wir behaupten nun die Gültigkeit der Formel

$$\mathfrak{p}\mu^* = \sum_{\pi} \mathfrak{D}_{\pi,\mu}, \tag{1}$$

wobei über alle π aus dem vollen Isomorphismensystem $\boldsymbol{\pi}$ zu $\mathfrak{p}$ summiert wird. Diese Formel liefert den gesuchten Zusammenhang zwischen Divisorenresten und Elementardifferenten.

Zum Beweis von (1) behandeln wir zunächst den Spezialfall, daß $\mathfrak{p}$ den Grad 1 über K' besitzt. Das bedeutet, daß das volle zu $\mathfrak{p}$ gehörige Isomorphismensystem von K in $\bar{K}'$ aus nur einem einzigen Isomorphismus π besteht, welcher K in K' abbildet. Die Behauptung (1) schreibt sich dann so:



$$\boxed{\mathfrak{p}\mu^* = \mathfrak{D}_{\pi,\mu}} \qquad (\text{falls } gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{p}) = 1). \tag{2}$$

Beweis: Sowohl $\mathfrak{p}\mu^*$ als auch $\mathfrak{D}_{\pi,\mu}$ sind Divisoren von M. Zum Beweis von (2) genügt es daher für jeden Primdivisor $\hat{\mathfrak{q}}$ von M die $\hat{\mathfrak{q}}$-Gleichung $\mathfrak{p}\mu^* = \mathfrak{D}_{\pi,\mu}$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$) zu beweisen. Es sei $\mathbf{q} = \{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'\}$ das Komponentensystem von $\hat{\mathfrak{q}}$ bezüglich M, und $\{\pi\hat{\mathfrak{q}}, \mu\hat{\mathfrak{q}}\}$ das Komponentensystem von $\hat{\mathfrak{q}}$ bezüglich $\{\pi, \mu\}$; dabei ist natürlich $\mathfrak{q} = \mu\hat{\mathfrak{q}}$.

a) Zuerst sei $\hat{\mathfrak{q}}$ bezüglich $\{\pi, \mu\}$ *zerlegt*, d. h. $\mu\hat{\mathfrak{q}} \neq \pi\hat{\mathfrak{q}}$. Nach **2.** (10) ist dann $\mathfrak{D}_{\pi,\mu}$ prim zu $\hat{\mathfrak{q}}$. Um zu zeigen, daß in diesem Falle auch $\mathfrak{p}\mu^*$ prim zu $\hat{\mathfrak{q}}$ ist, verwenden wir das Kriterium **11.** (18). Danach haben wir nachzuweisen, daß die Beziehung „$\mathfrak{p}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ prim zu $\mathfrak{q}$" gilt. In unserem Falle ist nun $\mathfrak{p}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') = N_{K'/K\pi}(\mathfrak{q}')\,\pi^{-1} = N_{M/K\pi}(\hat{\mathfrak{q}})\,\pi^{-1} = \pi\hat{\mathfrak{q}}$ voraussetzungsgemäß von $\mu\hat{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$ verschieden.

b) Nun sei $\hat{\mathfrak{q}}$ bezüglich $\{\pi, \mu\}$ *unzerlegt*, d. h. $\pi\hat{\mathfrak{q}} = \mu\hat{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$. Wir betrachten dann die Elemente $a - a\pi$ aus Δ, wobei a alle $\mathfrak{q}$-ganzen Elemente aus K durchläuft und behaupten zuerst:

(3) *Diese* $a - a\pi$ *bilden ein* $I_{\mathfrak{q}}$*-Erzeugendensystem von* $[\mathfrak{p}]_{\mathfrak{q}}$.

Beweis von (3): Ist a ganz für $\mathfrak{q}$, so folgt durch Komponentenübertragung, daß $a\pi$ ganz für $\hat{\mathfrak{q}}$ ist; und da $a\pi$ in K' liegt, ist es also ganz für das Vielfache $\mathfrak{q}'$ von $\hat{\mathfrak{q}}$ in K'. Es folgt, daß für $\mathfrak{q}$-ganzes a aus K die Differenz $a - a\pi$ in $I_{\mathfrak{q}} = [K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$ liegt. Wegen $a \equiv a\pi \bmod \mathfrak{p}$ gilt $a - a\pi \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$; diese Differenzen $a - a\pi$ liegen also in $[\mathfrak{p}]_{\mathfrak{q}}$. Ist nun b ein beliebiges Element aus $[\mathfrak{p}]_{\mathfrak{q}}$, so ist b als Element aus $I_{\mathfrak{q}} = [K_{\mathfrak{q}}, K'_{\mathfrak{q}'}]$ als *bilineare Form* in Elementsystemen (a) aus $K_{\mathfrak{q}}$ und (a') aus $K'_{\mathfrak{q}'}$ darstellbar: $b = f(a, a')$. Wegen $b \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ ist $b\pi^* = f(a\pi, a') = 0$, wobei wir mit π^* den zu dem Kompositum $K\pi \cdot K'$ gehörigen Resthomomorphismus bezeichnen. Es folgt $b = b - b\pi^* = f(a - a\pi, a')$. Dies bedeutet aber gerade, daß b durch ein gewisses System von Differenzen $a - a\pi$ mit $a \in K_{\mathfrak{q}}$ linear mit Koeffizienten a' aus $K'_{\mathfrak{q}'}$ darstellbar ist.

Da somit die $a - a\pi$ (a in $K_{\mathfrak{q}}$) ein $I_{\mathfrak{q}}$-Erzeugendensystem von $[\mathfrak{p}]_{\mathfrak{q}}$ bilden, so folgt aus **10.** (6), daß der größte gemeinsame $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler ihrer Reste nach μ^* gleich $\mathfrak{p}\mu^*$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$) ist. Diese Reste nach μ^* sind andererseits die Elemente $a\mu - a\pi$, denn die $a\pi$ werden als Elemente aus K' durch den K'-normierten Resthomomorphismus μ^* auf sich selbst, und die Elemente a aus K auf $a\mu$ abgebildet. Definitionsgemäß ist aber der $\hat{\mathfrak{q}}$-Teiler aller $a\mu - a\pi$ mit a aus $K_{\mathfrak{q}}$ gerade gleich dem $\hat{\mathfrak{q}}$-Bestandteil von $\mathfrak{D}_{\pi,\mu}$ (**2.** (1)). Es folgt also in der Tat die behauptete $\hat{\mathfrak{q}}$-Gleichung $\mathfrak{p}\mu^* = \mathfrak{D}_{\pi,\mu}$ (für $\hat{\mathfrak{q}}$).

Nachdem nun der Spezialfall (2) erledigt ist, in dem $\mathfrak{p}$ den Grad 1 über K' besitzt, führen wir den allgemeinen Fall der Gleichung (1) folgendermaßen auf diesen Spezialfall zurück: Vom Doppelkörper $\Delta = K \times K'$ gehen wir zum Doppelkörper $\tilde{\Delta} = K \times \tilde{K}$ mit der oben gewählten gemeinsamen Zerfällungserweiterung $\tilde{K}/K'$ für $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ über. Nach **7.** (3) zerfällt $\mathfrak{p}$ in $\tilde{\Delta}$ in lauter Primdivisoren ersten Grades über $\tilde{K}$, welche den π aus $\boldsymbol{\pi}$ entsprechen: $\mathfrak{p} = \sum_{\pi} \tilde{\mathfrak{p}}_{\pi}$. Bezeichnen wir mit $\tilde{\mu}^*$ die Restabbildung von Δ auf das Kompositum $K\mu \cdot \tilde{K}$, so ist $\tilde{\mu}^*$ eine Fortsetzung von μ^*, und es folgt nach **10.** (8) in Verbindung mit der Additionsformel **11.** (6):

$$\mathfrak{p}\mu^* = \mathfrak{p}\tilde{\mu}^* = \sum_{\pi} \tilde{\mathfrak{p}}_{\pi}\tilde{\mu}^*. \tag{4}$$

Da nun die $\tilde{\mathfrak{p}}_{\pi}$ über $\tilde{K}$ den Grad 1 besitzen, und da, wie gesagt, π jeweils der zugehörige Isomorphismus von K in $\tilde{K}$ ist, so entnehmen wir aus (2), angewandt auf $\tilde{\mathfrak{p}}_{\pi}$ und die Restabbildung $\tilde{\mu}^*$, daß

$$\tilde{\mathfrak{p}}_{\pi}\tilde{\mu}^* = \mathfrak{D}_{\pi,\mu} \qquad \text{(für alle } \pi \text{ aus } \boldsymbol{\pi}\text{)}$$

ist. Setzen wir dies in (4) ein, so erhalten wir die Behauptung (1).

Aus (1) ziehen wir eine bemerkenswerte Folgerung: Ist π ein Isomorphismus aus $\boldsymbol{\pi}$ mit dem zugehörigen normierten Kompositum $\Pi = K\pi \cdot K'$ und der zugehörigen Restabbildung π^*, so behaupten wir die Gültigkeit der Gleichung

$$N_{M/K'}(\mathfrak{p}\mu^*) = N_{\Pi/K'}(\mathfrak{m}\pi^*). \tag{5}$$

Da die eine Seite dieser Gleichung aus der anderen durch Vertauschung von $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ entsteht, soll diese Gleichung die *Symmetrieformel* heißen. Bevor wir an den Beweis der Symmetrieformel gehen, seien noch einige Bemerkungen gemacht: Nach dem Isomorphieprinzip für Divisorenreste ist der Divisor $N_{M/K'}(\mathfrak{p}\mu^*)$ von K' unabhängig von der Auswahl

des zu $\mathfrak{m}$ gehörigen Kompositums M unter denjenigen vom selben Typus, und entsprechendes gilt für $N_{\Pi/K'}(\mathfrak{m}\pi^*)$. Legen wir daher statt des K'-normierten Kompositums $M = K\mu \cdot K'$ ein beliebiges Kompositum $M = K\mu \cdot K'\mu'$ zu $\mathfrak{m}$ und entsprechend zu $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Kompositum $\Pi = K\pi \cdot K'\pi'$ zugrunde, so schreibt sich die Symmetrieformel (5) in der Gestalt

$$\text{(6a)} \qquad \boxed{N_{M/K'\mu'}(\mathfrak{p}\mu^*)\,\mu'^{-1} = N_{\Pi/K'\pi'}(\mathfrak{m}\pi^*)\,\pi'^{-1}.}$$

Vertauscht man hierin K und K', so erhält man die andere Symmetrieformel:

$$\text{(6b)} \qquad \boxed{N_{M/K\mu}(\mathfrak{p}\mu^*)\,\mu^{-1} = N_{\Pi/K\pi}(\mathfrak{m}\pi^*)\,\pi^{-1}.}$$

Nun der Beweis dieser Symmetrieformeln, für den, wie wir ja eben sagten, nur (5) bewiesen zu werden braucht. Wir geben dazu eine solche Darstellung von $N_{M/K'}(\mathfrak{p}\mu^*)$ an, aus der die Symmetrie ohne weiteres abzulesen ist. Dazu bilden wir neben dem vollen Isomorphismensystem $\boldsymbol{\pi}$ zu $\mathfrak{p}$ auch das volle Isomorphismensystem $\boldsymbol{\mu}$ zu $\mathfrak{m}$ von K in $\bar{K}'$. Durchläuft σ ein volles Isomorphismensystem von $M/K' = K\mu \cdot K'/K'$, so durchläuft $\mu\sigma$ ganz $\boldsymbol{\mu}$, und entsprechendes gilt für $\boldsymbol{\pi}$ und die Isomorphismen τ von $\Pi/K' = K\pi \cdot K'/K'$. Da $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ verschieden sind, so ist für beliebige σ und τ stets $\mu\sigma \neq \pi\tau$. Daher können die Elementardifferenten $\mathfrak{D}_{\pi\tau,\,\mu\sigma}$ gebildet werden, welche Divisoren der gemeinsamen Zerfällungserweiterung $\tilde{K}/K'$ für $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ sind. Ihre Summe $\mathfrak{R}_{\pi,\mu} = \sum\limits_{\sigma,\tau} \mathfrak{D}_{\pi\tau,\,\mu\sigma}$ möge die *Resultante* der Isomorphismensysteme $\boldsymbol{\pi}$ und $\boldsymbol{\mu}$ genannt werden. Es gilt dann:

(7) *Die Resultante* $\mathfrak{R}_{\pi,\mu}$ *ist gleich* $N_{M/K'}(\mathfrak{p}\mu^*)$.

Nach der Symmetrieformel **2.** (11) für Elementardifferenten ist $\mathfrak{R}_{\pi,\mu}$ in $\boldsymbol{\pi}$ und $\boldsymbol{\mu}$ symmetrisch, und daraus folgt dann die Symmetrieformel (5), falls nur (7) richtig ist.

Beweis von (7): Jedenfalls ist nach (1)

$$\mathfrak{p}\mu^* = \sum_{\tau} \mathfrak{D}_{\pi\tau,\,\mu}.$$

Ersetzen wir hierin μ durch $\mu\sigma$ und demgemäß den Resthomomorphismus μ^* durch $\mu^*\sigma$, so erhalten wir

$$\mathfrak{p}(\mu^*\sigma) = \sum_{\tau} \mathfrak{D}_{\pi\tau,\,\mu\sigma},$$

und daraus durch Summation über alle σ:

$$\sum_{\sigma} \mathfrak{p}(\mu^*\sigma) = \mathfrak{R}_{\pi,\mu}.$$

Nun ist aber nach der Isomorphieformel **10.** (7) für Divisorenreste:

$$\sum_{\sigma} \mathfrak{p}(\mu^*\sigma) = \sum_{\sigma} (\mathfrak{p}\mu^*)\,\sigma = N_{M/K'}(\mathfrak{p}\mu^*),$$

w. z. b. w.

§ 4. Die Restmultiplikation der Divisoren eines Doppelkörpers und die σ-Metrik.

13. Definition und Eigenschaften der Restmultiplikation.

Die im vorigen Paragraphen erworbenen Kenntnisse über Divisorenreste sollen jetzt zur Definition und Untersuchung der Restprodukte von Divisoren eines Doppelkörpers verwendet werden. Es seien $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ zwei verschiedene nichtkonstante Primdivisoren des Doppelkörpers $\Delta = K \times K'$. Wählen wir zu $\mathfrak{m}$ ein abhängiges Kompositum

$M = K\mu \cdot K'\mu'$ mit dem zugehörigen Resthomomorphismus μ^*, so können wir die beiden Divisoren

$$N_{M/K\mu}(\mathfrak{p}\mu^*)\,\mu^{-1} \quad \text{und} \quad N_{M/K'\mu'}(\mathfrak{p}\mu^*)\,\mu'^{-1}$$

aus K bzw. K' bilden, welche nach dem Isomorphieprinzip für Divisorenreste (**10.** (7)) durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ in invarianter Weise bestimmt sind. Es empfiehlt sich, für diese Divisoren solche Symbole zu verwenden, welche in $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$ symmetrisch sind; wir bezeichnen sie daher mit

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{m}\rangle_K \quad \text{und} \quad \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{m}\rangle_{K'}.$$

Dies sind die *Restprodukte von* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{m}$ *in* K *bzw. in* K' [20]).

Aus formalen Gründen, nämlich um die auf Restprodukte bezüglichen Formeln nicht doppelt, einmal für K und einmal für K', schreiben zu müssen, führen wir folgende Bezeichnung ein: Wir bilden die direkte Summe der Divisorengruppe von K mit der von K'. Eine Teilbarkeit und Äquivalenz von Summen $\mathfrak{c} + \mathfrak{c}'$ ($\mathfrak{c}$ aus K, $\mathfrak{c}'$ aus K') soll stets komponentenweise verstanden werden, es soll zum Beispiel $\mathfrak{c} + \mathfrak{c}' \sim \mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_0'$ genau dann gelten, wenn $\mathfrak{c} \sim \mathfrak{c}_0$ (in K) und $\mathfrak{c}' \sim \mathfrak{c}_0'$ (in K') ist. Aus den in **6.** erhaltenen Resultaten, insbesondere aus **6.** (5) und **6.** (6) folgt leicht, daß diese direkte Summe durch die Gruppe der konstanten Divisoren von $\Delta = K \times K'$ repräsentiert wird, und daß dann die eben erklärte komponentenweise Teilbarkeit bzw. Äquivalenz mit der Teilbarkeit bzw. Äquivalenz in Δ übereinstimmt. Doch kommt es für unseren gegenwärtigen Zweck hierauf nicht an. Wir setzen dann

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{m}\rangle = \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{m}\rangle_K + \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{m}\rangle_{K'} \tag{1}$$

und nennen $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{m}\rangle$ das *Restprodukt* von $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{m}$ schlechthin.

Wir werden nun das Restprodukt $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ in Erweiterung des Symbols (1) für beliebige zueinander prime Divisoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ aus Δ erklären. Dazu verabreden wir, falls im Verlaufe unserer Ausführungen ein nichtkonstanter Primdivisor $\mathfrak{m}$ auftritt, mit μ^* stets einen zu $\mathfrak{m}$ gehörigen Resthomomorphismus und mit $M = K\mu \cdot K'\mu'$ das zugehörige Kompositum zu bezeichnen, es sei denn, daß etwas anderes gesagt wird.

Wir definieren nun:

Ist $\mathfrak{a}$ *ein beliebiger, zum nichtkonstanten Primdivisor* $\mathfrak{m}$ *primer Divisor von* Δ, *so wird*

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m}\rangle = N_{M/K\mu}(\mathfrak{a}\mu^*)\,\mu^{-1} + N_{M/K'\mu'}(\mathfrak{a}\mu^*)\,\mu'^{-1} \tag{2a}$$

gesetzt. — Ist $\mathfrak{q}$ *ein konstanter Primdivisor aus* K, *und ist* $\mathfrak{a}$ *ein zu* $\mathfrak{q}$ *primer Divisor aus* Δ, *so wird*

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{q}\rangle = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{q} + \mathfrak{a}_{K \to K'}(\mathfrak{q}) \tag{2b}$$

gesetzt, und symmetrisch dazu:

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{q}'\rangle = \mathfrak{a}_{K' \to K}(\mathfrak{q}') + gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{q}' \tag{2c}$$

für $\mathfrak{q}'$ *aus* K' *und zu* $\mathfrak{q}'$ *primes* $\mathfrak{a}$. *Schließlich wird für einen beliebigen zu* $\mathfrak{a}$ *primen Divisor* $\mathfrak{b}$ *von* Δ *das Restprodukt* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ *durch Linearität erklärt: Das Restprodukt* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ *einer Summe* $\mathfrak{b} = \sum_i \mathfrak{b}_i$ *soll gleich der Summe der Restprodukte* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_i\rangle$ *sein.*

Das so definierte Restprodukt $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ zweier zueinander primer Divisoren aus Δ besteht also aus zwei Komponenten $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_K$ aus K und $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_{K'}$ aus K'.

Die Abbildung $\mathfrak{a} \to \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ (bei festem $\mathfrak{b}$) setzt sich definitionsgemäß additiv aus den Abbildungen (2a, b, c) zusammen. Die letzteren sind *arithmetische Homomorphismen*: Für (2a) folgt das aus **11.** (1) durch Normbildungen und isomorphe Übertragungen, während

[20]) Der Name wurde deshalb gewählt, weil $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{m}\rangle_K$ und $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{m}\rangle_{K'}$ durch Divisorenreste erklärt sind, und weil diese Symbole die Eigenschaften eines inneren Produkts besitzen (wie gleich gezeigt wird).

es für (2b, c) auf Grund der arithmetischen Eigenschaften **6.** (7) der Gradfunktionen bzw. des Additionstheorems **9.** (4) feststeht. Es ergibt sich daraus, daß erstens auch $\mathfrak{a} \to \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ ein Homomorphismus ist (so daß $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ ein in beiden Argumenten lineares Symbol ist), und daß zweitens $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$ die folgenden arithmetischen Eigenschaften besitzt:

(3) *Aus* $\mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2$ *und* $\mathfrak{b} > 0$ *folgt* $\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b} \rangle < \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b} \rangle$.

(4) *Aus* $\mathfrak{a} \sim 0$ (*in* Δ) *folgt* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \sim 0$.

Dabei haben wir, indem wir $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle$, $\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b} \rangle$ usw. hinschrieben, stets angenommen, daß die betreffenden Restprodukte erklärt sind, daß also $\mathfrak{a}$ prim zu $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}_1$ prim zu $\mathfrak{b}$ usw. ist. Diese Vereinbarung soll auch für das folgende gelten. — Neben die beiden Sätze (3) und (4), welche in den beiden Argumenten des Restprodukts unsymmetrisch sind, treten noch diejenigen Sätze, welche sich daraus durch Vertauschung der Argumente ergeben:

(3a) *Aus* $\mathfrak{b}_1 < \mathfrak{b}_2$ *und* $\mathfrak{a} > 0$ *folgt* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1 \rangle < \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_2 \rangle$.

(4a) *Aus* $\mathfrak{b} \sim 0$ (*in* Δ) *folgt* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle \sim 0$.

Die Möglichkeit, von den Sätzen (3), (4) auf die Sätze (3a), (4a) zu schließen, wird uns durch die folgende fundamentale *Symmetrieformel* gegeben:

$$\boxed{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \rangle}. \tag{5}$$

Zum Beweis der Symmetrieformel können wir annehmen, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide *Primdivisoren* von Δ sind und unterscheiden dann vier Fälle, welche zusammengenommen alle möglichen Fälle ergeben:

Erstens seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide nichtkonstant: $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}$. In diesem (wesentlichen) Falle folgt (5) aus den Symmetrieformeln **12.** (6) auf Grund der Definition (2a).

Zweitens sei einer von ihnen, etwa $\mathfrak{a}$, konstant, während $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}$ nichtkonstant sei. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$ etwa in K läge. Der Divisorenrest $\mathfrak{q}\mu^*$ fällt nach **11.** (1) mit dem isomorphen Bild $\mathfrak{q}\mu$ zusammen. Daher ist auf Grund der Definitionen (2a, b) einmal:

$$\langle \mathfrak{q}, \mathfrak{m} \rangle_K = N_{M|K\mu}(\mathfrak{q}\mu)\, \mu^{-1} = [M : K\mu] \cdot \mathfrak{q} = gr_{\Delta|K}(\mathfrak{m}) \cdot \mathfrak{q} = \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{q} \rangle_K ,$$

und das andere Mal:

$$\langle \mathfrak{q}, \mathfrak{m} \rangle_{K'} = N_{M|K'\mu'}(\mathfrak{q}\mu)\, \mu'^{-1} = \mathfrak{m}_{K \to K'}(\mathfrak{q}) = \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{q} \rangle_{K'} ,$$

was zusammengenommen die Behauptung ergibt.

Drittens seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide konstant, aber nicht beide in K oder beide in K' gelegen, etwa $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$ aus K und $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}'$ aus K'. Dann ist nach **9.** (2) $\mathfrak{q}_{K' \to K}(\mathfrak{q}') = gr_{\Delta|K}(\mathfrak{q}') \cdot \mathfrak{q} = \mathfrak{q}$, was nach den Definitionen (2b, c) die Gleichheit

$$\langle \mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \rangle_K = \langle \mathfrak{q}', \mathfrak{q} \rangle_K = \mathfrak{q}$$

ergibt. Vertauscht man in dieser Formel $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q}'$ und K mit K', so erhält man auch für das in K' gelegene Restprodukt die Symmetrie:

$$\langle \mathfrak{q}', \mathfrak{q} \rangle_{K'} = \langle \mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \rangle_{K'} = \mathfrak{q}' . \tag{9}$$

Viertens seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide in K oder beide in K' gelegen. Wir nehmen an, sie seien beide in K gelegen: $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_2$. Dann ist zunächst $gr_{\Delta|K}(\mathfrak{q}_1) = 0$, und ferner $(\mathfrak{q}_1)_{K \to K'}(\mathfrak{q}_2) = 0$, woraus nach Definition (2b) folgt, daß

$$\langle \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \rangle = 0 \tag{10}$$

ist. Hieraus ergibt sich durch Vertauschung von $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ die Formel $\langle \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1 \rangle = 0$, und somit gilt auch in diesem Falle die Symmetrie.

Von besonderer Bedeutung sind für uns die Restprodukte von Primdivisoren ersten Grades über K', auf die sich (wie wir in (13) zeigen werden) jedes Restprodukt durch Übergang zu einer geeigneten Zerfällungserweiterung zurückführen läßt. Hat $\mathfrak{m}$ den Grad 1 über K', und ist $K \to K\mu$ der zugehörige Isomorphismus von K in K' mit dem entsprechenden Resthomomorphismus μ^* von Δ auf $K\mu \cdot K'$, so kann man in $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m} \rangle_{K'} = N_{K'/K'}(\mathfrak{a}\mu^*)$ das Normzeichen weglassen, und es ergibt sich:

$$(11) \qquad \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m} \rangle = N_{K'/K\mu}(\mathfrak{a}\mu^*)\,\mu^{-1} + \mathfrak{a}\mu^*, \quad (\text{wenn } gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{m}) = 1).$$

Ist noch spezieller auch $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ ein nichtkonstanter Primdivisor von Δ, der auch den Grad 1 über K' besitzt, so ist nach **12.** (2) $\mathfrak{p}\mu^* = \mathfrak{D}_{\pi,\mu}$, wo π der zu $\mathfrak{p}$ gehörige Isomorphismus von K in K' ist. Es folgt:

$$(12) \qquad \langle \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \rangle_{K'} = \mathfrak{D}_{\pi,\mu} \quad (\text{wenn } gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{p}) = gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{m}) = 1).$$

Folgender Satz besagt die Invarianz des Restprodukts beim Übergang zu einer geeigneten Zerfällungserweiterung:

(13) *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zueinander prime Divisoren von* $\Delta = K \times K'$ *und ist* $\tilde{K}/K'$ *eine gemeinsame Zerfällungserweiterung für alle nichtkonstanten Primbestandteile von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$, *so ist das in* K' *gebildete Restprodukt* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_{K'}$ (*wobei* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *als Divisoren von* Δ *zu betrachten sind*) *gleich dem in* $\tilde{K}$ *gebildeten Restprodukt* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_{\tilde{K}}$ (*wobei jetzt* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *als Divisoren von* $\tilde{\Delta} = K \times \tilde{K}$ *zu betrachten sind*):

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_{K'} = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_{\tilde{K}}.$$

Beweis: Wegen der Linearität können wir annehmen, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide *Primdivisoren* von Δ sind.

Erstens sei mindestens einer von ihnen nichtkonstant; wegen der Symmetrie können wir annehmen, dies sei $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}$. Ist μ^* ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriger K'-normierter Resthomomorphismus von Δ auf das Kompositum $M = K\mu \cdot K'$, und ist $\boldsymbol{\sigma}$ das volle Isomorphismensystem von M/K', so ist $\boldsymbol{\mu} = \mu\boldsymbol{\sigma}$ das volle zu $\mathfrak{m}$ gehörige Isomorphismensystem von K in $\tilde{K}'$. Gemäß der Definition (2a) ist nun einerseits:

$$(14) \qquad \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m} \rangle_{K'} = N_{M/K'}(\mathfrak{a}\mu^*) = \sum_{\sigma} (\mathfrak{a}\mu^*)\,\sigma = \sum_{\sigma} \mathfrak{a}(\mu^*\sigma),$$

wobei wir am Schluß das Isomorphieprinzip für Divisorenreste (**10.** (7)) benutzten. Andererseits berechnen wir $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m} \rangle_{\tilde{K}}$. Da $\tilde{K}/K'$ voraussetzungsgemäß eine Zerfällungserweiterung für $\mathfrak{m}$ ist, so zerfällt $\mathfrak{m}$ nach dem Zerlegungsgesetz **7.** (3) in eine Summe $\mathfrak{m} = \sum_{\sigma} \tilde{\mathfrak{m}}_{\sigma}$ von Primdivisoren $\tilde{\mathfrak{m}}_{\sigma}$ ersten Grades über $\tilde{K}$, zu welchen die Isomorphismen $K \to K\mu\sigma$ von K in $\tilde{K}$ gehören. Ist $\tilde{\mu}_{\sigma}^*$ der zugehörige Resthomomorphismus von $\tilde{\Delta}$ auf $K\mu\sigma \cdot \tilde{K}$, so ist unter Benutzung von (11):

$$(15) \qquad \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m} \rangle_{\tilde{K}} = \sum_{\sigma} \langle \mathfrak{a}, \tilde{\mathfrak{m}}_{\sigma} \rangle_{\tilde{K}} = \sum_{\sigma} \mathfrak{a}\tilde{\mu}_{\sigma}^*.$$

Da nun die Restabbildungen $\tilde{\mu}_{\sigma}^*$ von $\tilde{\Delta}$ auf $K\mu\sigma \cdot \tilde{K}$ jeweils Fortsetzungen der Restabbildungen $\mu^*\sigma$ von Δ auf $K\mu\sigma \cdot K'$ sind, so ergibt **10.** (8) für jedes σ die Gleichheit $\mathfrak{a}\tilde{\mu}_{\sigma}^* = \mathfrak{a}(\mu^*\sigma)$. Der Vergleich von (14) und (15) zeigt dann die Richtigkeit der Behauptung $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m} \rangle_{K'} = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m} \rangle_{\tilde{K}}$.

Zweitens seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beide konstant, aber nicht beide in K oder beide in K' gelegen. Nach der Symmetrieformel können wir annehmen, es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}$ ein in K gelegener Prim-

divisor, während $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}'$ in K' liegt. Wie in (9) berechnet, ist dann $\langle \mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \rangle_{K'} = \mathfrak{q}'$. Da $\mathfrak{q}$ in $K \times \widetilde{K}$ wieder ein konstanter Primdivisor aus K ist, so folgt genau so für jeden Primteiler $\tilde{\mathfrak{q}}_i$ von $\mathfrak{q}'$ in $\widetilde{K}$ die Formel $\langle \mathfrak{q}, \tilde{\mathfrak{q}}_i \rangle_{\widetilde{K}} = \tilde{\mathfrak{q}}_i$, also: $\langle \mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \rangle_{\widetilde{K}} = \sum_i \langle \mathfrak{q}, \tilde{\mathfrak{q}}_i \rangle_{\widetilde{K}} = \sum_i \tilde{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{q}'$.

Drittens seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ beide konstant und beide in K oder beide in K' gelegen. Dann ergibt sich aus (10), daß $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_{K'} = 0$ ist. Da dann $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als Divisoren von $K \times \widetilde{K}$ auch beide in K oder beide in $\widetilde{K}$ liegen, so ergibt sich genau so $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_{\widetilde{K}} = 0$, also wiederum $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_{K'} = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle_{\widetilde{K}}$. — Damit ist der Satz (13) bewiesen.

Zum Schluß dieses Abschnitts erklären wir noch das Restprodukt $\langle A, B \rangle$ zweier Klassen A und B von Δ als die Klasse des Restproduktes zweier zueinander primer Vertreter $\mathfrak{a}$ aus A, $\mathfrak{b}$ aus B, was nach (4) eindeutig ist. Die für Restprodukte von Divisoren aufgestellten Regeln übertragen sich sinngemäß auch auf Restprodukte von Klassen. Während aber die ersteren nur für zueinander prime Divisoren erklärt sind, so sind die letzteren *unbeschränkt* für irgendzwei Klassen erklärt, denn es gibt ja stets zwei zueinander prime Vertreter aus zwei vorgegebenen Klassen.

14. Differentialdivisoren als Restprodukte von Primdivisoren ersten Grades.

In diesem Abschnitt führen wir eine explizite Berechnung des Restprodukts $\langle P, P \rangle$ durch, wo P die Klasse eines nichtkonstanten Primdivisors $\mathfrak{p}$ von $\Delta = K \times K'$ ist, welcher über K' den Grad 1 besitzt. Mit π sei stets der zugehörige Isomorphismus von K in K' und mit π^* der zugehörige Resthomomorphismus von Δ auf $K\pi \cdot K'$ bezeichnet. Wir behaupten nun:

(1) *Das Restprodukt $\langle P, P \rangle$ ist gleich dem Restprodukt $-\langle W, P \rangle$, wo W die Differentialklasse von K ist*[21]).

Nach Definition haben wir zur Berechnung von $\langle P, P \rangle$ einen zu $\mathfrak{p}$ primen Divisor $\mathfrak{a}$ aus P zu wählen und $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{p} \rangle$ zu berechnen. Nun entsprechen die zu $\mathfrak{p}$ primen Divisoren $\mathfrak{a}$ aus P vermöge $a \cong \mathfrak{p} - \mathfrak{a}$ den Primelementen a für $\mathfrak{p}$. Zur Auswahl eines geeigneten Divisors $\mathfrak{a}$ aus P, für den $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{p} \rangle$ besonders einfach zu berechnen ist, werden wir daher zuerst ein geeignetes Primelement für $\mathfrak{p}$ suchen: Wegen $K\pi \subseteq K'$ ergibt sich, daß für jedes Element t aus K die Differenz $t - t\pi$ ein Element aus $K \times K'$ ist. Wir behaupten:

(2) *Ist t separierend für K, so ist $t - t\pi$ ein Primelement für $\mathfrak{p}$.*

Nehmen wir zunächst an, es sei (2) schon bewiesen. Dann wählen wir zu t den Divisor $\mathfrak{t}$ aus P vermöge $(t - t\pi) \cong \mathfrak{p} - \mathfrak{t}$, welcher wegen (2) prim zu $\mathfrak{p}$ ist. (1) schreibt sich dann so: $\langle \mathfrak{t}, \mathfrak{p} \rangle \sim -\langle W, \mathfrak{p} \rangle$, also nach **13.** (11): $\mathfrak{t}\pi^* \sim -W\pi^*$[22]). Nun stimmt der Divisorenrest $W\pi^*$ nach **11.** (1) mit dem isomorphen Bilde $W\pi$ überein, da W in K liegt.

Daher schreibt sich die Behauptung (1) schließlich so: $\mathfrak{t}\pi^* \sim -W\pi$. Sie wird bewiesen durch folgenden Satz:

(3) *Ist t separierend für K/Ω, und ist dazu $\mathfrak{t}$ wie angegeben bestimmt, so ist der Divisorenrest $-\mathfrak{t}\pi^*$ gleich dem isomorphen Bilde $(dt)\pi$ des zum Differential dt gehörigen Differentialdivisors von K.*

Mit dem Beweis von (3) ist also (1) bewiesen. Um (3) zu beweisen, ist es erforderlich, zunächst einmal die Primzerlegung von $\mathfrak{t}$ zu bestimmen, das heißt, die Primzerlegung

---

[21]) Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, daß sich $\langle W, P \rangle$ recht einfach berechnen läßt; siehe dazu die Formeln (8), (9).

[22]) $W\pi^*$ ist die Klasse aller Divisoren $\mathfrak{w}\pi^*$ mit zu $\mathfrak{p}$ primen $\mathfrak{w}$ aus W. Diese Bezeichnung ist nach **11.** (1) eindeutig.

von $t - t\pi$ in Δ zu berechnen; daraus wird sich insbesondere auch der Beweis der noch offen gebliebenen Behauptung (2) ergeben. Zweckmäßigerweise tun wir dies jedoch nicht in $K \times K'$ selbst, sondern gehen zu einer solchen endlich-algebraischen Erweiterung der Form $K \times \tilde{K}$ über, für die $\tilde{K}$ neben $K\pi$ auch alle zu $K\pi$ über $R\pi = \Omega(t\pi)$ konjugierten Körper enthält. Das bedeutet nach **7.**, daß $\tilde{K}/R\pi$ eine Zerfällungserweiterung für den Zählerprimdivisor $\wp$ von $t - t\pi$ in $K \times R\pi$ ist. Durchläuft σ ein volles System von Isomorphismen von $K\pi/R\pi$ in $\tilde{K}$, so zerfällt nach **7.** (3) $\wp$ in $K \times \tilde{K}$ in eine Summe von Primdivisoren $\tilde{\mathfrak{p}}_\sigma$ von $K \times \tilde{K}$, welche den Grad 1 über $\tilde{K}$ besitzen und zu denen die Isomorphismen $\pi\sigma$ von K in $\tilde{K}$ gehören. Unter diesen $\tilde{\mathfrak{p}}_\sigma$ kommt $\mathfrak{p}$ selbst vor, nämlich $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}}_\varepsilon$, wo ε der identische Isomorphismus ist. Da voraussetzungsgemäß t separierend für K, also $K\pi/R\pi$ separabel ist, so sind alle σ und daher auch alle $\tilde{\mathfrak{p}}_\sigma$ voneinander verschieden, woraus insbesondere die Behauptung (2) folgt. — Da der Nenner von $t - t\pi$ konstant ist und durch $\mathfrak{n} + \mathfrak{n}\pi$ gegeben wird, wenn $\mathfrak{n}$ der Nenner von t ist, so erhalten wir also folgende Zerlegung:

$$(t - t\pi) \cong \mathfrak{p} + \sum_{\sigma \neq \varepsilon} \tilde{\mathfrak{p}}_\sigma - (\mathfrak{n} + \mathfrak{n}\pi) \qquad (\text{in } \tilde{\Delta});$$

also:

$$(4) \qquad -\mathfrak{t} = \sum_{\sigma \neq \varepsilon} \tilde{\mathfrak{p}}_\sigma - (\mathfrak{n} + \mathfrak{n}\pi).$$

Um nun (3) zu beweisen, bemerken wir, daß wir dazu nach **10.** (8) von $\Delta = K \times K'$ auf den Doppelkörper $\tilde{\Delta} = K \times \tilde{K}$ übergehen können, wobei wir π^* durch eine Fortsetzung $\tilde{\pi}^*$ von $\tilde{\Delta}$ auf $K\pi \cdot \tilde{K}$ zu ersetzen haben. Es ist also

$$(5) \qquad -\mathfrak{t}\tilde{\pi}^* = (dt)\,\pi$$

zu beweisen.

Nach **11.** (1) stimmt der Divisorenrest $\mathfrak{n}\pi^*$ mit dem isomorphen Bilde $\mathfrak{n}\pi$ überein, da der Nenner $\mathfrak{n}$ von t konstant aus K ist. Aus demselben Grunde ist der Divisorenrest von $\mathfrak{n}\pi$ nach $\tilde{\pi}^*$ gleich $\mathfrak{n}\pi$ selbst, denn $\tilde{\pi}^*$ ist $\tilde{K}$-normiert. Da ferner konstruktionsgemäß sowohl die Divisoren $\tilde{\mathfrak{p}}_\sigma$ mit $\sigma \neq \varepsilon$ als auch $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}}_\varepsilon$ über $\tilde{K}$ den Grad 1 besitzen, so folgt aus **12.** (2), daß die Divisorenreste $\mathfrak{p}_\sigma\pi^*$ gleich den Elementardifferenten $\mathfrak{D}_{\pi\sigma,\pi\varepsilon}$ sind. Zusammengenommen ergibt dies nach (4):

$$(6) \qquad -\mathfrak{t}\tilde{\pi}^* = \sum_{\sigma \neq \varepsilon} \mathfrak{D}_{\pi\sigma,\pi\varepsilon} - 2(\mathfrak{n}\pi).$$

Andererseits berechnen wir $(dt)\,\pi$. Wir stellen dazu (dt) in der Form $(dt) = \mathfrak{D}_{K/R} - 2\mathfrak{n}$ dar, wo $\mathfrak{D}_{K/R}$ die Differente von K über dem Teilkörper $R = \Omega(t)$ ist[23]). Durch isomorphe Übertragung vermöge π erhalten wir daraus die Darstellung $(dt)\,\pi = \mathfrak{D}_{K\pi/R\pi} - 2(\mathfrak{n}\pi)$. Hier kann die Differente nach **2.** (6) durch die σ-Differente $\mathfrak{D}_\sigma^{(\varepsilon)} = \sum_{\sigma \neq \varepsilon} \mathfrak{D}_{\sigma,\varepsilon}$ ersetzt werden, so daß wir

$$(7) \qquad (dt)\pi = \sum_{\sigma \neq \varepsilon} \mathfrak{D}_{\sigma,\varepsilon} - 2(\mathfrak{n}\pi)$$

erhalten. Vergleichen wir jetzt die Darstellungen (6) und (7) und beachten, daß nach **2.** (8) $\mathfrak{D}_{\pi\sigma,\pi\varepsilon} = \mathfrak{D}_{\sigma,\varepsilon}$ für jedes σ ist, so erhalten wir die behauptete Gleichheit (5), welche (1) beweist.

In Ergänzung zu Satz (1) geben wir noch eine explizite Darstellung für $\langle W, P\rangle$ an. Sie lautet:

$$(8) \qquad \langle W, P\rangle = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{p}) \cdot W + W\pi.$$

[23]) Vgl. [5], S. 347.

Dies erkennt man etwa aus **13.** (11) für W statt $\mathfrak{a}$, da W in K liegt, also $W\pi^*$ nach **11.** (1) gleich $W\pi$ ist, und da $W\pi$ sich bei Normbildung mit dem Körpergrad $[K' : K\pi] = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{p})$ multipliziert. Setzen wir noch $m = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{p})$, so lautet die durch Satz (1) gelieferte Aussage demgemäß:

$$(9) \qquad \boxed{\langle P, P\rangle = -mW - W\pi}.$$

15. Die σ-Metrik der gröberen Divisorklassen. Formulierung des Hauptsatzes.

Wir beginnen mit folgender Feststellung:

(1) *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei beliebige zueinander prime Divisoren des Doppelkörpers* $\Delta = K \times K'$, *so besitzt ihr Restprodukt* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_K$ *in* K *denselben Grad wie* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_{K'}$ *in* K'.

Zum Beweise können wir annehmen, $\mathfrak{b}$ sei ein Primdivisor $\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{q}$ oder $\mathfrak{q}'$. Dann wird $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ durch die Ausdrücke **13.** (2a) oder **13.** (2b) oder **13.** (2c) gegeben, und wir haben die dort jeweils in einer Zeile stehenden beiden Divisoren auf Gradgleichheit zu prüfen. Für **13.** (2a) ergibt sich das daraus, daß der Grad von $\mathfrak{a}\mu^*$ in M bei Normbildung und isomorpher Übertragung erhalten bleibt, also sowohl gleich dem Grad von $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m}\rangle_K$ als auch gleich dem Grad von $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{m}\rangle_{K'}$ in K bzw. in K' ist. Für **13.** (2b, c) folgt die behauptete Gradgleichheit aus der Gradregel **9.** (5) für Korrespondenzen.

Den gemeinsamen Grad von $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_K$ in K und $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle_{K'}$ in K' nennen wir den *Grad des Restprodukts* $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ und bezeichnen ihn mit $\chi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Da der Grad auch eine *Klassen*funktion ist, so können wir für irgendzwei Klassen A, B aus Δ die Funktion $\chi(A, B)$ als den gemeinsamen Grad von $\langle A, B\rangle_K$ in K und von $\langle A, B\rangle_{K'}$ in K' erklären. Diesen Umstand machen wir uns zunutze, indem wir für irgendzwei nicht notwendig zueinander prime Divisoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von Δ die Funktion $\chi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ durch $\chi(A, B)$ erklären, wo A und B die Klassen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind. So erhalten wir in χ eine unbeschränkt erklärte, bilineare und symmetrische ganzzahlige Funktion, kurz gesagt: *eine ganzzahlige Metrik der Divisorengruppe von* Δ. — Bei einer Untersuchung von χ ist die nächstliegende Frage: Welche Werte nimmt χ für konstante Divisoren an? Sie wird beantwortet durch:

(2) *Ist* $\mathfrak{c}$ *konstant und* $\mathfrak{a}$ *beliebig, so ist*

$$\chi(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{c}) \cdot gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{a}) + gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{c}) \cdot gr_{\Delta/K}(\mathfrak{a}).$$

Beweis: Indem wir $\mathfrak{a}$ nötigenfalls durch einen ihm äquivalenten zu $\mathfrak{c}$ primen Divisor ersetzen, können wir annehmen, daß $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ zueinander prim sind. Da beide Seiten der behaupteten Gleichung linear in $\mathfrak{c}$ sind, können wir annehmen, es sei $\mathfrak{c}$ ein konstanter *Prim*divisor, etwa $\mathfrak{c} = \mathfrak{q}$ aus K. Dann ist $gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{q}) = 1$ und $gr_{\Delta/K}(\mathfrak{q}) = 0$, und es ist daher $\chi(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{a})$ zu beweisen. Da nun $\chi(\mathfrak{q}, \mathfrak{a})$ der Grad von $\langle \mathfrak{q}, \mathfrak{a}\rangle_K = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{q}\rangle_K$ ist, und das letztere Restprodukt nach **13.** (2b) gleich $gr_{\Delta/K}(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{q}$ ist, so ersieht man daraus die Richtigkeit der Behauptung.

Die rechte Seite der in (2) auftretenden Gradgleichung ist als Funktion von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}$ wieder bilinear, symmetrisch und ganzzahlig, also ebenfalls eine Metrik. Setzen wir daher allgemein für beliebige Divisoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ von Δ:

$$(3) \qquad \psi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{a}) \cdot gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{b}) + gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{a}) \cdot gr_{\Delta/K}(\mathfrak{b}),$$

so besagt Satz (3), daß die χ-Metrik mit der ψ-Metrik übereinstimmt, falls nur eines der beiden Argumente ein konstanter Divisor ist. Bilden wir daher die Differenzmetrik

$$(4) \qquad \sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \psi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) - \chi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

so ändert sich diese nicht bei Abänderung der Argumente um konstante Summanden. Andererseits ist, wie oben gesagt, χ eine Metrik der *Klassengruppe* von Δ, und dies trifft

auch für ψ zu, weil sich ψ aus Gradfunktionen zusammensetzt, welche nur von der Klasse abhängen. Daher ist auch σ eine Metrik der Klassengruppe von Δ, das heißt: $\sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bleibt ungeändert bei Abänderung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ um Hauptdivisoren. Kombiniert man diese Aussage mit der zuvor für konstante Abänderungen erhaltenen Aussage, so sieht man, daß sich $\sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ nicht ändert bei Abänderung der Argumente in ihren gröberen Klassen, daß also *σ in Wahrheit eine Metrik des Moduls R_Δ der gröberen Klassen von Δ ist.*

Im Rest dieses Paragraphen werden wir die so erklärte Metrik untersuchen. Der zu beweisende *Hauptsatz* lautet:

(5) *σ ist als Metrik von R_Δ positiv definit, das heißt: Ist $\mathfrak{a} \not\approx 0$ (in Δ), so gilt:*

$$\boxed{\sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) > 0.}$$

Insbesondere folgt daraus, daß σ in R_Δ kein Radikal besitzt, das heißt: die gröbere Hauptklasse ist die einzige aus R_Δ, welche auf allen anderen Klassen bezüglich σ senkrecht steht:

(6) Aus $\sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0$ für alle $\mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a} \approx 0$ (in Δ).

Ferner ergibt sich als Folgerung aus dem Hauptsatz:

(7) *Der Modul R_Δ der gröberen Klassen von Δ besitzt keine von Null verschiedenen Elemente endlicher Ordnung.*

Denn ist $\mathfrak{a}$ ein Divisor, für den $n\mathfrak{a} \approx 0$ (in Δ) mit einer ganzrationalen Zahl $n \neq 0$ gilt, so folgt $0 = \sigma(n\mathfrak{a}, n\mathfrak{a}) = n^2\sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$, also $\sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0$ und daraus nach dem Hauptsatz $\mathfrak{a} \approx 0$ (in Δ).

Bevor wir an den Beweis des Hauptsatzes im nächsten Abschnitt herangehen, bemerken wir noch etwas über den Fall des Geschlechtes 0 und 1.

(8) *Hat K oder K' das Geschlecht 0, so besteht R_Δ nur aus der gröberen Hauptklasse.*

Beweis: Es habe etwa K das Geschlecht 0. Nach **6.** (8) gibt es genau so viel gröbere Klassen in Δ wie in Δ/K'. Als Konstantenerweiterung von K/Ω ist Δ/K' wie K/Ω ein rationaler Funktionenkörper[24]). Daher sind die gewöhnlichen Klassen von Δ/K' bereits eineindeutig durch die Gradfunktion gekennzeichnet. Weil es nun schon in K zu vorgegebenem Grad stets einen Divisor gibt, so folgt, daß in jeder Klasse von Δ/K' ein Divisor aus K, also ein konstanter Divisor liegt, w. z. b. w.

Der Hauptsatz (5) ist also in dem Falle, wo K das Geschlecht $g = 0$ besitzt, nichtssagend, so daß wir zu seinem Beweis in Zukunft $g > 0$ annehmen können und wollen. Im Falle $g = 1$ gilt:

(9) *Hat K das Geschlecht 1, so gibt es in jeder gröberen Klasse $\not\approx 0$ von Δ einen nichtkonstanten Primdivisor $\mathfrak{p}$ von erstem Grade über K'.*

Zum Beweise wähle man einen Primdivisor $\mathfrak{q}'$ aus K' und einen zweiten Primdivisor $\mathfrak{q}$ aus K. Da K das Geschlecht 1 hat, ist $\mathfrak{q}$ regulär. Der Satz **9.** (6) zeigt, daß es in jeder gröberen Klasse $\not\approx 0$ einen ganzen, total nichtkonstanten Divisor $\mathfrak{b}$ gibt mit $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') < \mathfrak{q}$. Wegen $\mathfrak{b} \not\approx 0$ ist erst recht $\mathfrak{b} \neq 0$. Aus der Ganzheit von $\mathfrak{b}$ folgt nun $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') \neq 0$, also $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}$. Aus der Gradregel **9.** (5) für Korrespondenzen entnehmen wir nun, daß $gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{b}) = gr_{K/\Omega}(\mathfrak{q}) = 1$ ist; und da $\mathfrak{b}$ ganz ist, so ist $\mathfrak{b}$ notwendig ein *Prim*divisor, w. z. b. w.

Im Hinblick auf Satz (9) wird der Fall $g = 1$ vollständig erledigt durch folgende Feststellung:

(10) *Ist $\mathfrak{p}$ ein nichtkonstanter Primdivisor von $\Delta = K \times K'$ vom Grade 1 über K' und vom Grade m über K, so ist $\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 2mg$, wo g das Geschlecht von K ist.*

[24]) Da K/Ω das Geschlecht 0 hat und Ω algebraisch abgeschlossen ist, so ist K/Ω ein rationaler Funktionenkörper; vgl. [5], S. 354.

Beweis: Nach Definition (3) ist $\psi(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 2m$. Um $\chi(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ zu berechnen, bilden wir $\langle P, P\rangle_K$; dies ist nach **14.** (9) gleich $-mW$. Beachten wir, daß die Differentialklasse W von K den Grad $2g-2$ besitzt, so erhalten wir durch Gradbildung $\chi(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = -m(2g-2)$. Daraus folgt $\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 2m - (-m(2g-2)) = 2mg$, w. b.

Für den Fall des Geschlechtes 1 sind also die Ausführungen des folgenden Abschnitts entbehrlich und ist der Hauptsatz schon jetzt als richtig erkannt.

16. Beweis des Hauptsatzes über die σ-Metrik.

Beim Beweise des Hauptsatzes **15.** (5) kommt es wesentlich darauf an, in den von Null verschiedenen gröberen Klassen von Δ geeignete Vertreter $\mathfrak{b}$ zu finden, für die $\sigma(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) > 0$ gezeigt werden kann. Hierzu beweisen wir folgenden Satz:

(1) *In jeder von* 0 *verschiedenen gröberen Divisorklasse von* Δ *gibt es einen ganzen, total nichtkonstanten Divisor* $\mathfrak{b} \neq 0$ *derart, daß das zugehörige volle Isomorphismensystem* $\boldsymbol{\beta}$ *von* K *in eine Zerfällungserweiterung* $\tilde{K}/K'$ *zu* $\mathfrak{b}$ *ein besonderes Isomorphismensystem im Sinne der Definition* **4.** (1) *ist.*

Beweis: Wir wählen einen beliebigen Primdivisor $\mathfrak{q}'$ aus K' und einen ganzen regulären Divisor $\mathfrak{r}$ aus K, dessen Grad gleich dem Geschlecht g von K ist, und der aus lauter verschiedenen Primdivisoren zusammengesetzt ist [25]). In jeder gröberen Klasse $\not\approx 0$ gibt es dann nach **9.** (6) einen ganzen, total nichtkonstanten Divisor $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}') < \mathfrak{r}$. Wegen $\mathfrak{b} \not\approx 0$ ist natürlich $\mathfrak{b} \neq 0$. Es sei $\tilde{K}/K'$ eine Zerfällungserweiterung für $\mathfrak{b}$ und $\boldsymbol{\beta}$ das zu $\mathfrak{b}$ gehörige volle Isomorphismensystem von K in $\tilde{K}$. Zum Beweis, daß $\boldsymbol{\beta}$ ein besonderes Isomorphismensystem ist, haben wir nach Definition nachzuweisen, daß es einen Primdivisor $\tilde{\mathfrak{q}}$ von $\tilde{K}$ gibt, dessen $\boldsymbol{\beta}$-Komponentensumme $\boldsymbol{\beta}\tilde{\mathfrak{q}} = \sum_{\beta} \beta\tilde{\mathfrak{q}}$ erstens regulär ist, und zweitens aus lauter verschiedenen Primdivisoren besteht. Hierzu wählen wir $\tilde{\mathfrak{q}}$ als Teiler von $\mathfrak{q}'$ und wenden die Formel **9.** (8) an. Nach dieser ist $\boldsymbol{\beta}\tilde{\mathfrak{q}}$ gleich der Korrespondenz $\mathfrak{b}_{K'\to K}(\mathfrak{q}')$ und daher nach Konstruktion von $\mathfrak{b}$ ein Teiler des regulären und keine mehrfachen Bestandteile besitzenden Divisors $\mathfrak{r}$; diese verlangten Eigenschaften kommen daher auch $\boldsymbol{\beta}\tilde{\mathfrak{q}}$ zu, w. z. b. w.

Ein ganzer total nichtkonstanter Divisor $\mathfrak{b} \neq 0$, dessen zugehöriges volles Isomorphismensystem ein besonderes ist, möge ein *besonderer* Divisor von $\Delta = K \times K'$ genannt werden. Nach Satz (1) läuft der Beweis des Hauptsatzes auf den Nachweis der Ungleichung $\sigma(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) > 0$ für alle besonderen Divisoren $\mathfrak{b}$ von Δ hinaus. Dazu wählen wir $\mathfrak{b}$ ein für allemal fest und setzen:

$$n = gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{b}); \quad m = gr_{\Delta/K}(\mathfrak{b}).$$

Nach Definition **15.** (3) ist $\psi(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = 2nm$, und daher haben wir

$$\chi(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) < 2nm \tag{2}$$

zu zeigen. Zum Beweise bezeichnen wir mit B die Klasse von $\mathfrak{b}$; es sei $\mathfrak{b}_0$ ein zu $\mathfrak{b}$ primer Divisor aus B. Wir denken uns die Zerfällungserweiterung $\tilde{K}$ für $\mathfrak{b}$ so groß gewählt, daß sie gleichzeitig eine Zerfällungserweiterung für alle nichtkonstanten Bestandteile von $\mathfrak{b}_0$ ist; $\tilde{K}/K'$ heiße dann eine *starke Zerfällungserweiterung für* $\mathfrak{b}$. Für eine solche ist nach **13.** (13) $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_0\rangle_{K'} = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b}_0\rangle_{\tilde{K}}$, was

$$\langle B, B\rangle_{K'} = \langle B, B\rangle_{\tilde{K}} \tag{3}$$

ergibt.

---

[25]) Eine solche Wahl von $\mathfrak{r}$ ist nach [5], S. 359—360 möglich.

Der entscheidende Punkt im Beweis von (2) ist nun folgender Satz, der das Restprodukt $\langle B, B\rangle_{K'}$ mit der $\boldsymbol{\beta}$-Diskriminante $\mathfrak{d}_\beta$ in Verbindung bringt[26]):

(4) *Ist $\tilde{K}/K'$ eine starke Zerfällungserweiterung für* $\mathfrak{b}$, *so ist*

$$\langle B, B\rangle_{K'} \sim \mathfrak{d}_\beta - N_\beta(W) \qquad (\text{in } \tilde{K}).$$

Beweis: Wir zerlegen $\mathfrak{b}$ in $\tilde{\Delta} = K \times \tilde{K}$ in seine Primteiler: $\mathfrak{b} = \sum_\beta \tilde{\mathfrak{b}}_\beta$; dabei sind nach **7.** (9) die $\tilde{\mathfrak{b}}_\beta$ über $\tilde{K}$ von erstem Grade mit β als zugehörigem Isomorphismus von K in $\tilde{K}$. Entsprechend zerlegen wir B in die Klassen $\tilde{B}_\beta$ von $\tilde{\mathfrak{b}}_\beta$, nämlich: $B = \sum_\beta \tilde{B}_\beta$. Die Formel (3) liefert in Verbindung mit der Linearität des Restproduktes in den beiden Argumenten:

$$(5) \qquad \langle B, B\rangle_{K'} = \langle B, B\rangle_{\tilde{K}} = \sum_{\beta_1 \neq \beta_2} \langle \tilde{B}_{\beta_1}, \tilde{B}_{\beta_2}\rangle_{\tilde{K}} + \sum_\beta \langle \tilde{B}_\beta, \tilde{B}_\beta\rangle_{\tilde{K}}.$$

Da $\boldsymbol{\beta}$ ein besonderes Isomorphismensystem ist, so sind die Isomorphismen aus $\boldsymbol{\beta}$ und also auch die zugehörigen Primdivisoren $\tilde{\mathfrak{b}}_\beta$ alle voneinander verschieden, so daß für $\beta_1 \neq \beta_2$ die Restprodukte $\langle \tilde{\mathfrak{b}}_{\beta_1}, \tilde{\mathfrak{b}}_{\beta_2}\rangle_{\tilde{K}}$ gebildet werden können. Nach **13.** (12) sind diese gleich den Elementardifferenten $\mathfrak{D}_{\beta_1, \beta_2}$. Für $\langle \tilde{B}_\beta, \tilde{B}_\beta\rangle_{\tilde{K}}$ liefert die Formel **14.** (9): $\langle \tilde{B}_\beta, \tilde{B}_\beta\rangle_{\tilde{K}} = -W\beta$. Eingesetzt in (5) erhalten wir $\langle B, B\rangle_{K'} \sim \sum_{\beta_1 \neq \beta_2} \mathfrak{D}_{\beta_1, \beta_2} - \sum_\beta W\beta$, und hieraus folgt die behauptete Äquivalenz unter Berücksichtigung der Tatsache, daß sich nach **3.** (12a) die Diskriminante $\mathfrak{d}_\beta$ in die Summe $\mathfrak{d}_\beta = \sum_{\beta_1 \neq \beta_2} \mathfrak{D}_{\beta_1, \beta_2}$ von Elementardifferenten zerlegt.

Um nun zu der behaupteten Ungleichung (2) zu gelangen, kombinieren wir (4) mit dem in **4.** (12) erhaltenen Resultat. Nach diesem gibt es zu dem besonderen Isomorphismensystem $\boldsymbol{\beta}$ von K in $\tilde{K}$ einen Divisor $\mathfrak{c}$ aus K vom Grade $n + g - 2$ ($n = gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{b})$ die Gliederzahl von $\boldsymbol{\beta}$), für welchen $\mathfrak{d}_\beta \lesssim 2N_\beta(\mathfrak{c})$ gilt. Dies ergibt zusammen mit (4):

$$(6) \qquad \langle B, B\rangle_{K'} \lesssim N_\beta(2\mathfrak{c} - W) \qquad (\text{in } \tilde{K}).$$

Gehen wir hierin zum Grad in $\tilde{K}$ über, so erhalten wir auf der linken Seite $[\tilde{K} : K'] \cdot \chi(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$. Um den Grad in $\tilde{K}$ des rechtsstehenden Divisors zu berechnen, beachten wir, daß $gr(\mathfrak{c}) = n + g - 2$, also $gr(2\mathfrak{c} - W) = 2(n - 1)$ ist. Wir erhalten $gr_{\tilde{K}/\Omega}(N_\beta(2\mathfrak{c} - W)) = \sum_\beta [\tilde{K} : K\beta] \cdot 2(n - 1) = [\tilde{K} : K'] \cdot m \cdot 2(n - 1)$, letzteres auf Grund der Gradregel **7.** (10). Daher ergibt sich durch Gradvergleich in $\tilde{K}$ aus (6) die Ungleichung

$$(7) \qquad \begin{aligned} [\tilde{K} : K'] \cdot \chi(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) &\leqq [\tilde{K} : K'] \cdot 2(n - 1)\, m; \text{ also:} \\ \chi(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) &\leqq 2(n - 1)\, m < 2\, nm. \end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Formel (2), gültig für jeden besonderen Divisor $\mathfrak{b}$ von $K \times K'$. Wie oben gesagt, ist damit der Hauptsatz **15.** (5) bewiesen.

§ 5. Die Riemannsche Vermutung über die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen.

17. Symmetrische Doppelkörper mit absolut-algebraischem Konstantenkörper von Primzahlcharakteristik.

Wir wollen in diesem Abschnitt im Hinblick auf Anwendung beim Beweis der Riemannschen Vermutung die in der Überschrift genannten Doppelkörper studieren.

[26]) Übrigens gilt dieser Satz für eine beliebige Zerfällungserweiterung für $\mathfrak{b}$.

Sind in einem Doppelkörper $\Delta = K \times K'$ die komponierten Körper K und K' durch einen Isomorphismus ι verbunden: $K \to K\iota = K'$, so heißt ι eine *Symmetrie* von Δ. Ein Doppelkörper, zusammen mit einer Symmetrie soll ein *symmetrischer Doppelkörper* heißen. In einem solchen definieren die beiden abhängigen Komposita $K\iota \cdot K'$ und $K \cdot K'\iota^{-1}$ vom selben Typus einen nichtkonstanten Primdivisor $\mathfrak{i}$ von Δ, der sowohl über K als auch über K' den Grad 1 besitzt:

$$(1) \qquad gr_{\Delta/K}(\mathfrak{i}) = gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{i}) = 1.$$

Hieraus folgt nach **15.** (10):

$$(2) \qquad \sigma(\mathfrak{i}, \mathfrak{i}) = 2g,$$

wo g das gemeinsame Geschlecht von K und K' ist.

Ein Isomorphismus von K in seine eigene algebraisch-abgeschlossene Hülle $\bar{K}$ heißt ein *Meromorphismus* von K. Jeder Meromorphismus μ von K führt zu einem abhängigen Kompositum $K \cdot K'\iota^{-1}\mu$ von K mit K', und umgekehrt bedeutet jedes abhängige K-normierte Kompositum $K \cdot K'\mu'$ von K mit K' einen Meromorphismus $\mu = \iota\mu'$ von K. Im Hinblick auf Satz **7.** (2) gilt also:

(3) *In einem symmetrischen Doppelkörper $K \times K' = \Delta$ entsprechen die nichtkonstanten Primdivisoren umkehrbar eindeutig den Systemen K-konjugierter Meromorphismen von K in der Weise, daß das durch einen Meromorphismus μ gelieferte Kompositum $K \cdot K'\iota^{-1}\mu$ ein Restkompositum des zugehörigen Primdivisors $\mathfrak{m}$ ist.*

Wir untersuchen insbesondere solche symmetrische Doppelkörper $K \times K'$, deren Konstantenkörper Ω absolut algebraisch von Primzahlcharakteristik ist. Das bedeutet, daß K/Ω als Konstantenerweiterung eines algebraischen Funktionenkörpers K_0/Ω_0 mit *endlichem* Konstantenkörper Ω_0 angesehen werden kann. Ist nämlich $f(x, y) = 0$ eine Grundgleichung für K/Ω, so braucht man nur einen solchen endlichen Körper Ω_0 zu nehmen, der alle Koeffizienten von $f(x, y)$ enthält. Die Gleichung $f(x, y) = 0$ definiert dann einen algebraischen Funktionenkörper K_0/Ω_0, dessen zugehörige algebraisch-abgeschlossene Konstantenerweiterung offenbar gerade K/Ω ist.

Es sei q die Elementezahl von Ω_0 (eine Potenz der Charakteristik von Ω_0). Da dann jedes Element aus Ω_0 gleich seiner q-ten Potenz ist, so folgt, daß $f(x, y)^q = f(x^q, y^q) = 0$ ist. Daher definiert die Abbildung $x \to x^q$, $y \to y^q$ einen Meromorphismus π von K in sich, der im Teilkörper K_0 den Isomorphismus „Potenzierung mit q" induziert: $K_0\pi = K_0^q$. Es ist

$$(4) \qquad [K : K\pi] = [K_0 : K_0^q] = q.$$

Zu π gehört nach (3) ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ des Doppelkörpers $K \times K' = \Delta$, dessen Grade nach (4) durch

$$(5) \qquad gr_{\Delta/K}(\mathfrak{p}) = 1; \; gr_{\Delta/K'}(\mathfrak{p}) = q$$

gegeben sind. Beachtet man, daß das Geschlecht g' von K' wegen der Symmetrie gleich dem Geschlecht g von K ist, so folgt aus **15.** (10):

$$(6) \qquad \sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 2gq \text{ [27]}.$$

Wir stellen uns nun im Hinblick auf Anwendungen beim Beweis der Riemannschen Vermutung die Aufgabe, $\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{i})$ zu berechnen. Aus den Gradangaben (1) und (5) ergibt sich

$$(7) \qquad \psi(\mathfrak{p}, \mathfrak{i}) = q + 1.$$

[27]) Die Formel **15.** (10) gilt für einen nichtkonstanten Primdivisor, welcher über K' den Grad 1 besitzt. Es ist aber selbstverständlich, daß eine entsprechende Formel auch für einen Primdivisor gilt, der über K den Grad 1 besitzt; diese durch Vertauschung von K und K' entstehende Formel ist hier anzuwenden. Bei den folgenden Rückverweisungen werden wir dies, da selbstverständlich, nicht mehr erwähnen.

Um $\chi(\mathfrak{p}, \mathfrak{i})$ zu bestimmen, berechnen wir das Restprodukt $\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{i} \rangle_K$. Sowohl $\mathfrak{i}$ als auch $\mathfrak{p}$ haben den Grad 1 über K, und die zugehörigen Isomorphismen von K' in K werden durch

$$K' \to K'\iota^{-1}; \quad K' \to K'\iota^{-1}\pi$$

geliefert. Aus **13.** (12) folgt nun unter Beachtung von **2.** (8):

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{i} \rangle_K = \mathfrak{D}_{\iota^{-1}, \iota^{-1}\pi} = \mathfrak{D}_{\varepsilon, \pi}. \tag{8}$$

Zur weiteren Berechnung von $\mathfrak{D}_{\varepsilon, \pi}$ verabreden wir, diejenigen Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von K, die in K_0 einen Primdivisor ersten Grades induzieren, die „in K_0 gelegenen Primdivisoren" von K zu nennen. Zunächst gilt dann folgender Satz:

(9) *Die in K_0 gelegenen Primdivisoren $\mathfrak{q}_0$ sind unter allen Primdivisoren von K durch das Bestehen der Gleichung $\pi\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}_0$ ausgezeichnet.*

Dabei soll $\pi\mathfrak{q}_0 = N_{K/K\pi}(\mathfrak{q}_0)\,\pi^{-1}$ die π-Komponente von $\mathfrak{q}_0$ sein, wie sie in **2.** definiert wurde. *Beweis*: Jeder beliebige Primdivisor $\mathfrak{q}$ von K ist schon eindeutig durch den in K_0 induzierten Resthomomorphismus $K_0 \to K_0\mathfrak{q}$ bestimmt. Also ist genau dann $\pi\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$, wenn $a_0\mathfrak{q} = a_0(\pi\mathfrak{q}) = (a_0\pi)\mathfrak{q}$ für alle a_0 aus K_0 ist. Nun induziert π in K_0 den Isomorphismus „Potenzierung mit q", also haben wir $(a_0\pi)\mathfrak{q} = a_0^q\mathfrak{q} = (a_0\mathfrak{q})^q$. Es ist also genau dann $\pi\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$, wenn für alle a_0 aus K_0 die Gleichung $a_0\mathfrak{q} = (a_0\mathfrak{q})^q$ gilt. Da q die Elementezahl von Ω_0 ist, so bedeutet dies: $a_0\mathfrak{q} \in \Omega_0$. Es ist also genau dann $\pi\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$, wenn der Restklassenkörper $K_0\mathfrak{q} = \Omega_0$ ist. Dies bedeutet aber, daß $\mathfrak{q}$ in K_0/Ω_0 einen Primdivisor ersten Grades induziert, d. h. daß $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}$ in K_0 gelegen ist[28]).

Nun können wir beweisen:

(10) *Die Elementardifferente $\mathfrak{D}_{\varepsilon, \pi}$ ist gleich der Summe der in K_0 gelegenen Primdivisoren von K.*

Beweis: Nach **2.** (10) besitzt $\mathfrak{D}_{\varepsilon, \pi}$ genau diejenigen Primdivisoren $\mathfrak{q}$ von K als Teiler welche bezüglich $\{\varepsilon, \pi\}$ unzerlegt sind. Der Satz (9) sagt aus, daß genau die in K_0 gelegenen Primdivisoren $\mathfrak{q}_0$ von K bezüglich $\{\varepsilon, \pi\}$ unzerlegt sind. Zum Beweis von (10) bleibt daher nachzuweisen, daß keiner dieser Primteiler von $\mathfrak{D}_{\varepsilon, \pi}$ in $\mathfrak{D}_{\varepsilon, \pi}$ mit einer höheren Vielfachheit vorkommt. Dazu wählen wir ein Primelement t_0 für $\mathfrak{q}_0$ aus K_0. Für dieses ist sicher $(t_0 - t_0\pi) = (t_0 - t_0^q) > \mathfrak{D}_{\varepsilon, \pi}$ (für $\mathfrak{q}_0$). Andererseits ist $t_0^q \equiv 0 \bmod 2\mathfrak{q}_0$, also $t_0 - t_0^q \not\equiv 0 \bmod 2\mathfrak{q}_0$. Daraus folgt, daß $2\mathfrak{q}_0$ nicht in $\mathfrak{D}_{\varepsilon, \pi}$ aufgeht, w. z. b. w.

Nach (10) und (8) ist also

$$\langle \mathfrak{p}, \mathfrak{i} \rangle_K = \mathfrak{D}_{\varepsilon, \pi} = \sum_{\mathfrak{q}_0 \text{ in } K_0} \mathfrak{q}_0.$$

Bezeichnen wir daher mit $N_1(K_0)$ die Anzahl der Primdivisoren ersten Grades von K_0, also die Anzahl der in K_0 gelegenen Primdivisoren aus K, so folgt durch Gradbildung:

$$\chi(\mathfrak{p}, \mathfrak{i}) = N_1(K_0). \tag{11}$$

Zusammen mit (7) ergibt das

$$\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{i}) = q + 1 - N_1(K_0). \tag{12}$$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen:

Es sei $\Delta = K \times K'$ ein symmetrischer Doppelkörper mit dem absolut-algebraischen, algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper Ω von Primzahlcharakteristik. Dann kann K/Ω als Konstantenerweiterung eines algebraischen Funktionenkörpers K_0/Ω_0 mit endlichen Konstantenkörper Ω_0 aufgefaßt werden. Ist q die Elementezahl von Ω_0, so bestimmt der Isomor-

[28]) Dieser Beweis findet sich in [4], § 3, 5. Er ist hier nur der Vollständigkeit halber aufgenommen worden.

phismus „Potenzierung mit q" einen Meromorphismus π von K, und dieser wieder einen nichtkonstanten Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $K \times K'$. Ist noch $\mathfrak{i}$ der durch die Symmetrie gegebene Primdivisor von $K \times K'$, so gilt

$$(13) \qquad \sigma(\mathfrak{i}, \mathfrak{i}) = 2g; \quad \sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 2gq; \quad \sigma(\mathfrak{i}, \mathfrak{p}) = (q+1) - N_1(K_0);$$

dabei ist g das gemeinsame Geschlecht von K und K', und $N_1(K_0)$ ist die Anzahl der Primdivisoren ersten Grades von K_0.

Natürlich ist der Körper Ω_0 durch K nicht eindeutig bestimmt. Zum Beispiel erfüllt jede Erweiterung von Ω_0, soweit sie endlich ist, auch die Bedingungen dieses Satzes. Jede liefert dann einen anderen Primdivisor von $K \times K'$, für den entsprechende Aussagen gemacht werden können.

18. Formulierung und Beweis der Riemannschen Vermutung.

Ein *Kongruenzfunktionenkörper* K_0/Ω_0 ist ein solcher algebraischer Funktionenkörper, dessen Konstantenkörper Ω_0 eine endliche Elementeanzahl q besitzt. Zu einem solchen bildet man die *Kongruenzzetafunktion*

$$(1) \qquad \zeta(s) = \sum_{\mathfrak{a}_0} \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a}_0)^s} = \prod_{\mathfrak{o}_0} \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{o}_0)^s}},$$

wo über alle ganzen Divisoren $\mathfrak{a}_0$ aus K_0 summiert, bzw. über alle Primdivisoren $\mathfrak{o}_0$ aus K_0 multipliziert wird, und wo $\mathfrak{N}(\ldots)$ die Absolutnorm bezeichnet. Es ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{o}_0) = q^{gr(\mathfrak{o}_0)}$. Die Reihe bzw. das Produkt (1) konvergiert in der Halbebene $\mathfrak{R}(s) > 1$ und stellt dort eine reguläre analytische Funktion mit der Periode $\frac{2\pi i}{\log q}$ dar, die in die ganze s-Ebene regulär bis auf Pole erster Ordnung bei $s \equiv 0,\ 1 \bmod + \frac{2\pi i}{\log q}$ fortsetzbar ist[29]). Die Riemannsche Vermutung besagt nun, *daß die Nullstellen von $\zeta(s)$ alle auf der Geraden $\mathfrak{R}(s) = \frac{1}{2}$ liegen*:

$$(2) \qquad \zeta(s) \neq 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{R}(s) \neq \tfrac{1}{2}.$$

Dieser Satz soll in diesem Abschnitt mit Hilfe der Resultate dieser Arbeit bewiesen werden.

Zunächst bemerken wir, daß wegen der Funktionalgleichung[30]) der Zetafunktion:

$$(3) \qquad q^{(g-1)s}\zeta(s) = q^{(g-1)(1-s)}\zeta(1-s)$$

eine etwaige Nullstelle der Zetafunktion, deren Realteil kleiner als $\frac{1}{2}$ wäre, bei der Substitution $s \to 1 - s$ in eine Nullstelle von $\zeta(s)$ in der Halbebene $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{2}$ übergehen würde. Es braucht daher nur $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s > \frac{1}{2}$ bewiesen zu werden. Ferner dividieren wir $\zeta(s)$ durch die zu einem rationalen Funktionenkörper über Ω_0 gehörige Zetafunktion $\zeta_{rat}(s)$, welche dieselben Pole wie $\zeta(s)$, aber keine Nullstellen besitzt, so daß $\lambda(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta_{rat}(s)}$ eine *ganze* Funktion mit denselben Nullstellen wie $\zeta(s)$ ist. Schließlich führen wir eine neue Variable $t = q^{-s}$ ein und betrachten $\zeta(s)$ und $\zeta_{rat}(s)$ als Funktionen $z(t)$ und $z_{rat}(t)$ von t. Da nun die Nullstellen und Pole einer analytischen Funktion an den Polen ihrer logarithmischen Ableitung abgelesen werden können, und da $l(t) = \frac{z(t)}{z_{rat}(t)}$ nach Konstruktion keine Pole besitzt, so schreibt sich die Behauptung schließlich so:

$$(4) \qquad \frac{d}{dt} \log l(t) \ \text{ist regulär für} \ |t| < q^{-\frac{1}{2}}.$$

---

[29]) Vgl. [3], S. 255, Satz 2.

[30]) Vgl. [3], S. 256, (9).

Übrigens ist $l(t)$ ein Polynom vom Grade $2g$ (vgl. [3], S. 257). Daher liefert der Beweis von (4), daß alle $2g$ Nullstellen von $l(t)$ auf dem Kreis $|t| = q^{-\frac{1}{2}}$ liegen, und dies ergibt weiter, daß $\zeta(s)$ im Periodenstreifen genau $2g$ Nullstellen auf der Geraden $\Re(s) = \frac{1}{2}$ besitzt.

Zum Beweis von (4) berechnen wir:

$$\log z(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{o}_0} \frac{1}{m} t^{gr(\mathfrak{o}_0)m}$$

$$t \frac{d}{dt} \log z(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{o}_0} gr(\mathfrak{o}_0)\, t^{gr(\mathfrak{o}_0)m} = \sum_{r=1}^{\infty} N_r t^r$$

mit $N_r = \sum_{gr(\mathfrak{o}_0) \mid r} gr(\mathfrak{o}_0)$.

Diese Zahl N_r stellt nach dem Zerlegungsgesetz bei endlich-algebraischer Konstantenerweiterung (vgl. [5], S. 341) die Anzahl $N_1(K_0^{(r)})$ der Primdivisoren ersten Grades der Konstantenerweiterung $K_0^{(r)}/\Omega_0^{(r)}$ von K_0/Ω_0 dar, wo $\Omega_0^{(r)}$ die (einzige) Erweiterung von Ω_0 vom Grade r ist. — Ist speziell K_0/Ω_0 ein rationaler Funktionenkörper, so ist diese Zahl $= q^r + 1$; wir erhalten dann

$$t \frac{d}{dt} \log z_{rat}(t) = \sum_{r=1}^{\infty} (q^r + 1)\, t^r.$$

Dies ergibt

$$-t \frac{d}{dt} \log l(t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left((q^r + 1) - N_1(K_0^{(r)})\right) \cdot t^r.$$

Die Behauptung (4) sagt aus, daß diese Reihe mindestens im Kreise $|t| < q^{-\frac{1}{2}}$ konvergiert. Sie wird bewiesen durch die unendlich vielen Ungleichungen

$$(5) \qquad |(q^r + 1) - N_1(K_0^{(r)})| \leqq 2g q^{\frac{r}{2}},$$

welche gestatten, die in Frage stehende Potenzreihe durch eine für $|t| < q^{-\frac{1}{2}}$ konvergente Majorante abzuschätzen. Zum Beweise von (5) genügt es, den Fall $r = 1$ vorzunehmen, da beliebiges $r \geqq 1$ nur einen höheren Grundkörper $\Omega_0^{(r)}$ statt Ω_0 bedeutet.

Wir haben also zum Beweis der Riemannschen Vermutung folgenden Satz zu beweisen: Ist K_0/Ω_0 ein Kongruenzfunktionenkörper vom Geschlecht g mit der Elementezahl q des Konstantenkörpers, so gilt für die Anzahl $N_1(K_0)$ der Primdivisoren ersten Grades von K_0 die Abschätzung

$$(6) \qquad |(q + 1) - N_1(K_0)| \leqq 2g q^{\frac{1}{2}}.$$

Um dies zu zeigen, bilden wir die algebraisch-abgeschlossene Konstantenerweiterung K/Ω von K_0/Ω_0 und einen zu K isomorphen, von K algebraisch-unabhängigen Körper $K' = K\iota$. Mit diesem bilden wir den symmetrischen Doppelkörper $K \times K'$, und betrachten die dort nach **17.** (13) vorhandenen nichtkonstanten Primdivisoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{p}$. Diese spannen einen zweidimensionalen Untermodul $\mathfrak{U}$ des Moduls aller Divisoren von $K \times K'$ auf. Für einen Divisor $\mathfrak{a} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{U}$ (u und v ganzrationale Zahlen) ist $\sigma(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = u^2\sigma(\mathfrak{i}, \mathfrak{i}) + 2uv\sigma(\mathfrak{i}, \mathfrak{p}) + v^2\sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$.

Die von σ in $\mathfrak{U}$ induzierte Metrik $\sigma_{\mathfrak{U}}$ bestimmt sich also vermöge der Basisdarsellungen der Divisoren aus $\mathfrak{U}$ durch die Basis $\{\mathfrak{i}, \mathfrak{p}\}$ in der angegebenen Weise aus der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sigma(\mathfrak{i}, \mathfrak{i}) & \sigma(\mathfrak{i}, \mathfrak{p}) \\ \sigma(\mathfrak{i}, \mathfrak{p}) & \sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \end{pmatrix}.$$

Da $\sigma_{\mathfrak{U}}$ nach **15.** (5) positiv semidefinit ist, so bedeutet das, daß die durch die Matrix A gelieferte quadratische Form positiv semidefinit ist, daß also die Diskriminante $\det(A)$ nichtnegativ ist. Nach **17.** (13) berechnet sich nun die $\det(A)$ zu $\det(A) = 4g^2q - ((q+1) - N_1(K_0))^2$, und wir erhalten:

$$4g^2q - ((q+1) - N_1(K_0))^2 \geqq 0,$$

also die behauptete Ungleichung (6) sogar in rationaler Form[31]).

Damit ist, wie gesagt, die Riemannsche Vermutung bewiesen.

---

[31]) Für diesen Schluß vgl. [7], S. 70, Corollaire 3.

Literaturverzeichnis.

[1] *M. Deuring*, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper I. J. f. r. u. a. Math. **177**.

[2] *M. Deuring*, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper II. J. f. r. u. a. Math. **188**.

[3] *H. Hasse*, Über Kongruenzzetafunktionen. S.Ber. Preuß. Ak. Wiss. 1934, S. 250.

[4] *H. Hasse*, Punti razionali sopra curve algebriche a congruenze. Reale accademia d'Italia 1940.

[5] *H. Hasse*, Zahlentheorie. Berlin 1949.

[6] *G. Pickert*, Komposita transzendenter Körpererweiterungen. J. f. r. u. a. Math. **187**.

[7] *A. Weil*, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en deduisent. Act. sc. et ind. **1041**.

Eingegangen 1. November 1951.

die
ante
) =